原書第八版序

这一版与以前各版有着極其重大的区别，書中已删去了关于解析几何学的材料，因此也就不得不把其余的材料重加編排。特别是以前在这一卷中所講的关于微分学在几何上的应用，已完全收集在第二章§7里。其次，在第一卷里还安放了專講复数，多項式的主要性質，以及系統的函数积分法的一章；以前这是第二卷的第一章。

这里不談本書講述方面細微的补充和修改，只指出一些重要的增补。鑒于在各卷里必須碰到近代分析学中相当微妙而且复杂的問題，我們認为，在第一章§2末講極限論之后，講述了无理数理論以及这理論在証明極限存在准則与連續函数性質时的应用，乃是有用处的。就在那里，我們引入了初等函数的严格定义及其性質的討論。在專講多元函数的第五章中，我們引入了隐函数存在的証明。

本書的講述是这样安排的，使得大号字体的部分可以独立地閱讀。放在小号字体里的有各种举例，有某些个别的补充問題，还有我們在上面提到的种种理論材料，而第四章的最后几段則又含有性質比較复杂的补充理論材料。

菲赫金哥尔茨教授对本書的講述方面給我提了許多宝貴的意見，这些意見我已經在最后定稿时加以利用。我認为向他表示深切的感謝是自己愉快的义务。

B. 斯米尔諾夫

原書第十六版序

这一版主要正文与全書整个編排仍然沒有变更，但在講述方面作了一些修改，以求其更趋于严密与完备，特别是有关微积分学在几何的应用問題上。

B. 斯米尔諾夫

第一卷目次

第一章　函数关系与極限論

第二章　导数概念及其应用

第三章 积分概念及其应用

第四章 級数及其在近似計算中的应用

第五章 多元函数

第六章 复数,高等代数初步与函数的积分法

第一章　函数关系与極限論

§1. 变量

1. 量及其測量　在精确自然科学中，数学分析具有基本重要性。其他每門科学只着重于研究我們周圍世界的某些特定方面，而数学所要探討的，則是可供科学研究的一切現象所固有的最一般性質。

量及其測量的概念是基本概念之一。量的特性就在于它可以被測量，也就是，可以用某种方法，与取作單位量的同类某特定量来作比較。比較的方法隨着所論量的性質而定，而这比較的步驟則叫做測量。測量的結果得出抽象的数，它表示所論量与單位量之比。

任何自然規律都告訴我們量之間的关系，或者更确切地說，都給出表示这些量的諸数之間的关系。数学研究的对象也正就是数以及数之間的各种关系，而不管引出这些数与这关系的那些量或規律的具体性質是什么。

因此，每个量都有測量它的抽象数与之对应。但这抽象数完全要取决于所选的單位量或尺度。單位量增大，用以測定所給量的那个数就减小，反之，用較小的單位，就得到較大的数。

选擇尺度要看所論量的性質与測量时的情况而定。在測量同一类量的时候，尺度的大小也可在很大的范圍內变动，——以測量長度为例，在精确的光学研究中，用一埃之長（一毫米的千万分之一，10^{-10}m）作單位；而在天文学中普遍用的長度單位叫做光年，就是一年內光所經过的距离（一秒鐘光大約走 300000 km）。

2. 数　測量結果得到的数，可以是整数（若考虑的量是單位量的

整数倍)，分数(若存在另一新單位，被測量的量与原單位量都是新單位量的整数倍，——簡單地說，就是被測量的量与單位量可以通約)，以及无理数(上述的公共單位不存在时，就是被測量的量与單位量不可以通約)。

例如，在初等几何学中証明了，正方形的对角綫与它的边長不可以通約，所以若我們用边長作單位，来測量正方形的对角綫，則所得的数 $\sqrt{2}$ 是无理数。用直徑長作單位，測量圓周的長，所得的数 π 也是无理数。

为要弄清楚无理数的概念，可以应用十进制小数。由算术知道，任一有理数可以表示成有限位小数或循环无穷位小数(純循环或混循环)的形式。例如，由十进制除法法則，用分母除分子，我們得到：

$$\frac{5}{33}=0.151515\cdots=0.(15)。$$

$$\frac{5}{18}=0.2777\cdots=0.2(7)。$$

反之，由算术我們也知道任一十进制循环小数表示一个有理数。

測量与所用單位量不可以通約的量时，我們可以先計算被測量的量包含若干單位量，再看剩余的量包含若干个十分之一的單位量，再看新的剩余量包含若干个百分之一的單位量，如此繼續作下去。用这方法測量与單位量不可以通約的量时，就作成一个不循环的无穷位小数。任一无理数对应一个这样的无穷位小数；反之，任一不循环的无穷位小数对应一个无理数。若在这个无穷位小数中只取前几位，則得到所对应无理数的一个較小的近似值。例如，用普通法則开平方到三位小数，得到：

$$\sqrt{2}=1.414\cdots。$$

数 1.414 与 1.415 就各是 $\sqrt{2}$ 的，准确到千分之一的，較小的与較大的近似值。

利用十进制小数，可以比較无理数彼此之間的大小，以及无理数与

有理数之間的大小。

在很多場合，必須考虑带有不同正負号的量(溫度高于或低于零度，直綫运动中正的或負的速度等等)。这样的量分别用正数或負数来表达。若 a 及 b 是正数，而 $a>b$，則 $-a<-b$。任一正数或零必大于任一負数。如此全部有理数与无理数按大小排列成一定的順序。所有这些数組成实数集合。

注意，在用十进制小数表示实数时，我們可用循环节是9的无穷位小数来替代任一有限位小数。例如，$3.16=3.1599\cdots$。若不用有限位小数，則实数与无穷位小数恰好成一一对应，就是任一实数对应一个确定的无穷位小数，而任一无穷位小数对应一个确定的实数。負数对应冠有負号的无穷位小数。

在实数范圍內，除去用零除以外，四种演算都可以实行。任一实数的奇次根永远有一个确定的值。正实数的偶次根有两个值，只是符号相反。負实数的偶次根，在实数范圍內沒有意义。至于实数以及它們的演算的严格理論，在[40]的小号字中再講。

将表达一个已知量的数，取+号，叫做这个量的算术值或絕对值。一个数 a 所表达的量的絕对值，也可以說是这个数 a 的絕对值，記作 $|a|$。如此，我們就有：

$$\text{若 } a \text{ 是正数,} \qquad |a|=a;$$

$$\text{若 } a \text{ 是負数,} \qquad |a|=-a.$$

不难証明，和的絕对值 $|a+b|$，仅当 a 与 b 同号时，与各項絕对值的和 $|a|+|b|$ 相等；否則 $|a+b|$ 較小；所以

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

例如，$+3$ 与 -7 的和的絕对值等于4，而各項絕对值的和是10。

同样可証，

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|,$$

上式中設 $|a|\geqslant|b|$。

积的絕对值等于各因数絕对值的积,商的絕对值等于除数的绝对值除被除数的絕对值之商

$$|abc|=|a|\cdot|b|\cdot|c|,\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}。$$

3．常量与变量 数学中所討論的量分为二类:常量与变量。

在給定的問題中,不变的,保持一个值的量叫做常量;在給定的問題中,由于某种緣故,取不同值的量叫做变量。

由这定义显見,常量与变量的概念,要看現象是在什么情况下来研究的。同一的量,在某种情况下可以認为是常量;而在别的情况下,就可能是变量。

例如,測量物体的重量时,要認清,称量是在地球表面上同一地方举行,还是在不同的地方举行;若在同一地方称量,則确定重量的重力加速度是常量,于是各种物体間的不同重量只与它們的質量有关;若在不同的地方称量,則因为重力加速度依賴于地球轉动的离心力,就不能把它算做常量;据此,設称量时不用杠杆做的秤,而用彈簧秤,則同一物体在赤道上比在两極輕些。

同样,在較粗略的技术計算中,一个樞軸的長度可以算作是不变的量;若比較精确些,当必須考慮到温度变化的作用时,樞軸的長度就成了变量,自然,全部計算也就大为复杂了。

4．区間 測量变量时,有很多不同情况。有的变量可以取任一实数值,沒有任何限制(例如,由一定时刻开始計算,时間 t 可取任一实数值,可正可負);有的只取限于某一不等式的値(例如,絕对温度 $T°$,須 $>-273°C$);还有的变量只能取某些値,而不能任意取値(如只取整数——某城居民数,定积气体內分子数——或只取有理数等)。

我們講几种在理論研究与实际应用中,測量变量时最常見的情况。

a, b 为二已知实数,若变量 x 可以取适合条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全部的实数値,則說 x 在区間 $[a,b]$ 上变化。这种包含两端的区間,常叫做閉

区間。若变量 x 能取区間 (a, b) 中，除两端外，全部的数值，即 $a<x<b$，則說 x 在区間 (a, b) 內变化。这种不含两端的区間叫做开区間。此外，x 变化的范圍也可能是一端閉一端开的区間：$a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$。

若 x 的变化范圍，由不等式 $a\leqslant x$ 确定，則說 x 在一个左端閉右端开的区間 $[a, +\infty)$ 上变化。同样的，对不等式 $x\leqslant b$，我們有左端开右端閉的区間 $(-\infty, b]$。若 x 可以取任一实数值，則說 x 在一个两端开的区間 $(-\infty, +\infty)$ 上变化。

5. 函数概念 在实际問題中，要考虑的常常不仅是一个变量，而是同时有几个变量。

例如，就一公斤的空气来講，确定它的情况的变量，就有它所受的压力 $p(\mathrm{kg/m^2})$，所占的容积 $v(\mathrm{m^3})$，以及它的温度 $t°\mathrm{C}$。現在假設空气的温度保持在 $0°\mathrm{C}$；t 就是个常量，等于 0，只剩下 p 与 v 两个变量。若改变压力 p，則容积 v 也被改变，例如若空气被压縮，則容积减小。在这里，我們可以随意改变压力 p（至少在技术許可的范圍內），所以我們把 p 叫做自变量；显然，对每一个压力的值，气体应占有一个完全确定的容积；于是应該有一个定律，用这定律，对每一个 p 的值，可以找到对应于它的 v 的值。这就是著名的波义耳—馬瑞特定律。它說，气体，当温度不变时，容积与压力成反比。

应用这定律到一公斤的空气上，可求得 v 与 p 之間的关系如方程

$$v=\frac{273\times 29.27}{p}.$$

在这情形下，变量 v 叫做自变量 p 的函数。

由这个特例推广，理論上講，我們可以說，自变量的特性就是：有一个它可能取的值的集合，在这个集合中我們可以随意为它选擇任何一个值。例如自变量 x 的值的集合，可能是某个区間 (a, b) 或是这区間的內部，就是自变量 x 能取满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 或 $a<x<b$ 的任意一

个値。也有时 x 可以取任一整数値。上述例中，p 起着自变量的作用，而 v 是 p 的函数。現在給函数一个理論的定义。

定义 若对于自变量 x 的任何一个确定的值（在可能取的值的集合內），对应的量 y 有确定的值，y 就叫做自变量 x 的函数。

若 y 是 x 的函数，确定于区間 (a, b) 上，則对于 x 在这区間上的任何一个値，对应的 y 有确定的值。

两个量中，x 或 y 那个算作自变量，常是看怎样方便。上例中我們也可以随意改变容积 v，每次都确定一个压力 p，因此我們可把 v 算作自变量而把压力 p 看作 v 的函数。由上面的方程解 p，就得到由自变量 v 表达函数 p 的公式：

$$p=\frac{273\times 29.27}{v}。$$

上面关于两个变量的叙述，不难推广到随便几个变量的情形，并且我們可以分别出自变量与因变量或函数。

回到我們的例，假設温度不总是 0°C，而是可以变的。波义耳—馬瑞特定律就应当换成較复杂的克拉波朗关系式：

$$pv=29.27(273+T),$$

这里指出，研究气体的状态时，p，v 与 T 中只有两个可以随意改变，若是給定了两个的值則第三个的値就完全确定了。例如若取 p 与 T 作自变量，v 就是它們的函数：

$$v=\frac{29.27(273+T)}{p},$$

或者把 v 与 T 算作自变量，p 就是它們的函数。

看另一个例，由三角形的边長 a，b，c 表达面积 S，有公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 p 是三角形的半周

$$p=\frac{a+b+c}{2}。$$

三边 a, b, c 可以随意改变，只須每边大于其余两边之差而小于其和。如此变量 a, b, c 是限于不等式的自变量，而 S 是它們的函数。

我們也可以随意取三角形的两个边，如 a, b，与面积 S；应用公式

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

求 a, b 两边的夾角 C，这里 a, b, S 是自变量，C 是函数。而 a, b, S 应該限于不等式

$$\sin C=\frac{2S}{ab}\leqslant 1。$$

注意，在这例中，我們得到 C 的两个值。因为 C 可以取作一个銳角或是一个鈍角，都可能使

$$\sin C=\frac{2S}{ab}。$$

这里我們得到多值函数的概念，它的詳細情形以后再講。

6. 表示函数关系的分析法 任一自然律，給出一个現象与另一个現象的关系，于是建立一个量与量之間的函数关系。

函数关系的表示法很多，最重要的有三种：（1）分析法；（2）列表法；（3）圖示法或几何法。

如果一个量与量之間的函数关系，用一个含有这些量与各种数学演算（如加，減，乘，除，取对数等。）的方程来表示，我們說这是用分析法表示函数。作理論研究时，总是用分析法表示函数，亦卽，在建立基本前提之后，利用数学分析得出結果来，这結果是个数学公式的形式；以天体力学为例，在各种运动中，它們的位置与相互的作用都是由一个基本定律——万有引力定律——得来的。

若某函数（卽因变量）可以由自变量通过数学演算来直接表达，則叫做显函数。显函数的例子，有如定温下，用压力 p 作自变量，气体容积 v 的表达式（一元显函数）：

$$v=\frac{273\times 29.27}{p}。$$

或用边長作自变量，三角形面积 S 的表达式(三元显函数)：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{。}$$

再如

$$y=2x^2-3x+7 \tag{1}$$

是一个自变量 x 的显函数。

有时用自变量表达一个函数的公式，不很容易或者不可能写出来。我們就簡写作：

$$y=f(x)\text{。}$$

这个写法标記出，y 是自变量 x 的函数，f 用作記 y 对 x 的关系的符号。自然，别的字母也可以用来替代 f。若要考虑 x 的几个不同的函数，則須用不同的字母来記对 x 的关系：

$$f(x),\quad F(x),\quad \varphi(x)\text{等等。}$$

这里写的符号，不仅用于分析法表示的函数，而且也用于[5]中所定义的最一般的函数关系。

用类似的記法，多元函数写成：

$$v=F(x,\ y,\ z)\text{。}$$

这里 v 是变量 x, y, z 的函数。

給自变量以特殊値，完成 f, F, …中所指出的演算，就得到函数的特殊値。例如 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数(1)的値是

$$y=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\frac{1}{2}+7=6\text{。}$$

一般来講，$x=x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的値記作 $f(x_0)$。多元函数可以类推。

不要把[5]中所給的函数的一般定义，与 y 的通过 x 的分析表达式相混。函数的一般定义中，只說是有一个法則，当变量 x 在它的可取値的集合中任取一値时，对应的 y 有确定的値。并沒有假設 y 要有通过 x 的分析表达式。还須注意，在自变量 x 的不同的变动区域，可用不同

的分析表达式定义函数。例如我們在区間 (0, 3) 上作一个函数 y 如下：$0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x+5$；而 $2<x\leqslant 3$ 时，$y=11-2x$。于是当 x 取区間(0, 3)上任一値时，对应的 y 有确定的值，所以 y 是一个函数。

7．隐函数 若一个函数沒有通过自变量的直接的分析表达式，而只有一个方程表示函数的値与自变量的値的关系，就叫隐函数。例如，若变量 y 与变量 x 适合方程

$$y^3-x^2=0,$$

则 y 是自变量 x 的隐函数；从另一方面看，也可以把 x 算作是自变量 y 的隐函数。

几个自变量 $x, y, z, \cdots$ 的隐函数 v 一般由方程

$$F(x, y, z, \cdots, v)=0$$

确定。

只有当这方程对 v 可解，而 v 能表現成 $x, y, z, \cdots$ 的显函数

$$v=\varphi(x, y, z, \cdots)$$

时，才能計算这个函数的値。

上例中，y 可以通过 x 表达成

$$y=\sqrt[3]{x^2}。$$

但是，要得到函数 v 的各种性質，不一定要解这方程；常是就确定它的方程来考察隐函数就足够了。

例如，气体的容积 v 是压力 p 与溫度 T 的隐函数，由方程

$$pv=R(273+T)$$

确定。

三角形中 a, b 二边的夹角 C 是 a, b 与面积 S 的隐函数，由方程

$$ab\sin C=2S$$

确定。

8．列表法 函数的分析表示法主要是在作理論研究时用，就是在研究一般定律时用。但在实际上要求出各种函数的某些特殊值时，分

析表示法常不很方便，因为需要每次作所有必要的計算。

为方便起見，在实际应用中，对于最常用的函数，常将自变量的許多特殊值与对应的函数的特殊值列成表。

例如，在实用中常見的有下列諸函数的表：

$y=x^2$，$\frac{1}{x}$，$\sqrt{x}$，πx，$\frac{1}{4}\pi x^2$，$\log_{10} x$，$\log_{10}\sin x$，$\log_{10}\cos x$ 等，此外，还有很有用的較复杂的函数的表：如貝塞尔函数表，橢圓函数表等。也有多元函数的表，最簡單的如乘法表，就是 x 与 y 取整数值时，函数 $z=xy$ 的值的表。

有时，要用来計算函数值的那些自变量的特殊值，在表上沒有，而表上只有与它临近的值。为要在这种情形下用表，有各种的插补法，中学里用的对数表，就是其中一种(逐差法)。

列表法的重要性，在于它可以用来表示不知道分析表达式的那种函数；在做实驗时，就需要用列表法。任何实驗研究的目的，在于找出我們所不知道的函数关系，因此任何实驗的結果总是列成一个表，表示这实驗中所研究的量的各个值的关系。

9. 数的圖示法　講函数关系的圖示法时，我們先由一个变量的圖示法开始。

任何一个数 x 可以用某个綫段来表示。为此只要在选定了單位長后，作一个長度等于給定的数 x 的綫段就成了。如此，任何一个量，不仅可以用数来表达，也可以用綫段作它的几何表示。

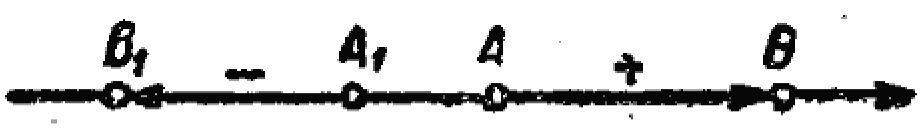


圖 1.

为使这方法也可表示負数，我們在一条标明方向的直綫上取綫段(圖 1)。其次，用符号 $\overline{AB}$ 表示任意綫段，并把 A 叫做綫段的起点，B 叫做終点。

若由 A 到 B 的方向与直綫的方向一致，則这綫段表示一个正数。若由 A 到 B 的方向与直綫的方向相反，則这綫段表示一个負数(圖 1 中 $\overline{A_1B_1}$)。至于所考虑的数的絕对值，則由表示这个数的綫段的長度

表达,与方向无关。

綫段$\overline{AB}$的長度記作$|\overline{AB}|$;若綫段$\overline{AB}$表示数x,則可以簡写作:

$$x=\overline{AB};\quad |x|=|\overline{AB}|。$$

更确定些,可以先在直綫上选定一点O,而把一切綫段的起点总放在O点。于是,任意一点A,有一个以它为終点的綫段$\overline{OA}$,表示一个数x(圖2)。反之,給定一个数x,就可确定一个綫段$\overline{OA}$的大小与方向,于是确定它的終点A。



圖 2.

如此,若在一个有定向的直綫$X'X$(軸)上,取一个定点O(原点);則每一个数x对应于这直綫上一个确定的点A,綫段$\overline{OA}$表示这个数x;反之,軸上任一点A确定一个实数x,由綫段$\overline{OA}$表示;这个数x叫做A点的坐标,若須要标明A的坐标是x,則写作$A(x)$。

若数x改变,則表示它的A点就在軸上移动。前面講过的区間的概念,有了数x的圖示法,可以更清楚些。若x在区間$a\leqslant x\leqslant b$上变动,則$X'X$軸上的对应点在一个綫段上,这个綫段的两个端点的坐标是a与b。

若只限于有理数,則当綫段$\overline{OA}$与單位長不可以通約时,A点就沒有对应的坐标。換句話說只是有理数不能填滿直綫上全部的点。于是要引入无理数来补足它。一个变量的圖示法的基本假設就是:$X'X$軸上任何一点对应于一个确定的实数,反之,任何一个实数对应于$X'X$軸上一个确定的点。

在$X'X$軸上取两点:点A_1有坐标x_1,点A_2有坐标x_2。綫段$\overline{OA_1}$与$\overline{OA_2}$就各对应于数x_1与x_2。无論A_1,A_2的相互位置如何,不难証明,綫段$\overline{A_1A_2}$对应于一个数(x_2-x_1),因此,这个綫段的長度就等于这个差的絕对值。就是

$$|\overline{A_1A_2}|=|x_2-x_1|。$$

例如，若 $x_1=-3$，$x_2=7$，則点 A_1 在 O 之左，到 O 的距离等于 3；而点 A_2 在 O 之右，到 O 的距离等于 7。綫段 $\overline{A_1A_2}$ 的長度就是 10，而与 $X'X$ 軸同向，就是它对应于数 $10=7-(-3)=x_2-x_1$。点 A_1 与 A_2 的其他排列情形，請讀者自取。

10. 坐标 以上我們看到，直綫上点的位置可以由实数 x 确定。現在用类似的方法确定平面上点的位置。

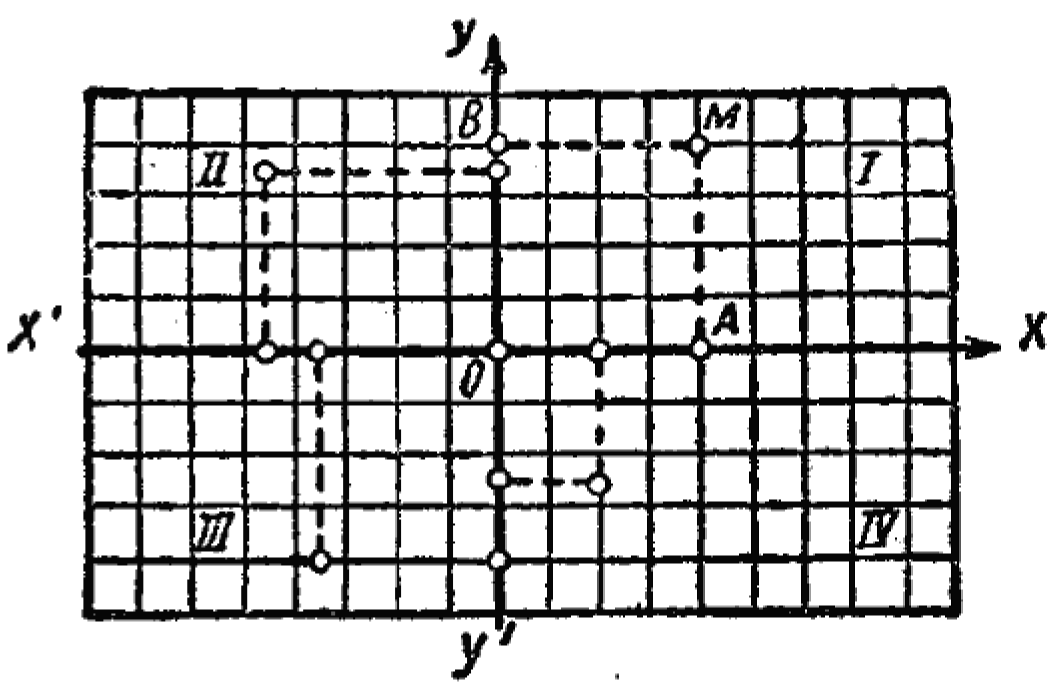


圖 3.

在平面上取两个互相垂直的軸 $X'X$ 与 $Y'Y$，并規定它們的交点 O 作各軸的原点(圖 3)。用箭头标明軸的方向。$X'X$ 軸上的点对应的实数記作 x。$Y'Y$ 軸上的点对应的实数記作 y。若給出定值 x 与 y，則在 $X'X$ 与 $Y'Y$ 軸上有定点 A 与 B；知道了点 A 与 B，可以过 A 与 B 各作平行于軸的直綫，于是得到它們的交点 M。

量 x, y 的每一对值，对应于平面圖上点 M 的一个确定的位置。反之，平面上每一点 M，对应于量 x, y 的一对确定的值，就是过点 M 平行于二軸的直綫与 $X'X$ 及 $Y'Y$ 的交点 A 及 B 所对应的数。

圖 3 中标明 $X'X$ 与 $Y'Y$ 軸的方向，于是点 A 若在 O 之右，x 算作正的；若在 O 之左，算作負的，点 B 若在 O 之上，y 算作正的；若在 O 之下，算作負的。

确定平面上点 M 的位置，同时也被点 M 的位置所确定的量 x, y 叫做点 M 的坐标。$X'X$，$Y'Y$ 軸叫做坐标軸，作圖的平面——坐标面 XOY，点 O——坐标原点。

量 x 叫做点 M 的横坐标，y——縱坐标。用坐标給定的点 M，写成

$$M(x, y)。$$

这种表示法叫做直角坐标法。

点 M 的位置在各象限内(I—IV)时(圖3),它的坐标的符号如下表:

M	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

显然,点 M 的坐标 x, y 就等于点 M 到两坐标軸的距离,带上应有的符号。

11. 圖形与曲綫方程 再看表示点 M 的量 x 与 y,設 x 与 y 由一个函数关系連系,就是說随意变更 x(或 y)的值,每次总得到一个对应的 y(或 x)的值。每一对这样的 x 与 y 的值,对应于平面 XOY 上点 M 的一个确定的位置;若改变 x 与 y 的值,则点 M 在平面上移动,于是自动的作成一条綫(圖 4),这叫做函数关系的圖示。

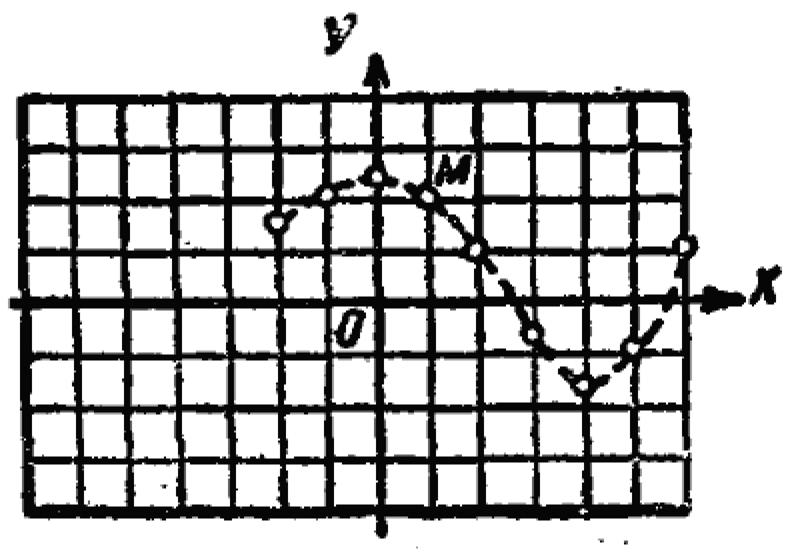


圖 4.

若函数关系用分析法以显式

$$y=f(x)$$

或隐式

$$F(x, y)=0$$

給出,则这个方程叫做該曲綫的方程,而这个曲綫叫做該方程的圖形。

一条曲綫的圖形与它的方程表示同一个函数关系,只是方法不同,就是說,坐标满足曲綫方程的所有的点都在曲綫上,反之,曲綫上所有的点的坐标,都满足曲綫方程。

若已知曲綫的方程,就可用画圖紙,作出相当正确的曲綫(更正确地說,可以作出曲綫上任意多的点);作出較多的点,曲綫的形状就会显出来;这种方法叫做描迹。

作曲綫时，选择尺度是很重要的；x 与 y 的尺度可以选得不一样。如果 x 与 y 用相同的尺度，平面就如方格紙；用不同的尺度，平面如矩形格紙。以后我們关于 x 与 y 用相同的尺度。

讀者可以变更 x 与 y 的尺度，用此处所介紹的描迹法作几个最簡單函数的圖形。

以上講到点 M 的坐标，曲綫的方程与方程的圖形等，由这些概念建立起代数与几何的紧密連系。一方面，可能由几何的軌迹来表示并研究分析上的函数关系，另一方面，也可能由代数的演算来求几何問題的解答；这是笛卡儿首創的解析几何学的基本任务。

因为特别重要，我們再把作为解析几何学的基础的几件事列在下面：

若于平面上規定好两个坐标軸，則平面上任一点对应于一对实数——这个点的横坐标与縱坐标，反之，任意一对实数对应于平面上一个确定的点——第一数是它的横坐标，第二数是它的縱坐标。平面上的曲綫对应于 x 与 y 的一个函数关系，或者說，一个含变量 x 与 y 的方程，这个方程必須且仅須被曲綫上的点的坐标满足；反之，一个含有两个变量 x 与 y 的方程对应于一条曲綫，这条曲綫由所有的坐标能满足这个方程的点組成。

現在再回到最簡單函数的圖形。还要注意，若有一个由方程給定的函数关系，无論是显式或是隐式：

$$y=f(x) \quad 或 \quad F(x, y)=0,$$

則在以 $X'X$ 与 $Y'Y$ 为軸的平面上，对应于該方程的曲綫叫做这方程的圖形或由这方程确定的函数的圖形。这圖形上的点的横坐标与縱坐标，分别給出这函数关系中变量 x 与 y 的值。

在自动記录仪器里，圖形是自动作成的，通常用变量 x 記时間，y 記所注意的随时間改变的量，如气压（气压圖）、气溫（气溫圖）。对于气缸或蒸汽机，有表示气体压力与容积的关系的圖。

12. 綫性函数 函数中最基本的，也是实际上最重要的，是一次二項式

$$y=ax+b, \tag{2}$$

其中 a 与 b 是已知常数。这个函数的圖形是直綫。它也叫做綫性函数。先考虑 b 等于零的情形。这时函数成为：

$$y=ax。\tag{3}$$

它表示 y 与 x 成正比，常系数 a 叫做比例系数。

由圖(圖5)可以看出，方程(3)的圖形有下述的几何性質：无論于其上取那一个点 M，其縱坐标 $y=\overline{NM}$ 与横坐标 $x=\overline{ON}$ 之比为一常量 a。而这个比值就是綫段 $\overline{OM}$ 与 $\overline{OX}$ 軸交角 α 的正切。因此，点 M 的几何軌迹是一条过坐标原点的且与 OX 軸的交角为 α $(\alpha+\pi)$ 的直綫。

我們認为 α 是由 OX 軸以逆时針方向到这直綫的角度。

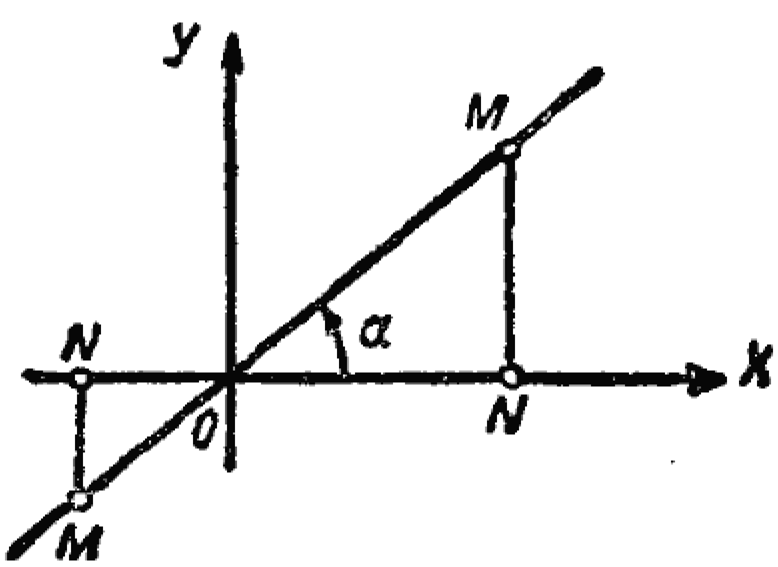


圖 5.

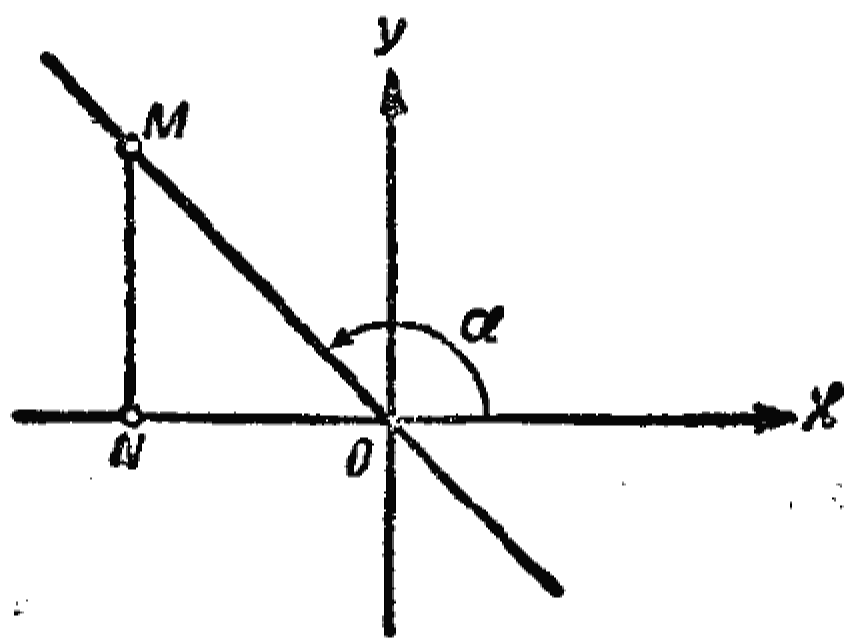


圖 6.

由圖还可看出方程(3)中系数 a 有重要的几何意义：a 是該方程所对应的直綫与 OX 軸交角的正切。因此，a 叫做这直綫的斜率。注意，若 a 是負数，則 α 是鈍角，于是对应的直綫的傾斜情形如圖6所示。

現在回到綫性函数的一般情形，考虑方程(2)。方程(2)的圖形中的縱坐标 y，与方程(3)的圖形中的縱坐标差一个常数項 b。因此，我們可以由圖5所示的方程(3)的圖形 ($a>0$ 时) 直接得到方程(2)的圖形；只須：若 b 是正的，就平行于 OY 軸向上移动一段 b，若 b 是負

的，就向下移。如此所得的直綫平行于原来的直綫，且在 OY 軸上截一段 $\overline{OM_0}=b$（圖 7）。

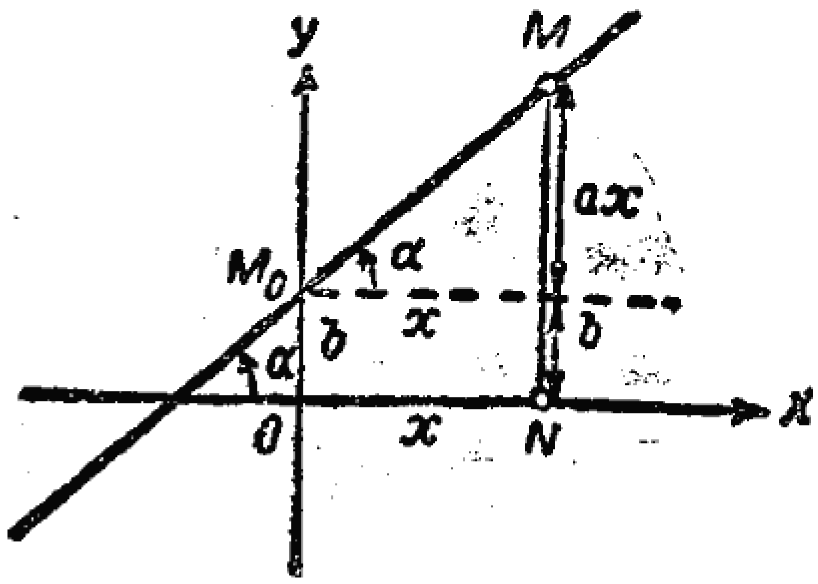


圖 7.

所以，函数（2）的圖形是一条直綫，它与 OX 軸交角的正切等于 a，而原点 O 到它与 OY 軸的交点的距离等于 b。

系数 a 叫作这直綫的斜率，b 叫做这直綫的縱截距。反之，若已知一条直綫，不平行于 OY 軸，則对应于該直綫的方程可以写成如（2）的形狀。依照以上所述，只須取系数 a 等于該直綫与 OX 軸交角的正切，而 b 等于該直綫在 OY 軸上所截綫段之長。

还有一种特殊情形。設 $a=0$。方程（2）成为：

$$y=b, \tag{2_1}$$

亦卽得到这样一个 x 的"函数"，无論 x 取什么値，函数的値永远是 b。不难看出，方程(2_1)的圖形是一条直綫，这直綫平行于 OX 軸而与 OX 軸的距离是 $|b|$（若 $b>0$ 則在上。若 $b<0$，則在下）。为了不作特殊的規定，我們認为方程(2_1)也确定一个 x 的函数。

13．改变量。綫性函数的基本性質　現在我們講一个研究函数关系时，常常遇到的重要概念。

当自变量 x，由初値 x_1 变到終値 x_2 时，終値与初値的差 x_2-x_1 叫做 x 的改变量。函数 $y=f(x)$ 的对应的終値与初値的差。

$$y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1),$$

叫做 y 的对应的改变量。

改变量常記作：

$$\Delta x=x_2-x_1, \quad \Delta y=y_2-y_1。$$

注意，改变量可以是正量，也可以是負量，亦卽改变并不一定是要增加的。

Δx整个用作一个表示x的改变量的符号。

应用于綫性函数

$$y_2=ax_2+b, \quad y_1=ax_1+b。$$

逐項相减，得到：

$$y_2-y_1=a(x_2-x_1), \tag{4}$$

或
$$\Delta y=a\Delta x。$$

这等式說明，綫性函数$y=ax+b$具有一个性質，就是函数的改变量y_2-y_1与自变量的改变量x_2-x_1成正比，而比例系数为a，a就是这函数的圖形的斜率。

若利用圖形（圖8），則自变量x的改变量对应于綫段$\overline{M_1P}=\Delta x=x_2-x_1$，而函数的改变量对应于綫段$\overline{PM_2}=\Delta y=y_2-y_1$，于是公式(4)可直接由考察三角形$M_1PM_2$推出。

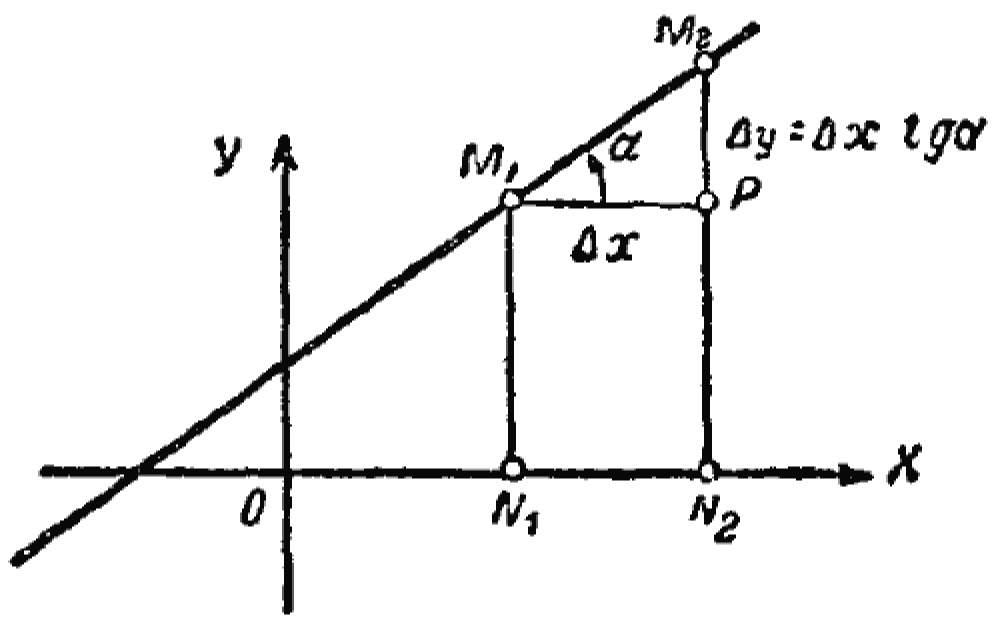


圖 8.

現在假設有一个函数具有上述性質，就是自变量的改变量与函数的改变量成正比，如公式(4)所示，由这公式推出：

$$y_2=a(x_2-x_1)+y_1 \quad 或 \quad y_2=ax_2+(y_1-ax_1)。$$

我們把变量的初値x_1与y_1算作定値，并把差(y_1-ax_1)記作b;

$$y_2=ax_2+b。$$

因为变量的終値x_2与y_2可以随意取，所以可以用x与y替代x_2与y_2，于是上面这方程就可以写成：

$$y=ax+b。$$

就是任一函数，若具有上述性質，改变量成正比，則一定是一个綫性函数$y=ax+b$，其中a是比例系数。

因此，在任一自然律中，如所考虑的量的改变量成正比，就可用綫

性函数，或者它的圖形——直綫——来表示；这是时常有的情形。

14．等速运动的圖形 等速运动圖形的最重要应用是对直綫及其系数給以力学的解釋。若点 P 沿某一路綫(軌道)运动，在軌道上取一定点，則点 P 的位置就由这定点到点 P 的距离完全决定。这个距离，也就是弧 AP，叫做經过的路程，記作 s，s 可以是正的或是負的，在原点 A 的一方 s 的値算正的。在另一方算負的。

取时間 t 作自变量，經过的路程 s 就是 t 的函数，作出运动的圖形，就是函数关系

$$s=f(t)$$

的圖形(圖 9)；不要把它与运动的軌道相混。

若在任一段时間，該点所走的路程与这区間之長成正比，或者說在从 t_1 到 t_2 这段时間，所走的路程与这区間之長的比値

$$\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

是个常量，則这运动叫做等速的，比値 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 叫做这运动的速率，記作 v。

由以上所述，等速运动圖形的方程有如：

$$s=vt+s_0,$$

这圖形是一条直綫，斜率等于运动的速率，s_0 是 s 的初値，就是 $t=0$ 时 s 的値。

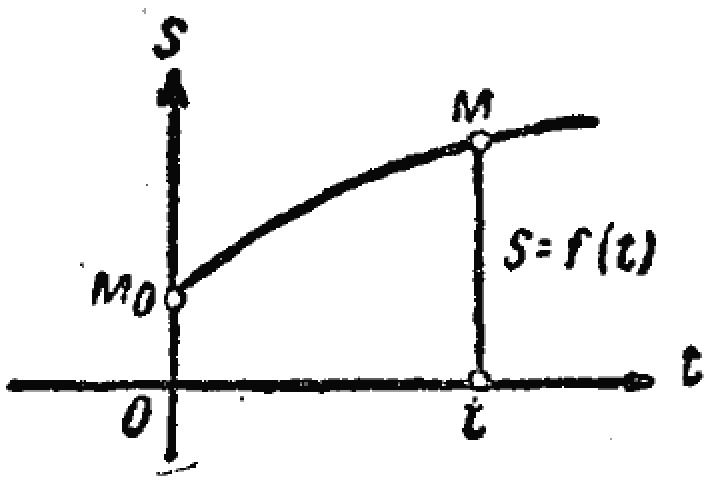


圖 9.

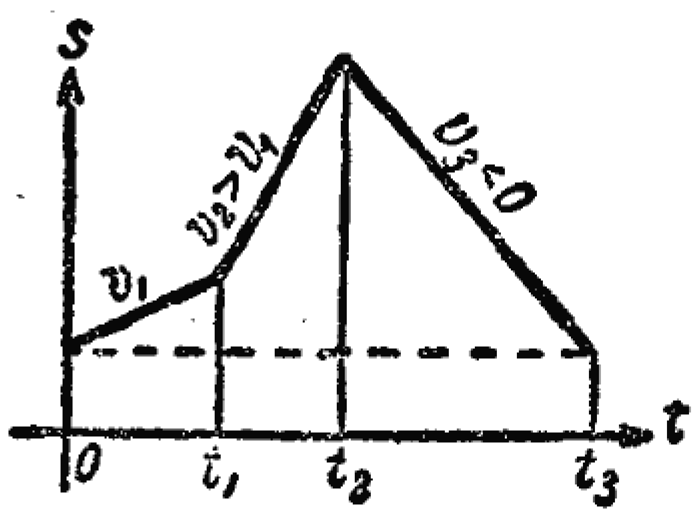


圖 10.

圖 10 表示一个点 P 的运动的圖形，从时刻 0 到时刻 t_1，它以常速率 v_1 沿正方向移动(与 t 軸成銳角)，从 t_1 到 t_2，以較大的常速率 v_2 沿正方向移动(較大銳角)，以后以負的常速率 v_3 (沿相反方向，鈍角)回到最初位置。有时必須研究在同一軌道上运动的許多点(例如作火車或电車的行駛时間表)，为要确定这些点相遇的情

形以及檢查全部运动，这种圖示法在实际应用上是很方便的(圖 11)。

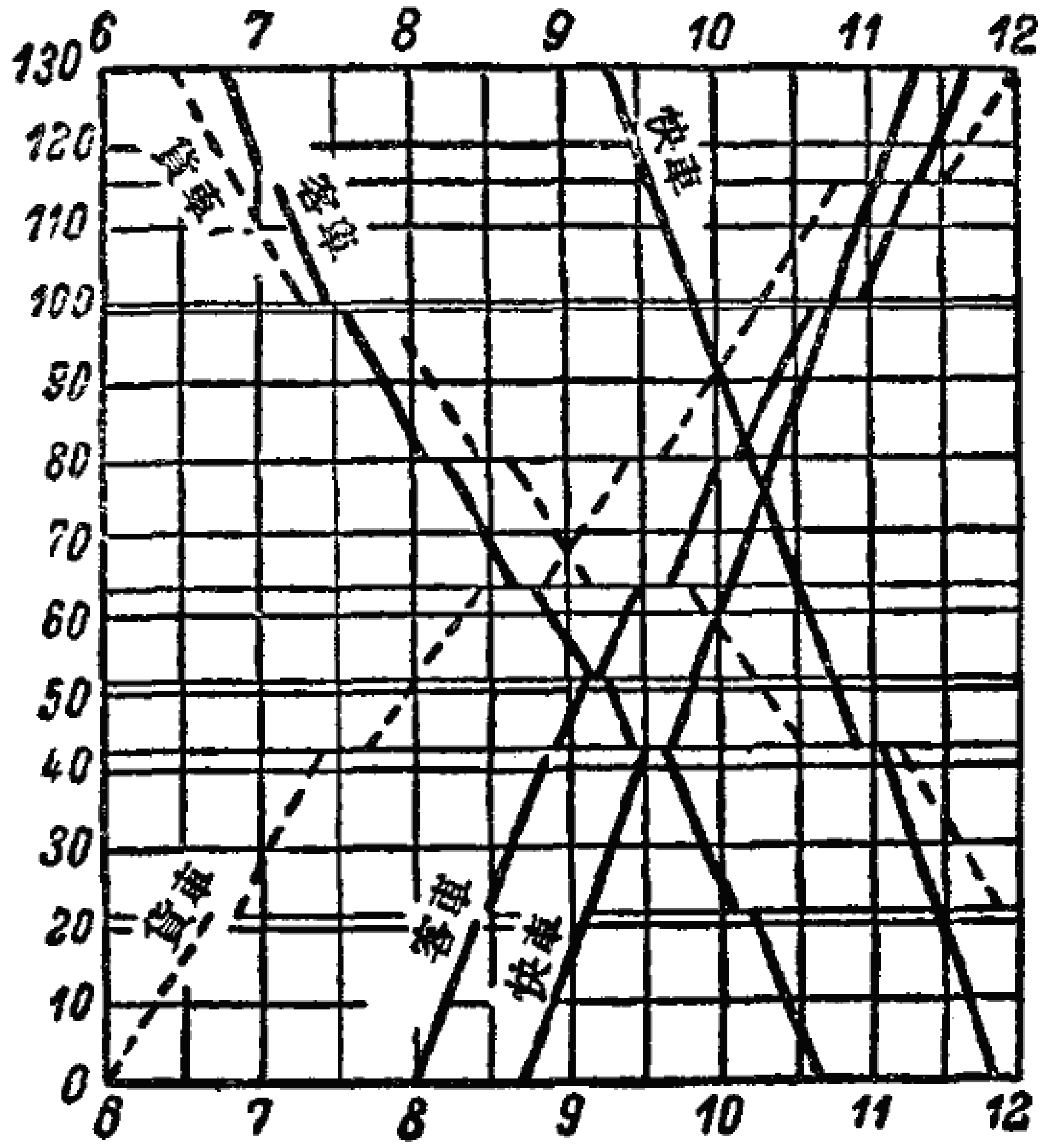


圖 11.

15. 經驗公式 由于直綫作起来簡單，并且它表达函数的改变量与自变量的改变量成正比的性質，作直綫的圖形成为找經驗公式的最方便的办法，所謂經驗公式，是沒有理論的研究时，由試驗直接得来的公式。

由試驗的記录表，在作圖紙上得到一列的点；若我們要得到所考察的函数关系的近似經驗公式是綫性函数的形式，就要作一条直綫。若沒有一条直綫經过全部作出的点(常是不可能的)，則只好做一条直綫，使在它两側的点的数目相等，并且都离它充分近。在誤差論及观測的处理中研究作这种直綫的較精确的方法。但是在实际工作中，对于不很精确的研究，作这經驗直綫都是用"紧繩"法，就是用一条繩子拉直了試着比。作好直綫，再直接量一量，就可以确定它的方程：

$$y=ax+b$$

就是未知的經驗公式。求这种公式时，时常对于 x 与 y 两个量用不同的尺度，就是 OX 与 OY 軸上同样的長度表示不同的数。在这样情形下，斜率 a 不等于直綫与 OX 軸交角的正切；而差一个因子，这个因子等于用以表示 x 与 y 两个量的單位長的比值。

例 (圖 12)

x	0.212	0.451	0.530	0.708	0.901	1.120	1.341	1.520	1.738	1.871
y	3.721	3.779	3.870	3.910	4.009	4.089	4.150	4.201	4.269	4.350

$$y \approx 0.375x + 3.65$$

(我們用符号≈記近似相等)。

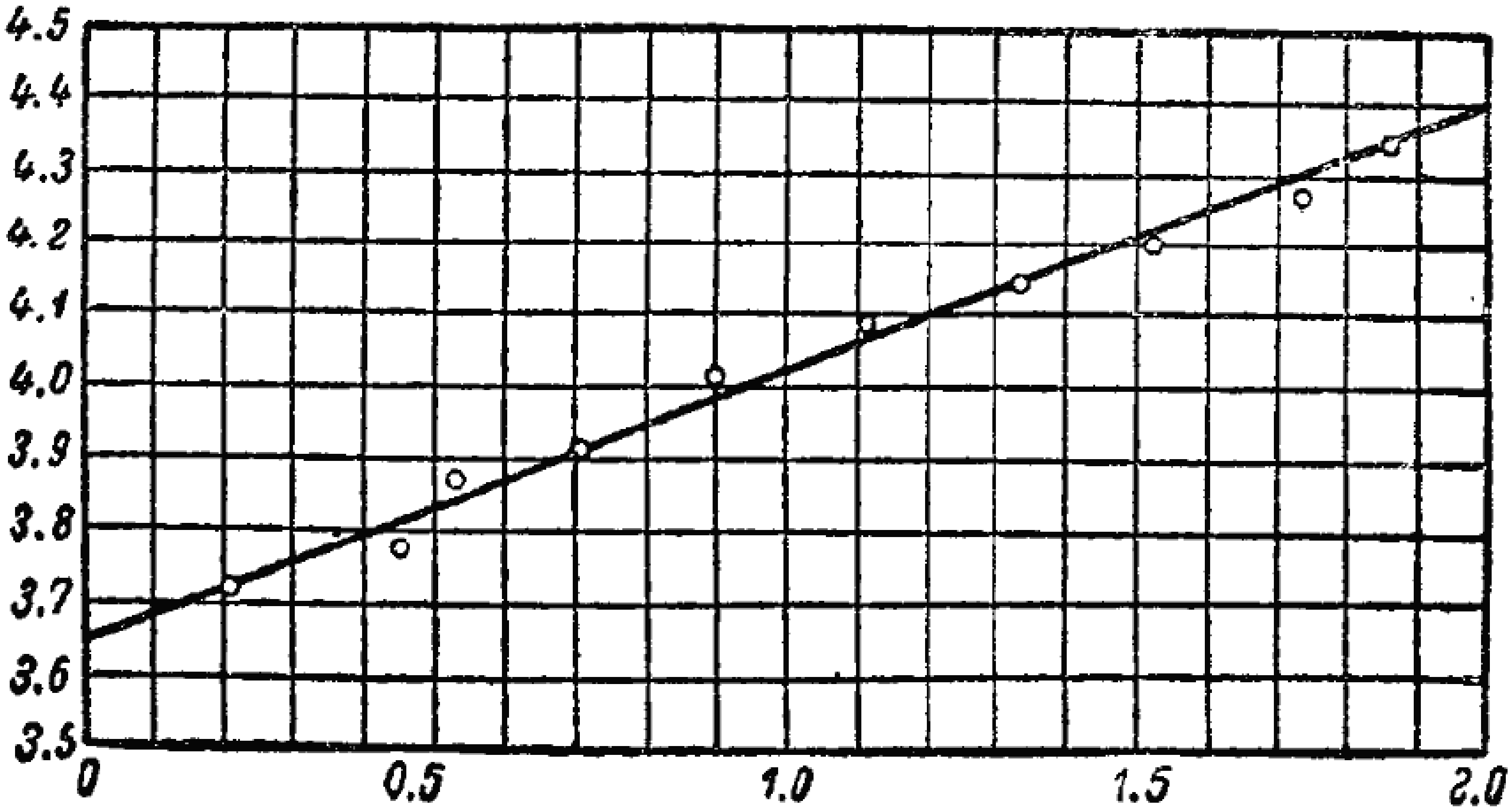


圖 12.

16. 二次抛物綫 綫性函数

$$y = ax + b$$

是 n 次整函数或 n 次多項式

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

的特殊情形，除了綫性函数它最簡單的情形就是二次三項式($n=2$)

$$y = ax^2 + bx + c,$$

这个函数的圖形叫做二次抛物綫或簡称抛物綫。

暫时我們只討論抛物綫的最簡單情形

$$y = ax^2。\tag{5}$$

用描迹法，不難作出这曲綫。圖 13 表示曲綫 $y=x^2(a=1)$ 与 $y=-x^2(a=-1)$。对应于方程(5)的曲綫，当 $a>0$ 时，整个在 OX 軸以上，当 $a<0$ 时，在 OX 軸以下，当 x 的絕对值增加时，这个曲綫的縱

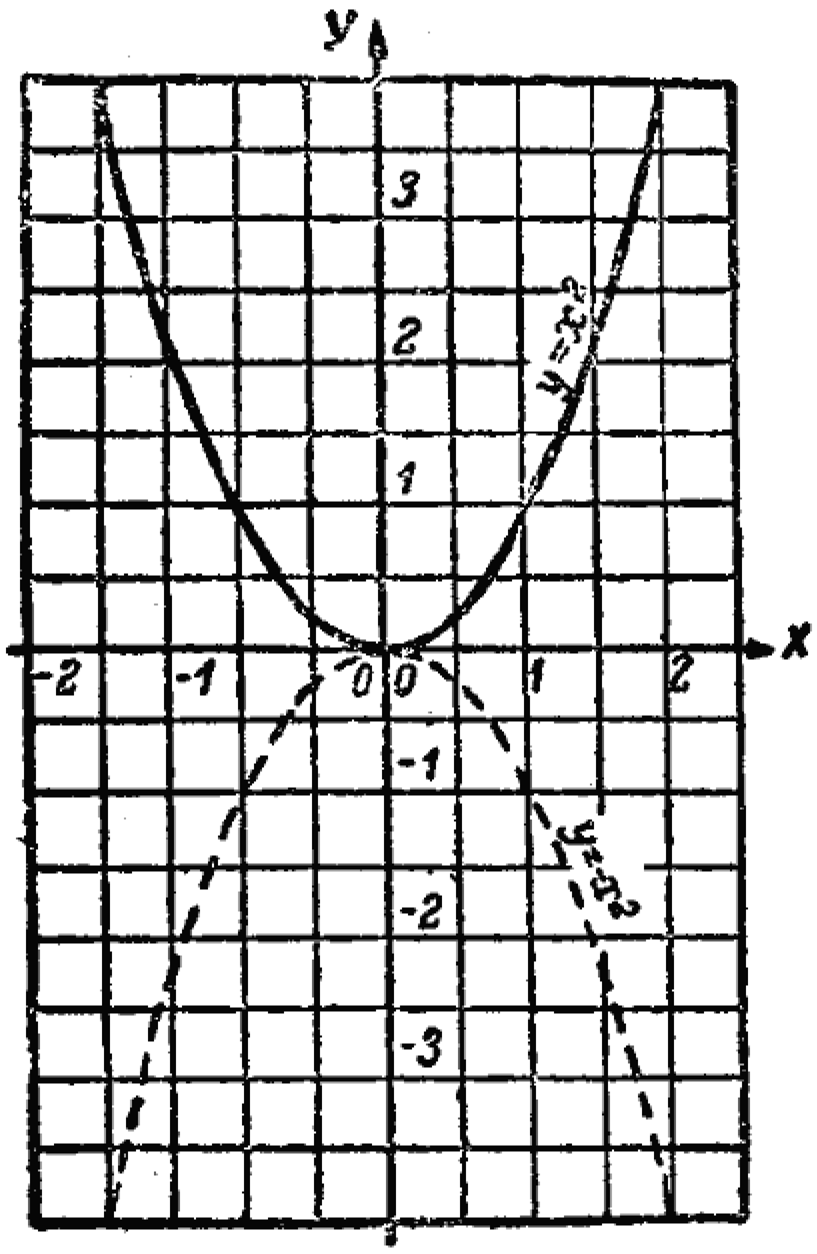


圖 13.

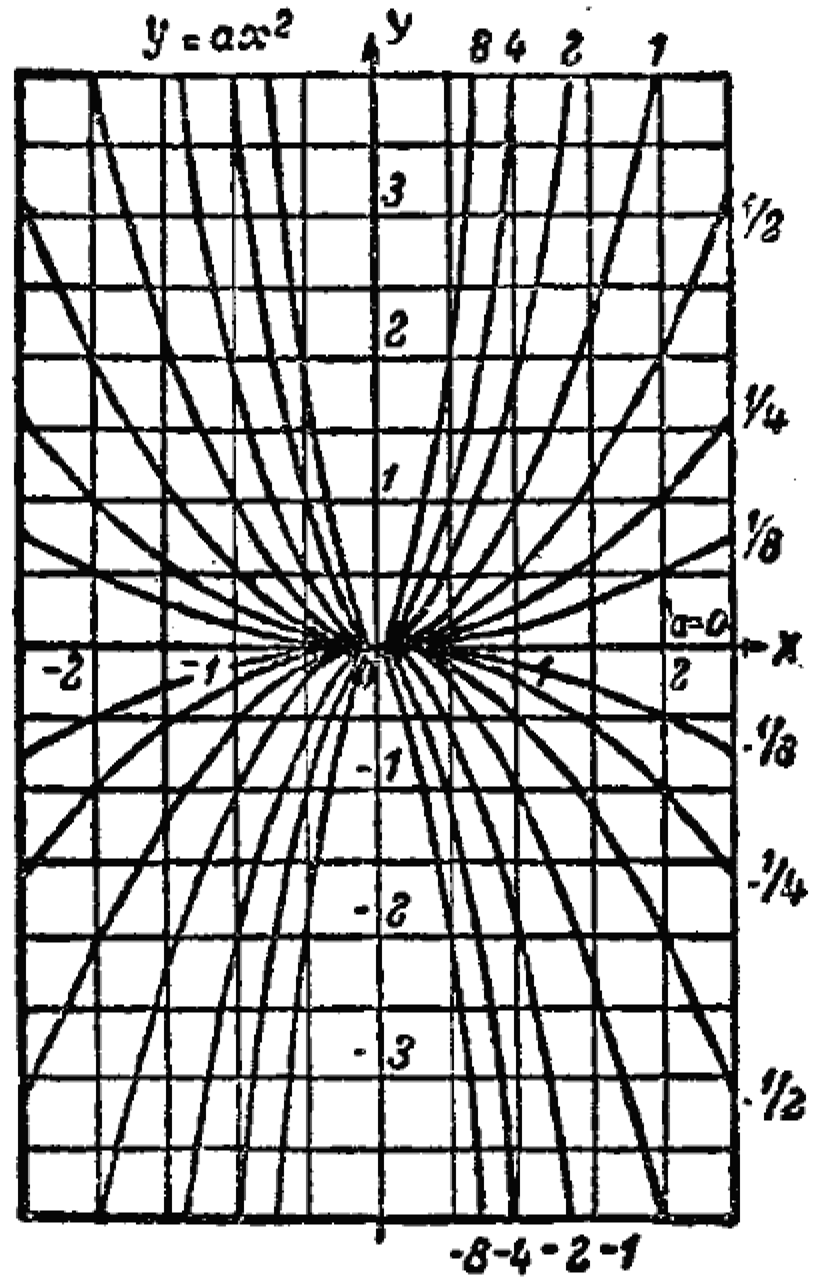


圖 14.

坐标的絕对值增加，并且当 a 的絕对值較大时，它增加得較快。圖 14 表示，a 取不同的值时，函数(5)的一串圖形，圖上标記着有每一个抛物綫对应的 a 的值。

方程(5)只有 x^2 項，所以，用 $(-x)$ 替代 (x) 时，它不改变。就是，若点 (x, y) 在抛物綫(5)上，則 $(-x, y)$ 也在这抛物綫上。显然，点 (x, y) 与 $(-x, y)$ 对 OY 軸是对称的，就是，对 OY 軸来講，它們中的一个是另一个的影像，如此，若把右半个平面，繞 OY 軸轉 180° 使它与左半平面叠合在一起，則 OY 軸右边的半个抛物綫，就与左边的半个重合。換句話說，OY 軸是抛物綫(5)的对称軸。

坐标的原点，当 $a>0$ 时，是这曲綫的最低点；当 $a<0$ 时，是最高点；它叫做抛物綫的頂点。

若給定抛物綫上一点 $M_0(x_0, y_0)$，不是頂点，則系数 a 就完全确定了。因为这时有

$$y_0=ax_0^2, \quad a=\frac{y_0}{x_0^2},$$

于是,抛物綫的方程(5)就成为

$$y=y_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^2。 \tag{6}$$

已知頂点,对称軸与頂点外任意一点,就有一个最簡單的作圖法,可以作出抛物綫上任意多(n)个点。

将已知点 $M_0(x_0, y_0)$ 的横坐标与縱坐标各分为 n 等份(圖 15),經过原点作綫束到縱坐标的各分点,这些綫束与过横坐标的分点而平行于 OY 軸的直綫的交点,就是抛物綫的点,实际上,由作圖我們有(圖 15)

$$x_1=x_0\cdot\frac{n-1}{n}, \; y'=y_0\cdot\frac{n-1}{n}, \; y_1=y'\cdot\frac{n-1}{n}=y_0\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=y_0\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2,$$

根据(6),点 $M_1(x_1, y_1)$ 也在抛物綫上。别的点可以类似的証明。

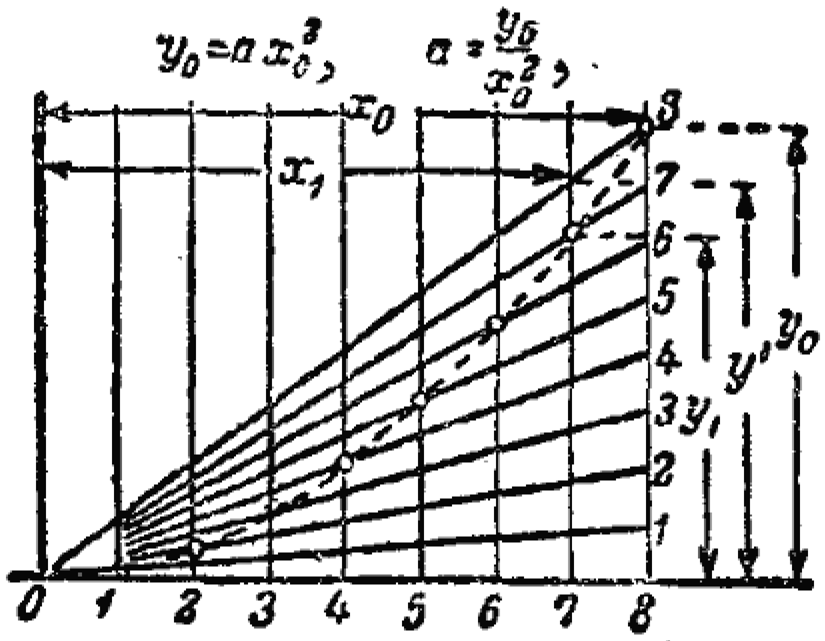


圖 15.

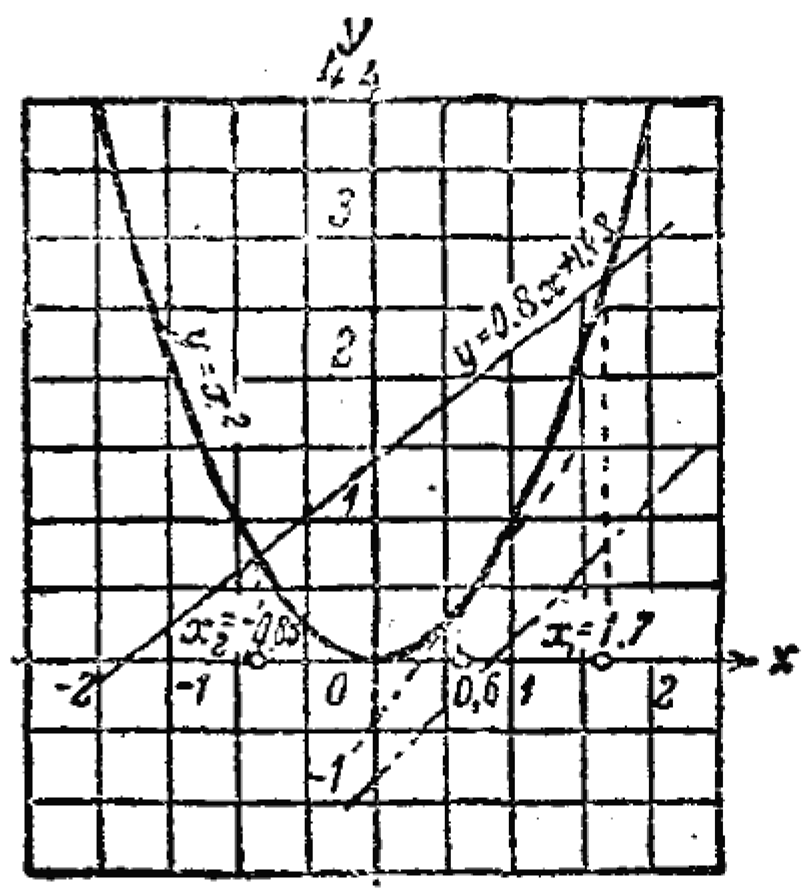


圖 16.

若已知两个函数

$$y=f_1(x) \quad 与 \quad y=f_2(x)$$

以及对应于它們的圖形,則圖形的交点的坐标滿足这两个方程,就是交点的横坐标是方程

$$f_1(x)=f_2(x)$$

的解。

上述情形，可用以求二次方程的近似解。在作圖紙上尽可能精确的作出抛物綫

$$y=x^2 \tag{6_1}$$

的圖，方程

$$x^2=px+q \tag{7}$$

的根就可以看作抛物綫 (6_1) 与直綫 $y=px+q$ 的交点的横坐标，于是在圖上找出交点就得到方程（7）的解。圖 16 表示三种情形，这种交点有时有两个，有时一个（直綫与抛物綫相切），有时沒有。

17. 三次抛物綫 三次多項式

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

的曲綫叫做三次抛物綫。我們考虑它的最簡單的情形

$$y=ax^3。\tag{8}$$

当 a 是正的时，x 与 y 同号；a 是負的，則异号。第一种情形的曲綫在第一与第三象限，第二种情形的曲綫在第二与第四象限。圖 17 表示 a 取不同値时，曲綫的形狀。

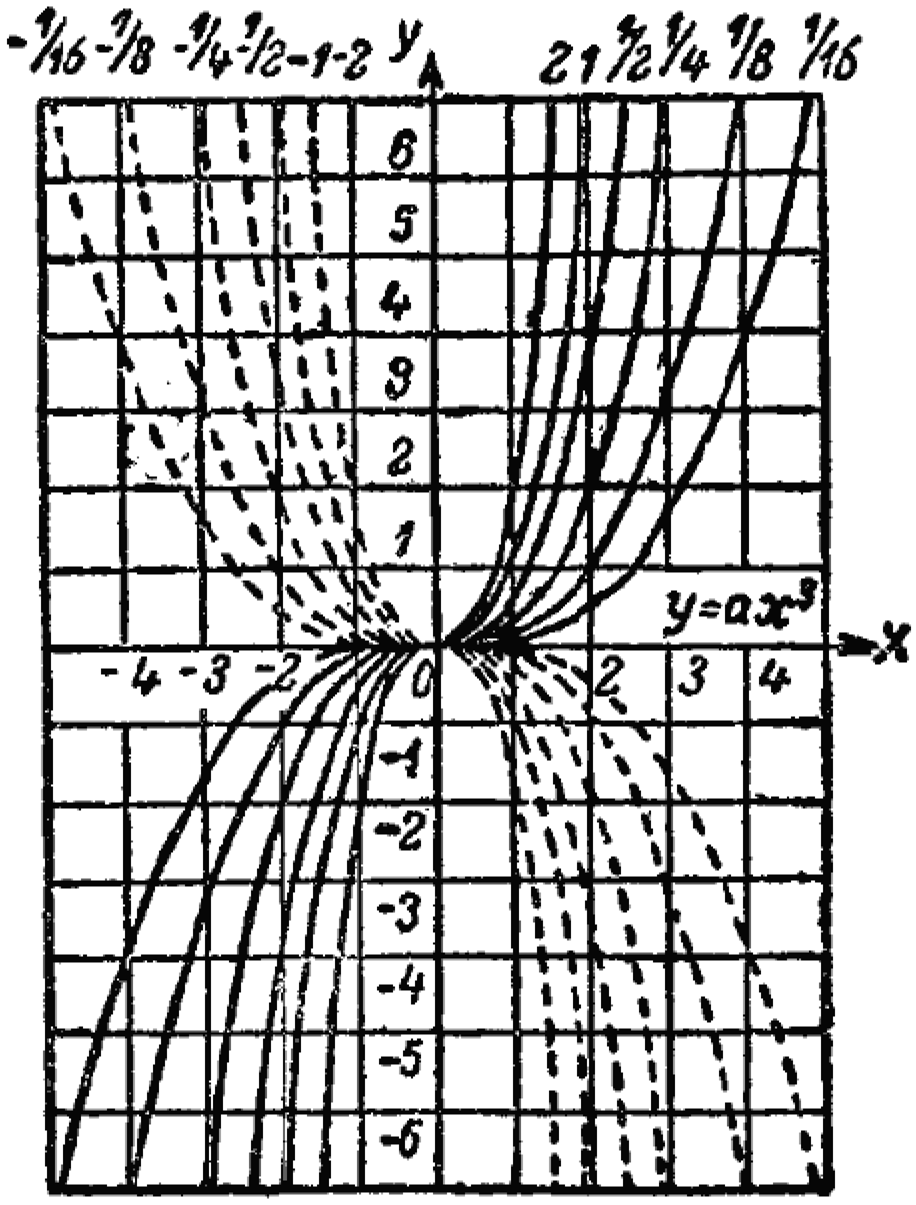


圖 17.

若以 $(-x)$ 与 $(-y)$ 同时替代 x 与 y，則方程（8）的两边都变号，方程在本質上沒有改变，就是，若点 (x, y) 在曲綫（8）上則点 $(-x, -y)$ 也在这曲綫上。显然 (x, y) 与 $(-x, -y)$ 两个点对原点对称，就是連接它們的綫段被原点平分。由此推知，曲綫（8）的任意一个过原点的弦，必被原点平分。換句話說：坐标原点 O 是曲綫（8）的中心。

再提出三次抛物綫的另一种特殊情形

$$y=ax^3+cx。\tag{9}$$

这方程的右边是两項之和，于是，为要作这个曲綫，只須作出直綫

$$y=cx,\tag{10}$$

再直接由圖上求曲綫(8)与(10)的对应的縱坐标之和。圖 18 表示曲綫(9)的各种形状($a=1$, c 取不同的值)。

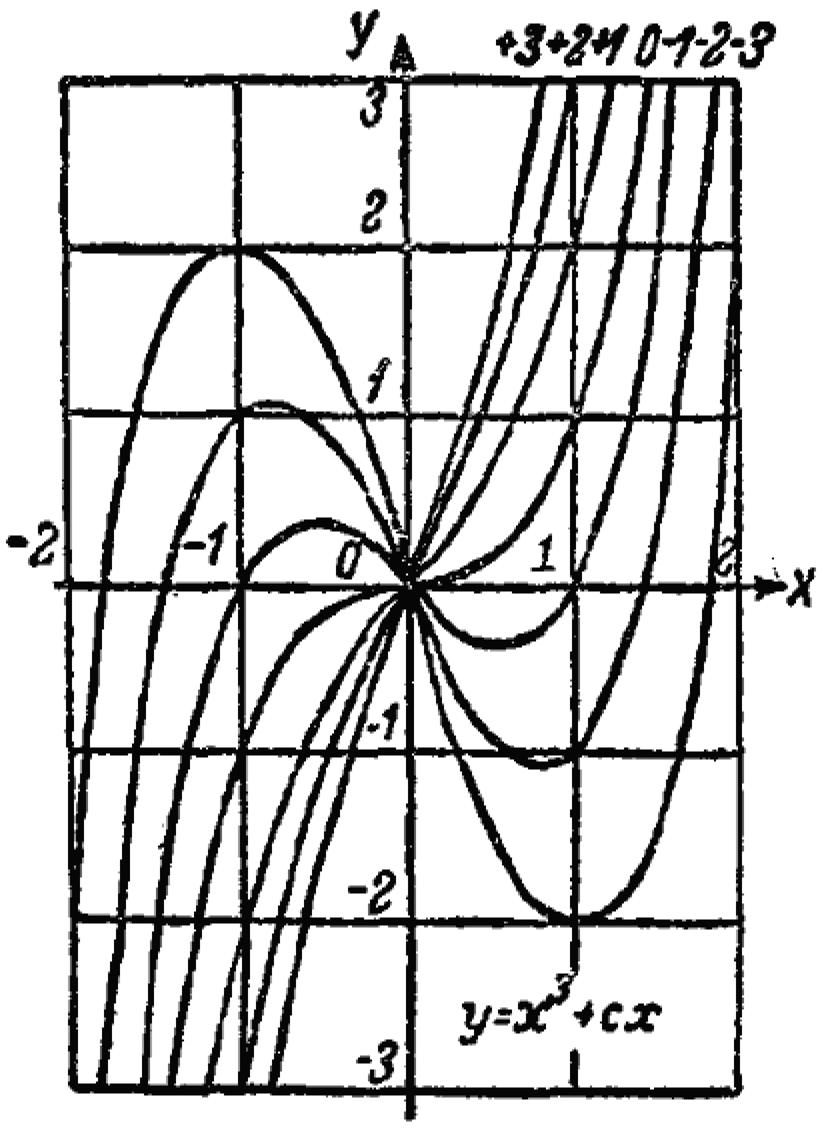


圖 18.

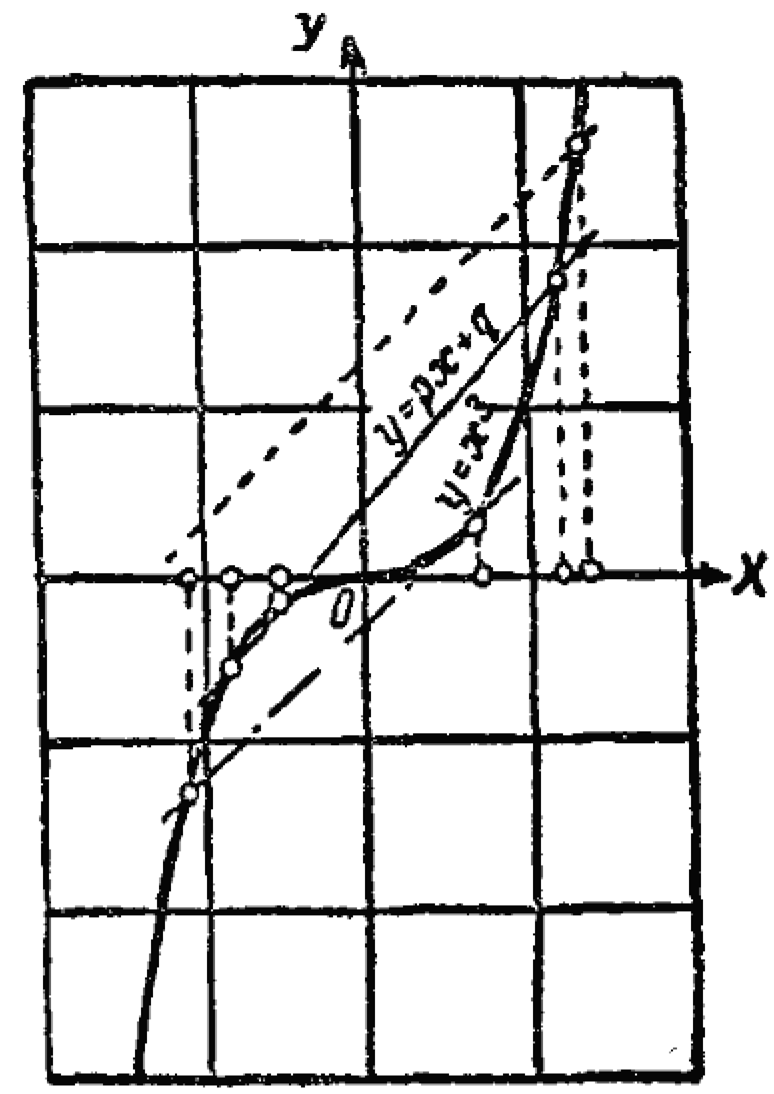


圖 19.

作出曲綫

$$y=x^3,$$

就得到由圖形解三次方程

$$x^3=px+q$$

的方法(不太精确)，因为这个方程的根就是曲綫 $y=x^3$ 与直綫

$$y=px+q$$

的交点的横坐标。

圖上指示出(圖 19)，这种交点可能有一个，两个或是三个，但至少有一个，就是三次方程至少有一个实根。严格的証明，以后再講。

18. 反比定律 函数关系

$$y=\frac{m}{x}, \tag{11}$$

表达变量 x 与 y 之間的反比定律。当 x 增多几倍时，y 就減少几倍。$m>0$ 时，变量 x 与 y 同号，就是圖形在第一与第三象限；$m<0$ 时，在第二与第四象限。x 近于零时，分式 $\frac{m}{x}$ 的絕对值就很大。反之，x 的絕对值愈大时分式 $\frac{m}{x}$ 的絕对值愈小。

直接用描迹法作这曲綫，如圖 20，它表示出 m 取不同的值时，(11) 的曲綫，实綫对应于 $m>0$ 的情形，虛綫对应于 $m<0$ 的情形；并标記有每条曲綫对应的 m 的值。这种曲綫叫做等軸双曲綫，每一条这样的曲綫都有无穷支綫，当支綫上的点的横坐标 x 或縱坐标 y，无限增加时，它逼近于坐标軸 OX 与 OY，这样的直綫叫做这双曲綫的漸近綫。

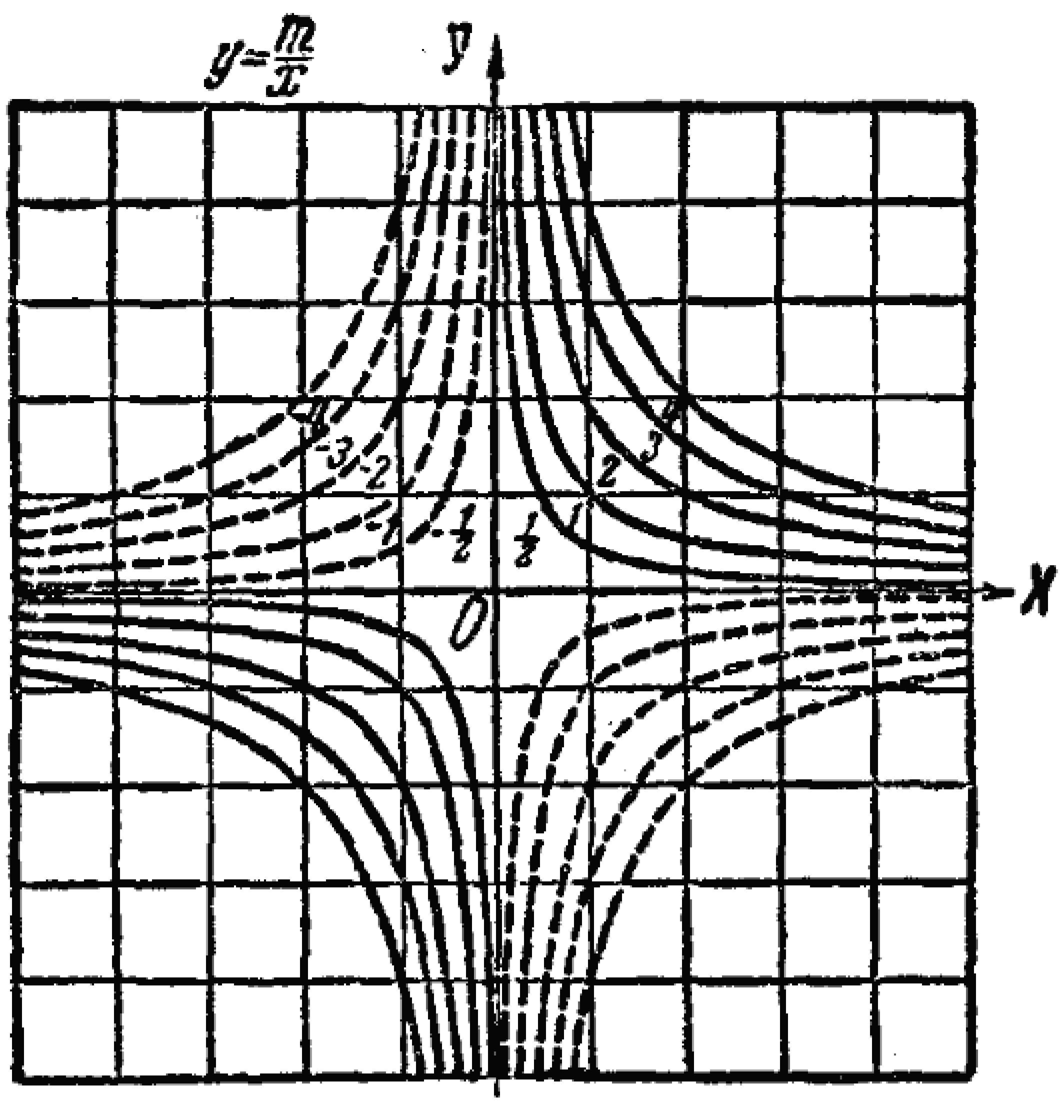


圖 20.

若給定曲綫上任意一点 $M_0(x_0, y_0)$，方程 (11) 中的系数 m 就完全确定了，因为这时

$$x_0y_0=m,$$

方程 (11) 就可以写成

$$xy=x_0y_0, \tag{12}$$

或

$$\frac{y}{x_0}=\frac{y_0}{x}。$$

如此，若已知一等軸双曲綫的漸近綫与它的任意一点 $M_0(x_0, y_0)$，就有作圖的方法，可以作出这曲綫上任意多个点。取漸近綫作坐标軸，由坐标原点任意作綫束

OP_1, OP_2, … 注意这些綫与直綫

$$y=y_0 \quad x=x_0$$

的交点。过綫束中每一条直綫上的两个交点，各作平行于坐标軸的直綫，这些直綫的交点，就是双曲綫上的点(圖 21)。这是由于三角形 ORQ_1 与 OSP_1 相似：

$$\frac{\overline{SP_1}}{\overline{OS}}=\frac{\overline{OR}}{\overline{RQ_1}},$$

或
$$\frac{y_1}{x_0}=\frac{y_0}{x_1}。$$

就是点 $M_1(x_1, y_1)$ 在曲綫(12)上。

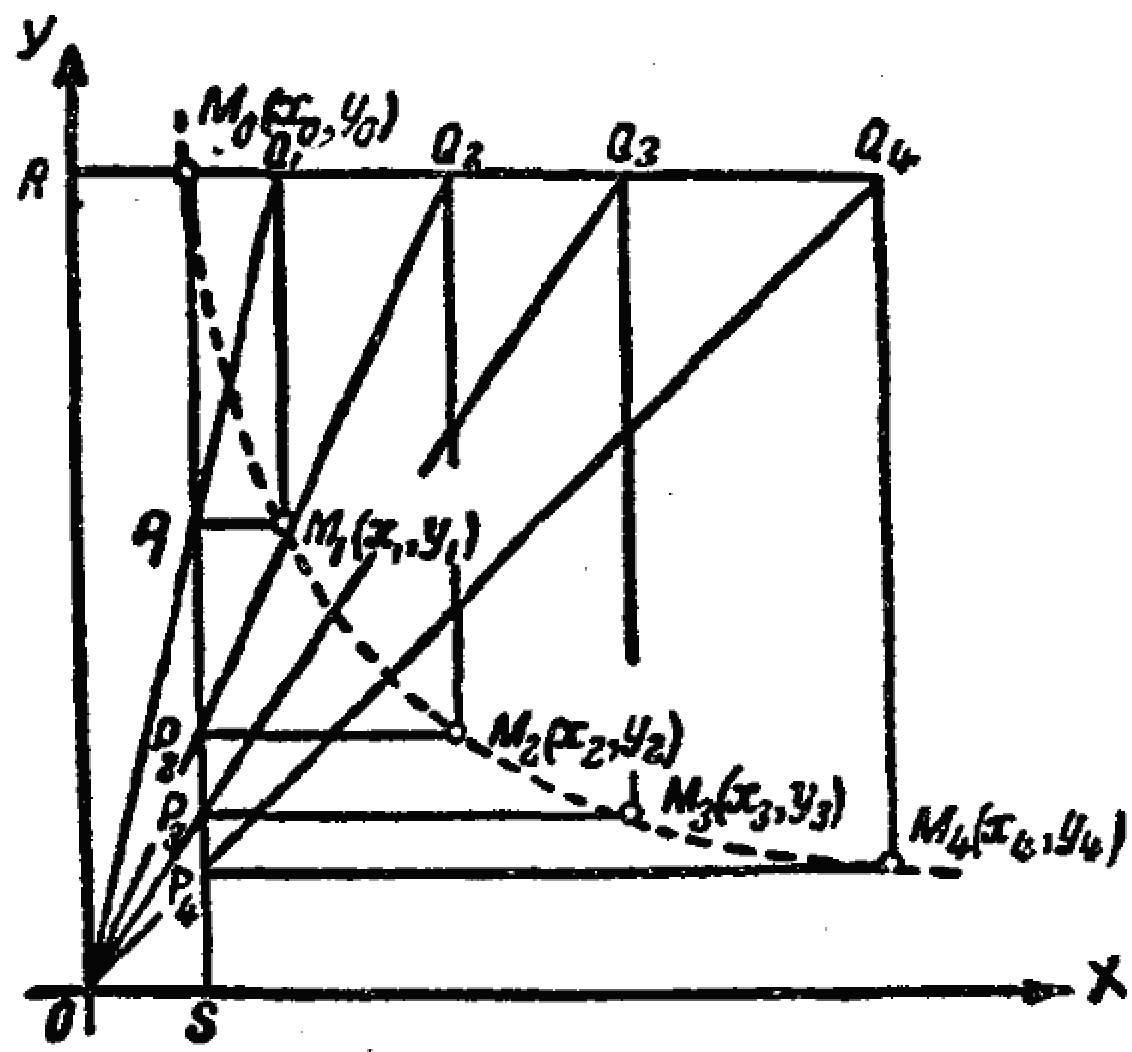


圖 21.

19. 幂函数 以上討論的函数 $y=ax$; $y=ax^2$; $y=ax^3$ 与 $y=\frac{m}{x}$ 都是下面形状的函数

$$y=ax^n \tag{13}$$

的特殊情形，其中 a 与 n 是任何常数。通常函数(13)叫做幂函数。我們只限于作出 $a=1$, x 只取正値的圖形，圖 22 与 23 表示对应于不同的 n 值的圖形。对一切 n 值，由方程 $y=x^n$，当 $x=1$ 时，$y=1$; 就是所有的曲綫都經过点(1, 1)。当 n 取正値而 $x>1$ 时，n 愈大曲綫上升得

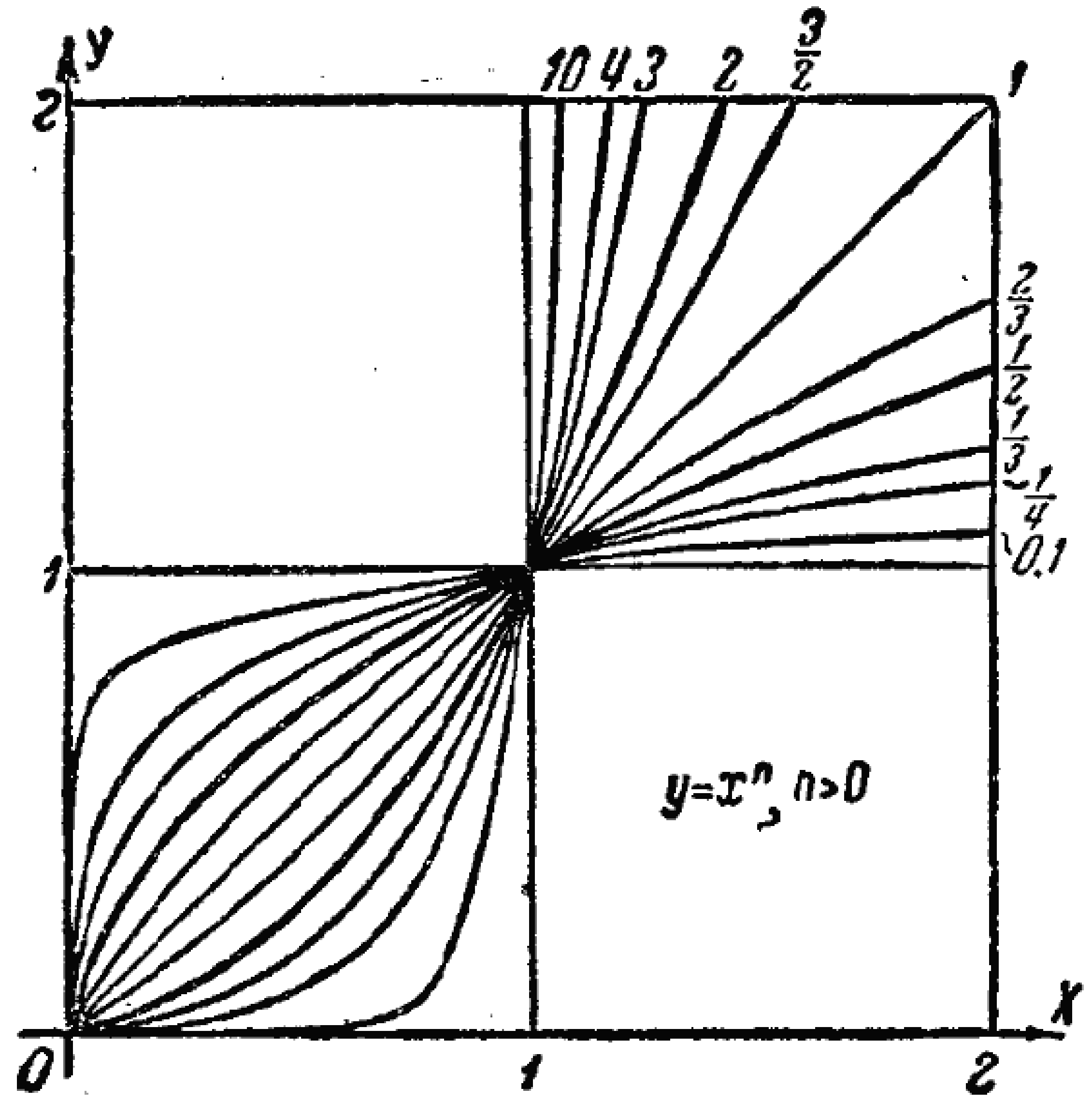


圖 22.

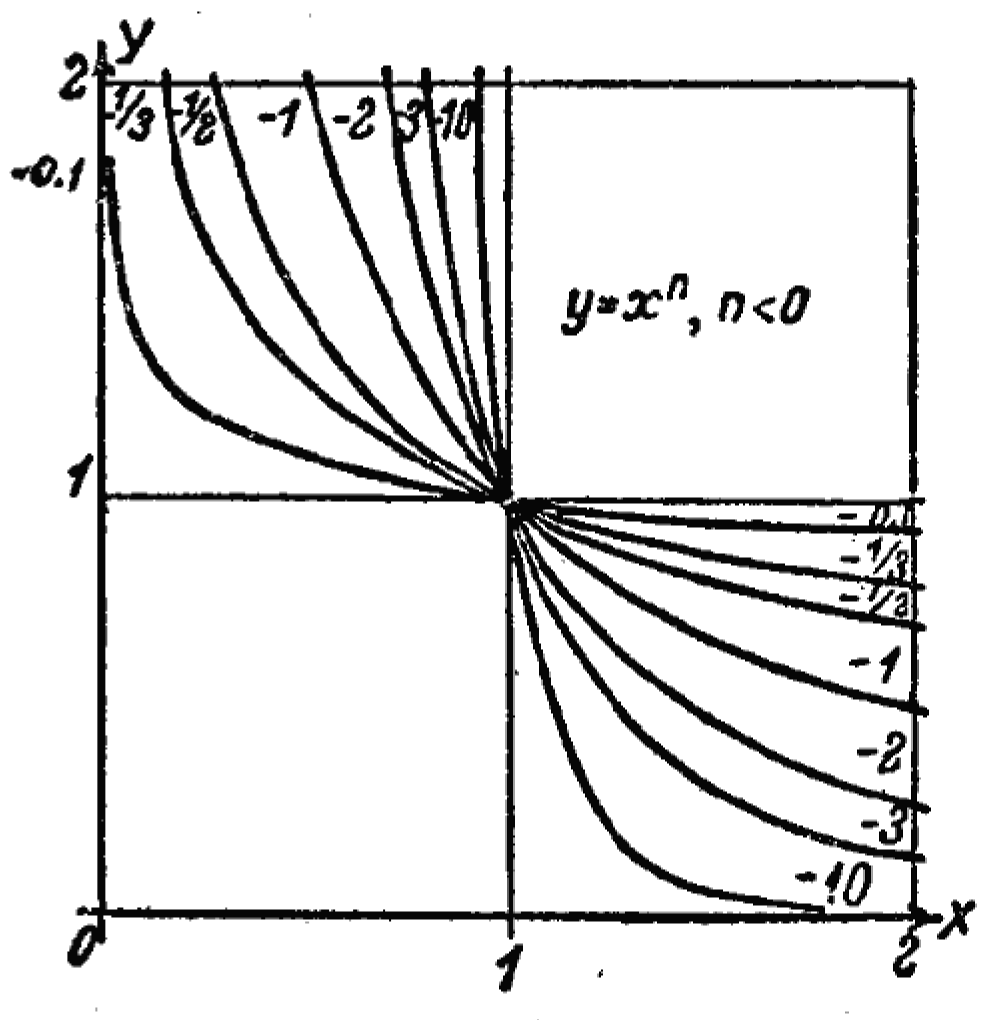


圖 23.

愈快(圖 22)。当 n 取負值时(圖 23),函数 $y=x^n$ 相当于分式。例如,可以用 $y=\frac{1}{x^2}$ 替代 $y=x^{-2}$。在这种情形下,当 x 增加时,相反的、y 要减小。对应于方程(13)的曲綫有时叫做多带綫。热力学中常遇到它

們。

注意，n 取分数时，我們把根号的値算作正的，例如，$x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 算正的。

若已知曲綫上两个点 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$，則由

$$y_1=ax_1^n, \quad y_2=ax_2^n \tag{14}$$

可以确定方程(13)的两个常数 a 与 n，用(14)中的一个除另一个，消去 a：

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1^n}{x_2^n}$$

然后，取对数，就由公式：

$$n=\frac{\log y_1-\log y_2}{\log x_1-\log x_2}$$

确定出 n；求出 n 后，由(14)中任何一个可以得到 a。

圖24表示由曲綫(13)上两个已知点 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$，作出曲綫上任意多个点的作圖法。过 O 点任意作两条直綫 OS, OT 各与 OX 軸及 OY 軸作成角 α 及 β；由已知点 M_1 与 M_2 画坐标軸的垂綫，与 OS, OT 交于 S_1, S_2; T_1, T_2；与坐标軸交于 Q_1, Q_2; R_1, R_2。过 R_2 作 R_2T_3 平行于 R_1T_2，过 S_2 作 S_2Q_3 平行于 S_1Q_2。再过 T_3 与 Q_3 作直綫各平行于 OX 与 OY 軸，得到的交点 $M_3(x_3, y_3)$ 在这曲綫上。实际上，由相似三角形求得：

$$\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}}=\frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}};\quad \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}}=\frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}}，就是\ \frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}}=\frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}}\ 或\ \frac{x_3}{x_2}=\frac{x_2}{x_1},$$

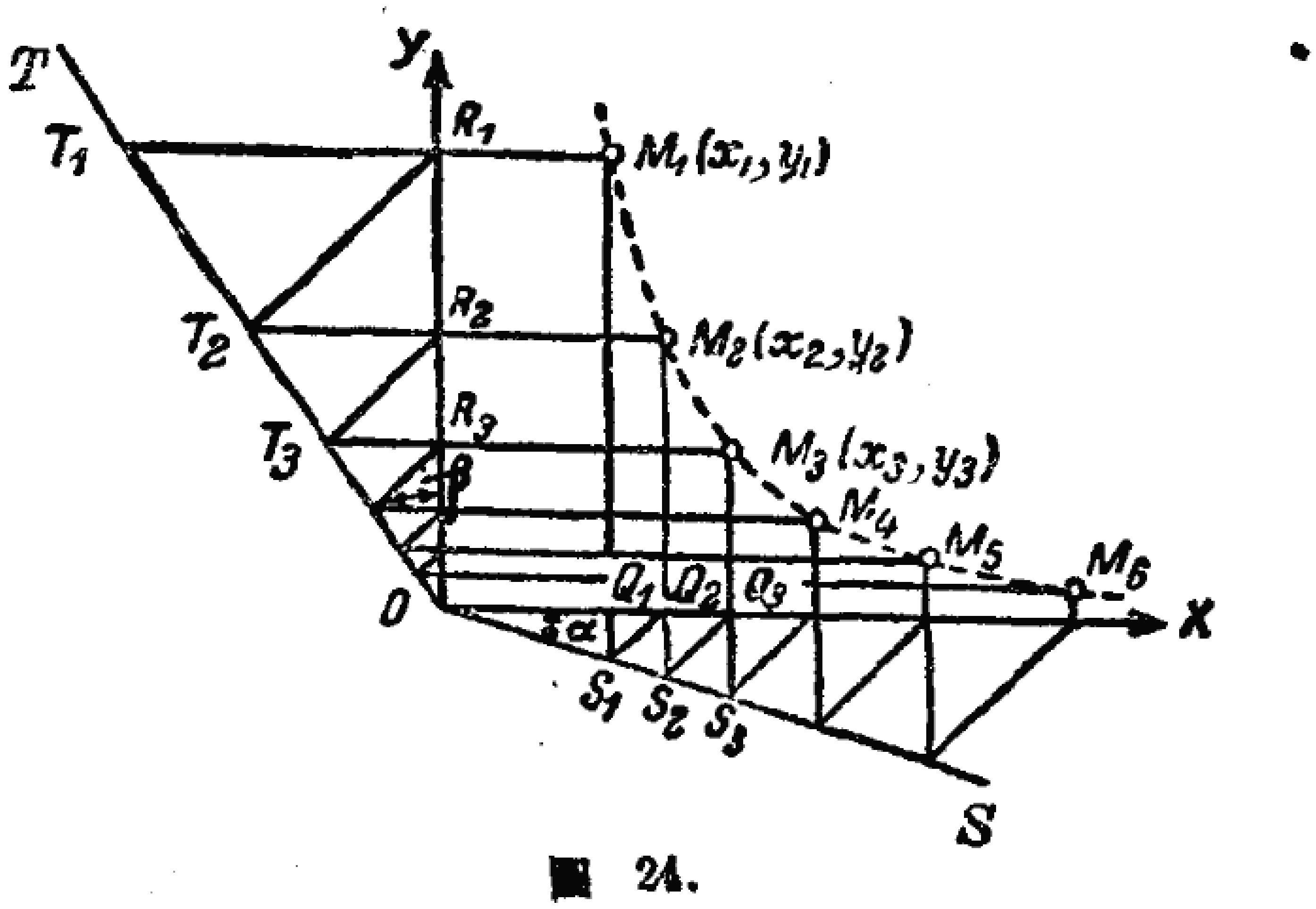


圖 24.

由此 $$x_3=\frac{x_2^2}{x_1},$$

同理可証 $$y_3=\frac{y_2^2}{y_1}。$$

由(14)求得:

$$y_3=\frac{(ax_2^n)^2}{ax_1^n}=a\left(\frac{x_2^2}{x_1}\right)^n=ax_3^n,$$

就是点(x_3, y_3)在曲綫(13)上,于是得証。

20. 反函数 为了研究更多的初等函数,現在来介紹一个新的概念,就是反函数的概念。如以前[5]中所述,研究变量x与y之間的函数关系时,自变量可自由选定,只要看怎么样方便。設有一个函数$y=$ $=f(x)$,其中x用作自变量。

若将y考慮作自变量,x作函数,由这个关系$y=f(x)$确定的函数

$$x=\varphi(y)$$

叫做已知函数$f(x)$的反函数,而$f(x)$常叫做直接函数。

变量的記号并不是定死的,如果我們对上面两个函数都用x記自变量,就可以說$\varphi(x)$是函数$f(x)$的反函数。例如,若直接函数是

$$y=ax+b,\quad y=x^n;$$

則反函数就是

$$y=\frac{x-b}{a},\quad y=\sqrt[n]{x}。$$

由直接函数的方程求反函数,叫做反演法。

設已有直接函数$y=f(x)$的圖形。不难看出,这个圖形也就是反函数$x=\varphi(y)$的圖形。实际上,方程$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$所給出的x与y之間的关系是一样的。在直接函数中,任意給定x,在OX軸上由原点O起取对应于这个数x的綫段,由这綫段的終点作OX軸的垂綫直到与圖形相交,这一段垂綫的長度,連同它应有的符号,就是对应于所給x值的y值。对于反函数$x=\varphi(y)$,我們就要在OY軸上由原点O起取給定的y的值,过这綫段的終点作OY軸的垂綫直到与圖形

相交，这一段垂綫的長度，連同应有的符号，給出对应于所給 y 值的 x 值。

在第一种情形下，自变量 x 取在 OX 軸上；而在第二种情形下，自变量 y 取在 OY 軸上；这是很不方便的。換句話說，当由直接函数 $y=f(x)$ 改換到反函数 $x=\varphi(y)$ 时，我們可以用同一个圖形，但是要記住，当改換时，表示自变量值的軸与表示函数值的軸，就互換了。

为避免这种不方便，当改換时，我們反轉整个平面使 OX 与 OY 軸互換位置。为此，显然，只須将作圖平面，連同圖形繞第一象限的平分綫轉 180°。这样轉好以后，两軸就互換位置，而反函数 $x=\varphi(y)$ 就要写成通常的形式：$y=$ $=\varphi(x)$。所以，若已知直接函数 $y=f(x)$ 的圖形，則为要得到反函数 $y=\varphi(x)$ 的圖形，只須把圖形的平面繞第一象限的平分綫轉 180° 就成了。

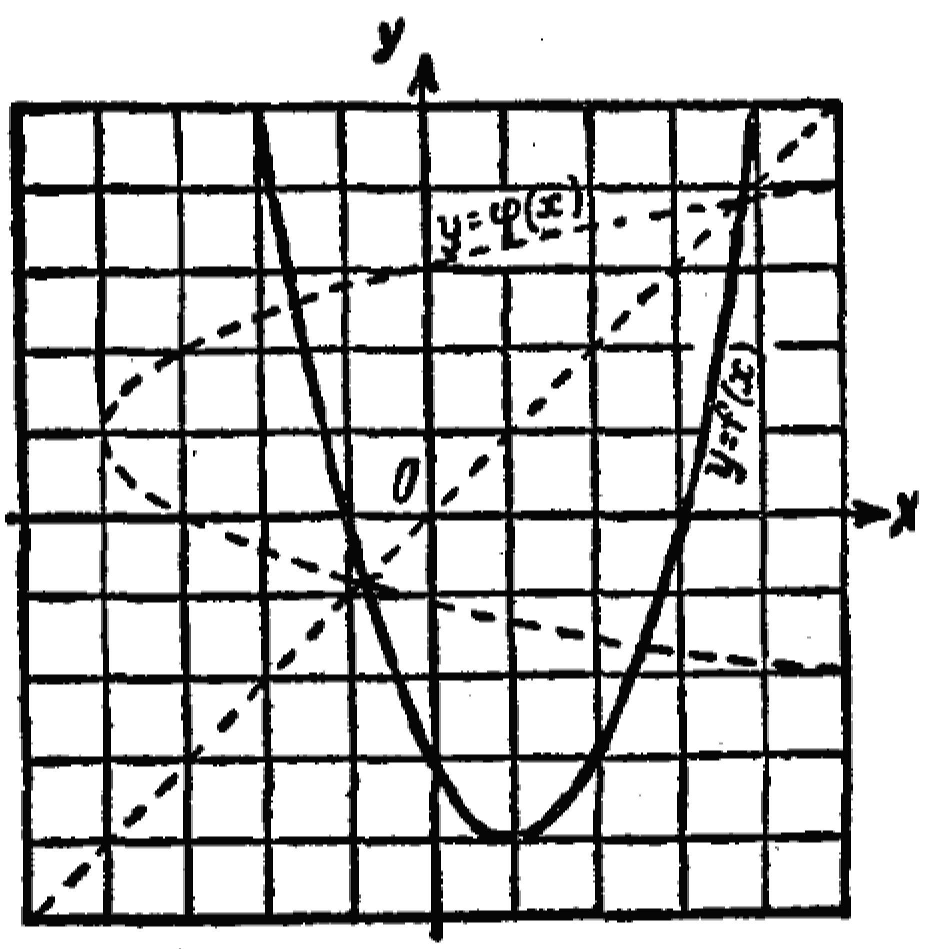


圖 25.

圖 25 上，实綫表示直接函数的圖形，虛綫表示反函数的圖形。第一象限的平分綫也用虛綫表示，整个作圖平面繞着它轉，就由实綫圖形得到虛綫圖形。

21. 函数的多值性 以上我們考虑过的初等函数的圖形，有个共同的特点，就是垂直于 OX 軸的直綫与圖形的交点，經常总是有一个，但不多于一个。意思是說这些圖形所确定的函数 y 是这样的：当給定 x 的一个值时，就有 y 的一个确定的值与之对应。或者說它是單值函数。

若垂直于 OX 軸的直綫与圖形交于几个点。就是說，对 x 的一个給定值，有几个縱坐标，也就是 y 的几个值与之对应。这样的函数叫做

多值的。以前我們已經提到过多值函数[5]。

若直接函数 $y=f(x)$ 是單值的，其反函数 $y=\varphi(x)$ 可能是多值的。例如，由圖 25 可以看出这种情形。

再仔細看一个簡單的情形。圖 13 上实綫表示函数 $y=x^2$ 的圖形。若繞第一象限的平分綫轉 180°，則得到反函数 $y=\sqrt{x}$ 的圖形(圖 26)。

仔細考虑它。当 x 取負值时(在 OY 軸左方)，所有垂直于 OX 軸的直綫与圖形不相交。就是，当 $x<0$ 时，函数 $y=\sqrt{x}$ 无意义。这相当于，負数的二次根沒有实数值。反之，当 x 取任一正値时，垂直于 OX 軸的直綫与圖形交于两点，就是，給定 x 一个正値时，圖形上就有两个縱坐标——$\overline{MN}$ 与 $\overline{MN_1}$。第一个縱坐标給出 y 的一个正値，第二个縱坐标是有同样絕对值的負值。这相当于，一个正数的二次根有两个值，絕对值相等，而符号相反。由圖也可以看出，当 $x=0$ 时，我們只有一个值 $y=0$。所以，当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $y=\sqrt{x}$ 确定。当 $x>0$ 时，有两个值；而 $x=0$ 时，有一个值。

只取圖 26 上圖形的一部分，我們可以把函数 $y=\sqrt{x}$ 作为單的的。例如，只取第一象限內的圖形(圖 27)。这对应于只考虑二次根值

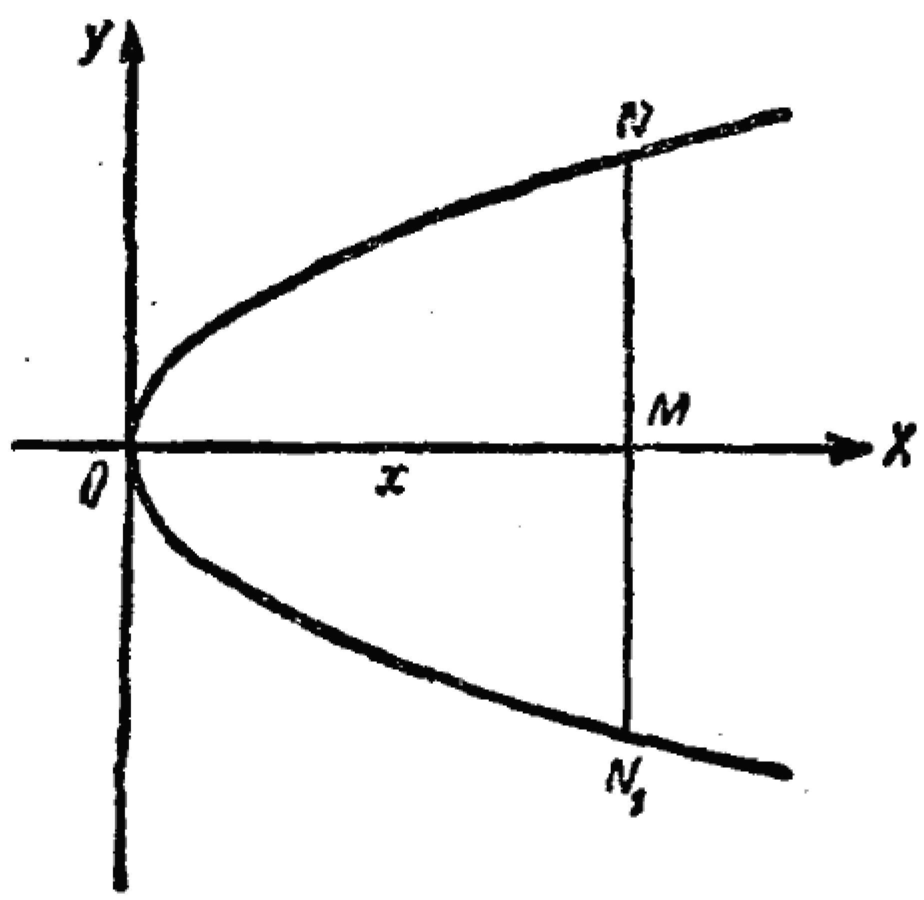


圖 26.

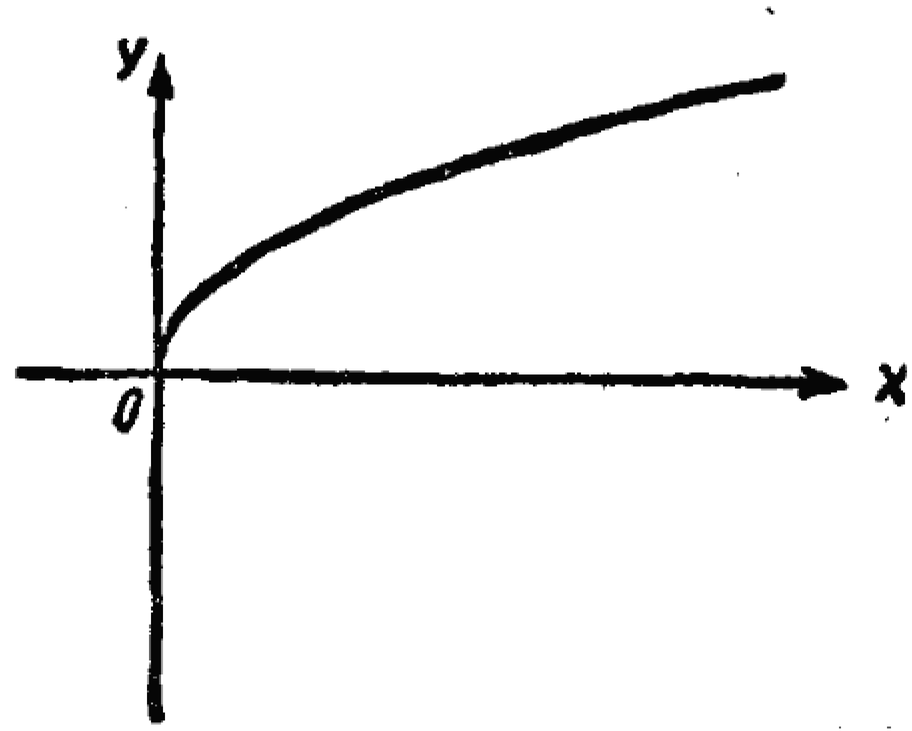


圖 27.

正值。圖 27 上所表示的函数 $y=\sqrt{x}$ 的圖形的一部分是由直接函数 $y=x^2$ 的圖形(圖 13)在 OY 軸右方的一部分得到的。函数

$$y=\sqrt{x} \quad 或 \quad y=x^{\frac{1}{2}}$$

的圖形在第一象限的一部分,我們已經在圖 22 上表示过。

現在談从單值直接函数,經反演法,仍得到單值反函数的情形,我們介紹一个新的概念。

若当自变量 x 增加时,对应的函数 $y=f(x)$ 的值也增加;就是若由 $x_2>x_1$ 可推知 $f(x_2)>f(x_1)$;則这函数叫做增函数。

由于我們所用的 OX 与 OY 軸的安置,x 增加对应于沿 OX 軸向右移,y 增加对应于沿 OY 軸向上移。增函数的圖形的特性就是:当沿这曲綫向 x 增加的方向(向右)移动时,同时也向 y 增加的方向(向上)移动。

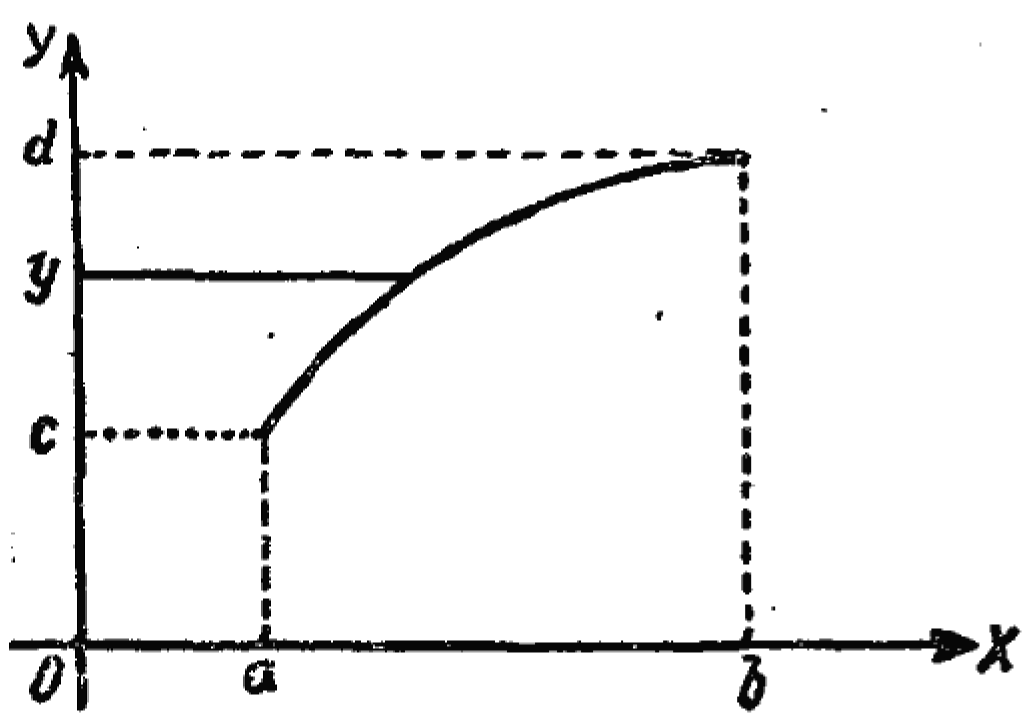


圖 28.

考虑任意一个确定于区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的單值增函数的圖形(圖 28)。設 $f(a)=c$, $f(b)=d$, 根据函数的增加性,显然 $c<d$。在区間 $c\leqslant\leqslant y\leqslant d$ 上,任取一个 y 的值,并过它所对应的点作 OY 軸的垂綫,則这垂綫与圖形相交,而且只有一个交点,就是在区間 $c\leqslant y\leqslant d$ 上,任意一个 y 回到 x 一个确定的值。或者說增函数的反函数是單值的。

由圖也不难看出,这函数的反函数是增函数。

类似的,若当自变量 x 增加时,对应的函数 $y=f(x)$ 的值减小,就是若由 $x_2>x_1$ 可推知 $f(x_2)<f(x_1)$;則这函数叫做减函数。

像上面一样,可以肯定,减函数的反函数是單值减函数。还要注意很重要的一点。在上面全部論証中,我們总假定函数的圖形,是一条不

間断的連續曲綫。这件事相当于函数 $f(x)$ 有特殊的分析的性質，函数的連續性。函数的連續性的严格的数学定义与对連續函数的研究在第二章再講。这一章中只要求对基本概念的初步認識，至于有系統的研究，以后各章再講。

以后，当我們談到函数时，除非特别解释，都是对單值函数講的。

22. 指数函数与对数函数 現在再来討論初等函数。方程

$$y=a^x \tag{15}$$

确定一个指数函数，在这里我們把底 a 算作一个給定的正数(不是1)。x 取正整数时，值 a^x 是显然的。x 取正分数值时，表达式 a^x 相当于根式 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$，若 q 是偶数，我們約定取根式的正值。当 x 取无理数时，現在不仔細考慮 a^x 的值，我們只指出这样一点：当 x 取无理数值时，如以前所述[2]，可以用它的近似值替代这无理数。如此替代，我們就得到 a^x 的相当准确的近似值。

例如，我們知道

$$\sqrt{2}=1.414213\cdots,$$

于是 $a^{\sqrt{2}}$ 的近似值就有

$$a^1=a;\ a^{1.4}=\sqrt[10]{a^{14}};\ a^{1.41}=\sqrt[100]{a^{141}};\ \cdots。$$

对于負的指数，我們有定义 $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$；于是当 x 取負值时，a^x 的計算，可以由 x 取正值时 a^x 的計算得来。由以上所述，我們同意，在表达式 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ 中，所有的根式都取正值。于是，当 x 取任意一实数值时，函数 a^x 总是正的。此外，还可以証明，$a>1$ 时，函数 a^x 是增函数；$0<a<1$ 时，是减函数。至于对这个函数更仔細的研究，我們以后再講[**44**]。

圖 29 表示，a 取不同值时函数(15)的圖形。現在指出这些圖形的一些特点。首先，我們知道，对任何 a 有 $a^0=1$，于是，对任何 a 函数(15)的圖形經过坐标是 $x=0$，$y=1$ 的点。若 $a>1$，則曲綫，自左向右

(在 x 增加的方向)无限上升；自右向左，无限逼近 OX 軸，但总不会达到 OX 軸。$a<1$ 时，曲綫与 OX 軸的相关位置就不同了。向右时，曲綫无限逼近 OX 軸，而向左时，无限上升。由于 a^x 总是正的，所以圖形一定全部在 OX 軸以上。还要指出，函数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形，可以由函数 $y=a^x$ 的圖形繞 OY 軸轉 180° 得到。这可由 x 换成 $-x$ 时，$a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的事实直接推出。

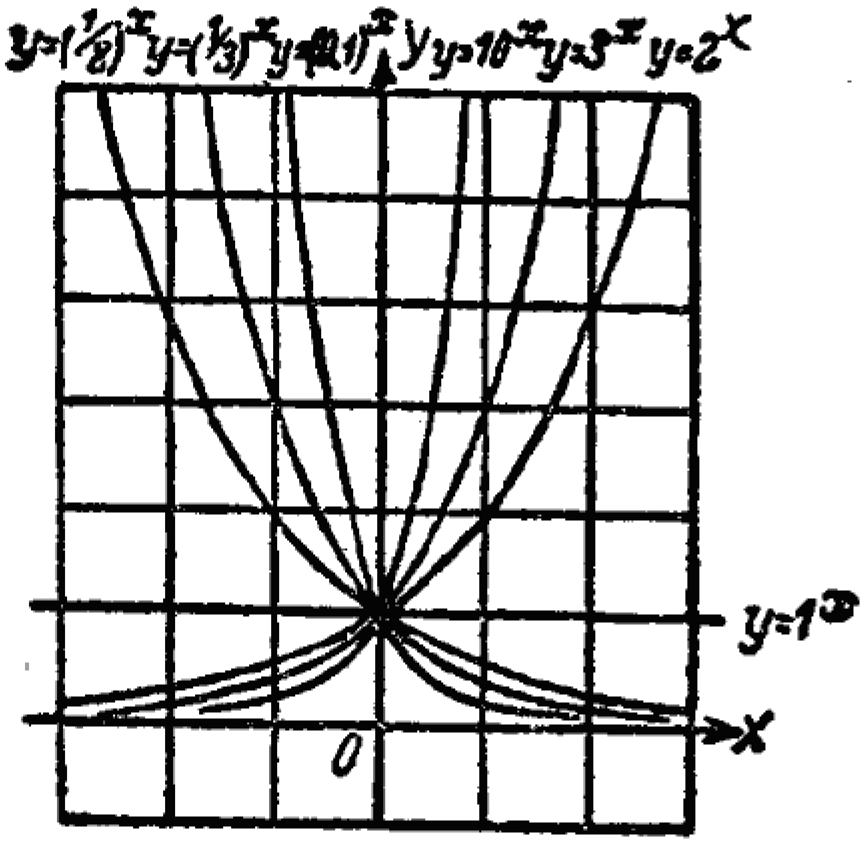


圖 29.

最后我們提出，若 $a=1$ 則 $y=1^x$，于是 x 取任何値时，$y=1$ [12]。

方程

$$y=\log_a x \tag{16}$$

确定一个对数函数。由定义，对数函数(16)是指数函数(15)的反函数。如此，我們可以把圖 29 上的曲綫，繞第一象限的平分綫轉 180°，由指数函数的圖形得到对数函数的圖形。由于 $a>1$ 时(15)是增函数，所以反函数也是 x 的單値增函数。并且由圖 29 看出，函数(16)只确定于

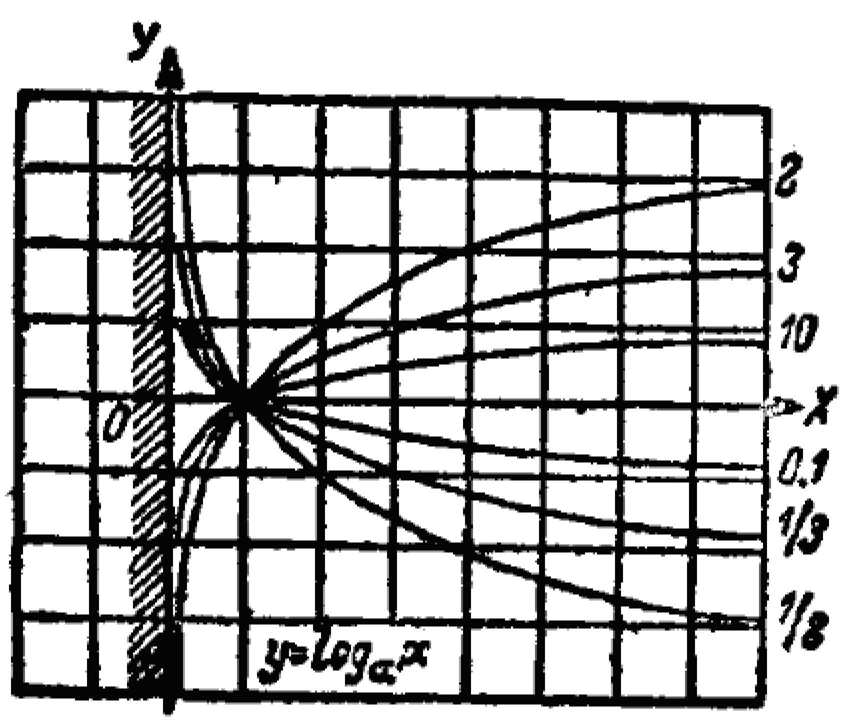


圖 30.

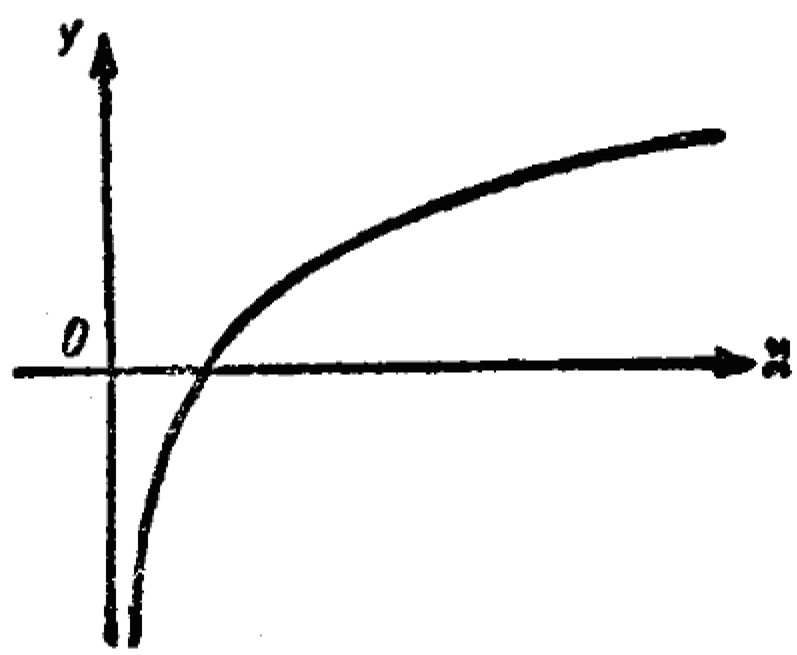


圖 31.

$x>0$ 时(負数沒有对数)。圖 30 上所有的圖形，都与 OX 軸交于一点 $x=1$。这对应于下面这事实，无論底是什么数，1 的对数是零，为淸楚起見，圖 31 上表示出，$a>1$ 时，函数(16)的一个圖形。

对数函数的概念緊密的連系着对数尺以及計算尺的理論。

在一条給定的直綫上作好分划，并記上数，使分划的長度不对应于記这分划的数，而对应于它的对数(普通用 10 作底)；这样的尺度叫做对数尺(圖 32)。如此，

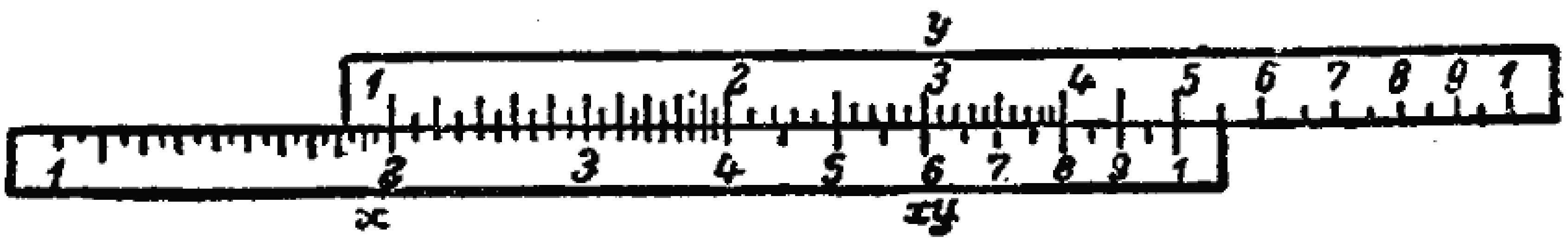


圖 32.

若尺上某一分划記作 x，則綫段 $\overline{1x}$ 的長度不等于 x，而等于 $\log_{10} x$ 尺上，記作 x 与 y 的两点間綫段長就等于(圖 32)

$$\overline{1y}-\overline{1x}=\log_{10} y-\log_{10} x=\log_{10}\frac{y}{x};$$

为要得到乘积 xy 的对数，只要由綫段 $\overline{1x}$ 增加一段 $\overline{1y}$，就得到一个綫段，它的長度等于

$$\log_{10} x+\log_{10} y=\log_{10}(x\,y)。$$

如此，有了对数尺，就可以由尺度上綫段的相加与相减求出数的乘积与商。

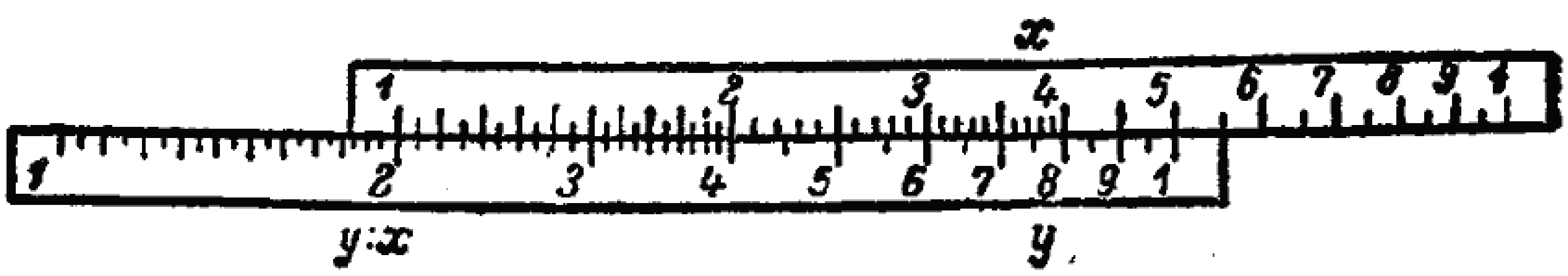


圖 33.

实用上，用一个可以沿着另一个滑动的两个同样的尺(圖 32, 33)最为簡單，以这种理想为基础，作成了計算尺。

在計算时常用对数圖紙，就是一种作圖紙，OX 与 OY 軸上的分点不对应于普通尺，而是对数尺。

23. 三角函数 我們只講四个基本的三角函数：

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x,$$

其中自变量 x 要用弧度作單位来表达，亦就是取圓周上長度等于半徑的弧所对应的圓心角作單位弧度。

圖 34 表示函数 $y=\sin x$ 的圖形。由公式：

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

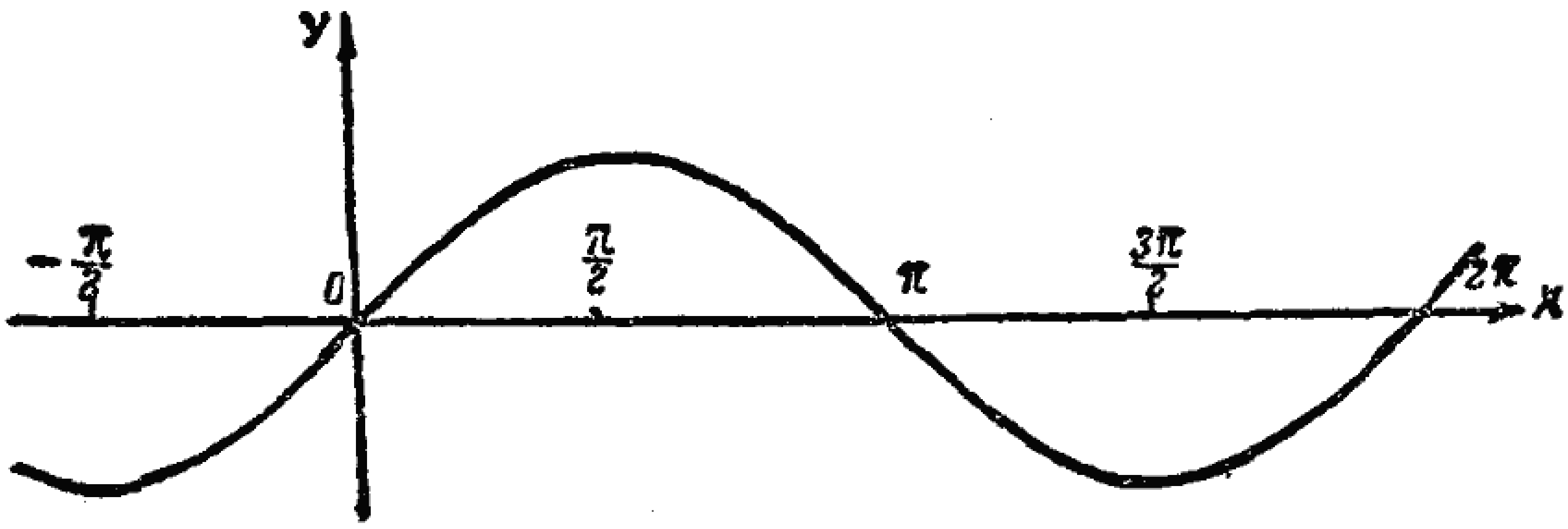


圖 34.

不难看出，把函数 $y=\sin x$ 的圖形順着 OX 軸向左移动一段 $\frac{\pi}{2}$，就得到函数 $y=\cos x$ 的圖形(圖 35)。

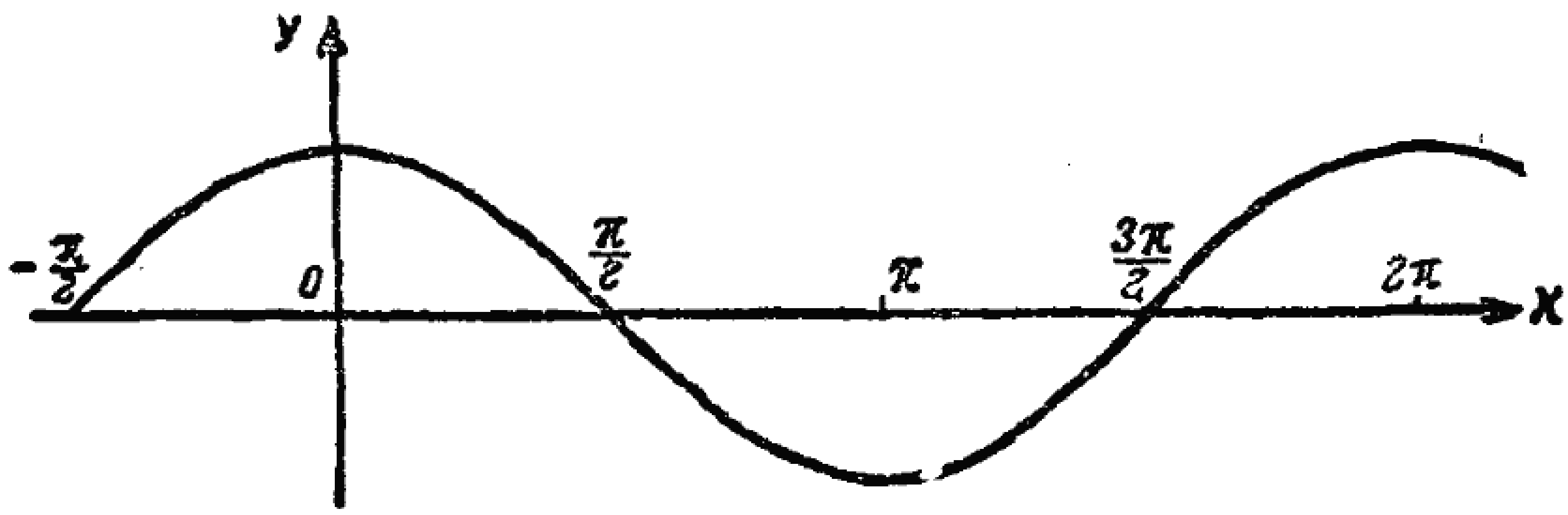


圖 35.

圖 36 表示函数 $y=\operatorname{tg} x$ 的圖形。这个曲綫是由一串全同的互相分离的无穷支綫所組成的。每条支綫，在一个寬度是 π 的竪条上，表示出这是个 x 的增函数。最后，圖 37 表示函数 $y=\operatorname{ctg} x$ 的圖形，也是由全同的无穷支綫組成的。

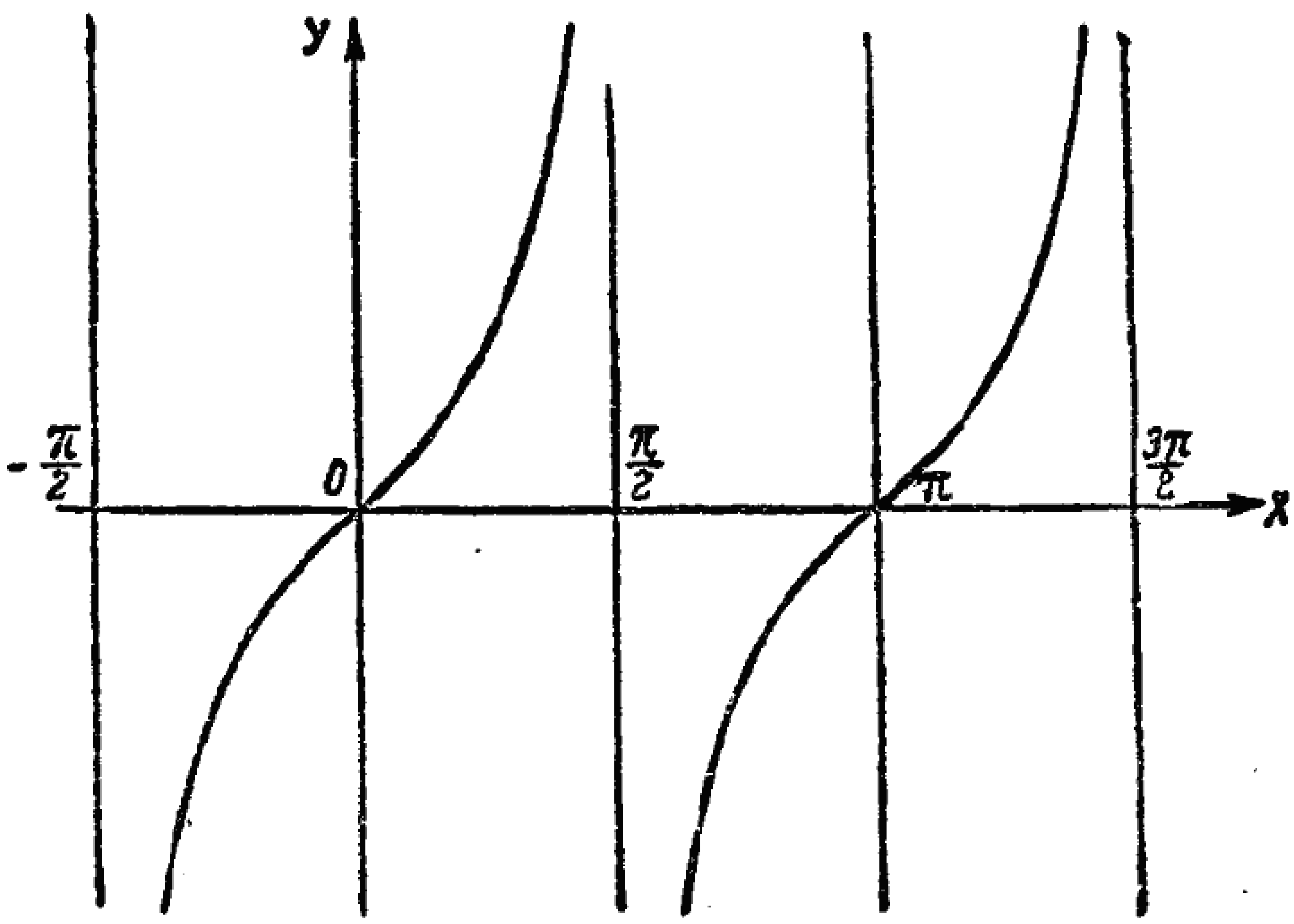


圖 36.

当函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 沿着 OX 軸向左或向右移动一段 2π 时，这些圖形与原来的重合，这对应于函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 有周期 2π，就是，x 取任何值时

$$\sin(x\pm2\pi)=\sin x,\ \cos(x\pm2\pi)=\cos x。$$

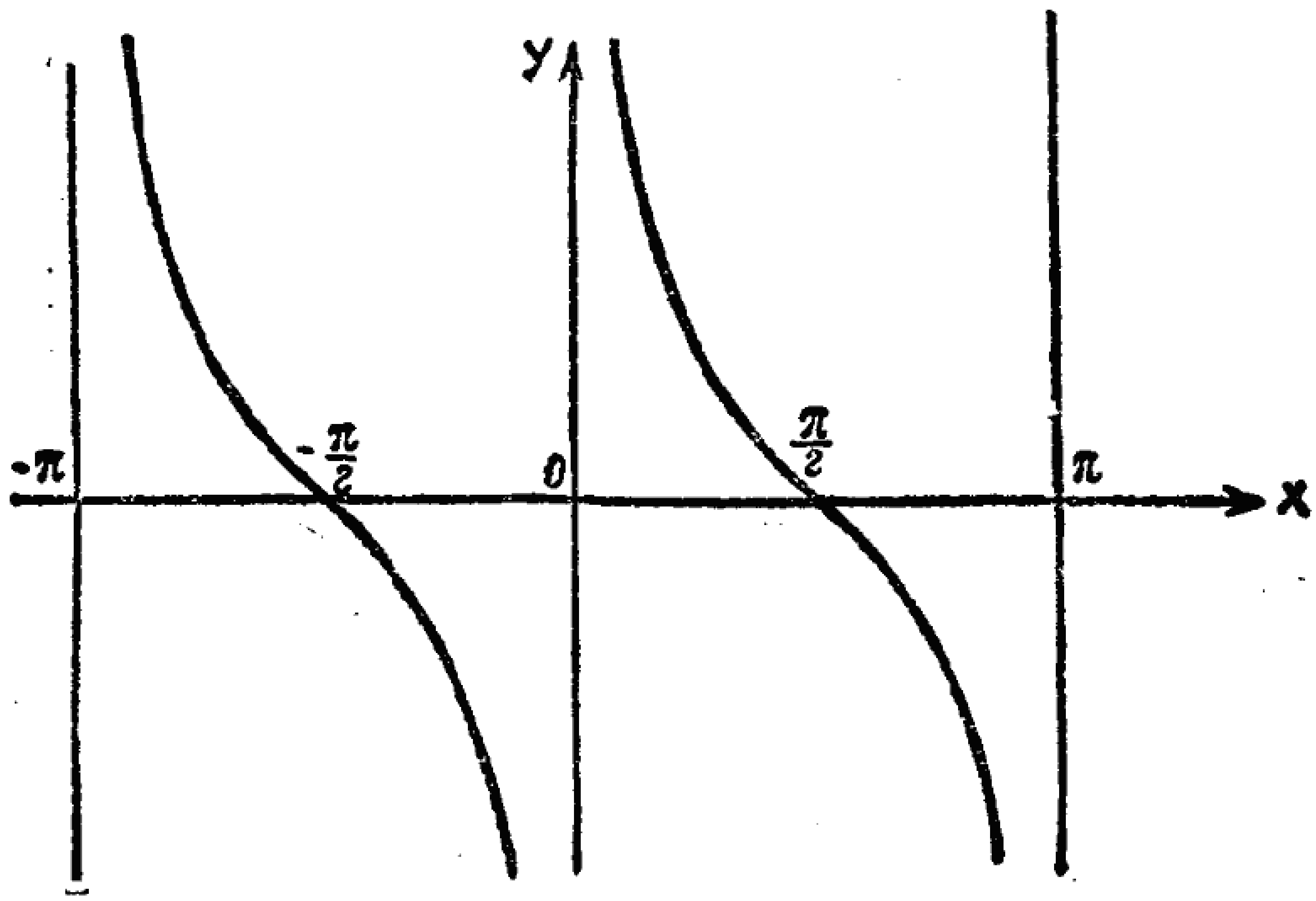


圖 37.

同样的，沿着 OX 軸移动一段 π 时，函数 $y=\operatorname{tg} x$ 与 $y=\operatorname{ctg} x$ 的圖形与原来的重合。

函数：

$$y=A\sin ax,\ y=A\cos ax \quad (A>0,\ a>0) \tag{17}$$

的圖形与函数 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 的圖形是最相似的。例如，为要由函数 $y=\sin x$ 的圖形得到函数 $y=A\sin ax$ 的圖形，可以把 $y=\sin x$ 圖形的縱坐标的長度 A 倍起来，并改变 OX 軸的單位，使横坐标是 x 的点变成横坐标是 $\frac{x}{a}$ 的点。函数(17)也是周期的，但是周期是 $\frac{2\pi}{a}$。

比較复杂的函数

$$y=A\sin(ax+b),\ y=A\cos(ax+b) \tag{18}$$

的圖形叫做简諧曲綫，把函数(17)的圖形，順着 OX 軸向左移动一段 $\frac{b}{a}$(我們認为 $b>0$)，就可以得到这个曲綫。函数(18)也有周期 $\frac{2\pi}{a}$。

更复杂的函数

$$y=A_1\sin a_1x+B_1\cos a_1x+A_2\sin a_2x+B_2\cos a_2x$$

的圖形可以由每項的圖形的縱坐标相加作成。如此得到的曲綫常叫做諧和曲綫。圖 38 表示函数

$$y=2\sin x+\cos 2x$$

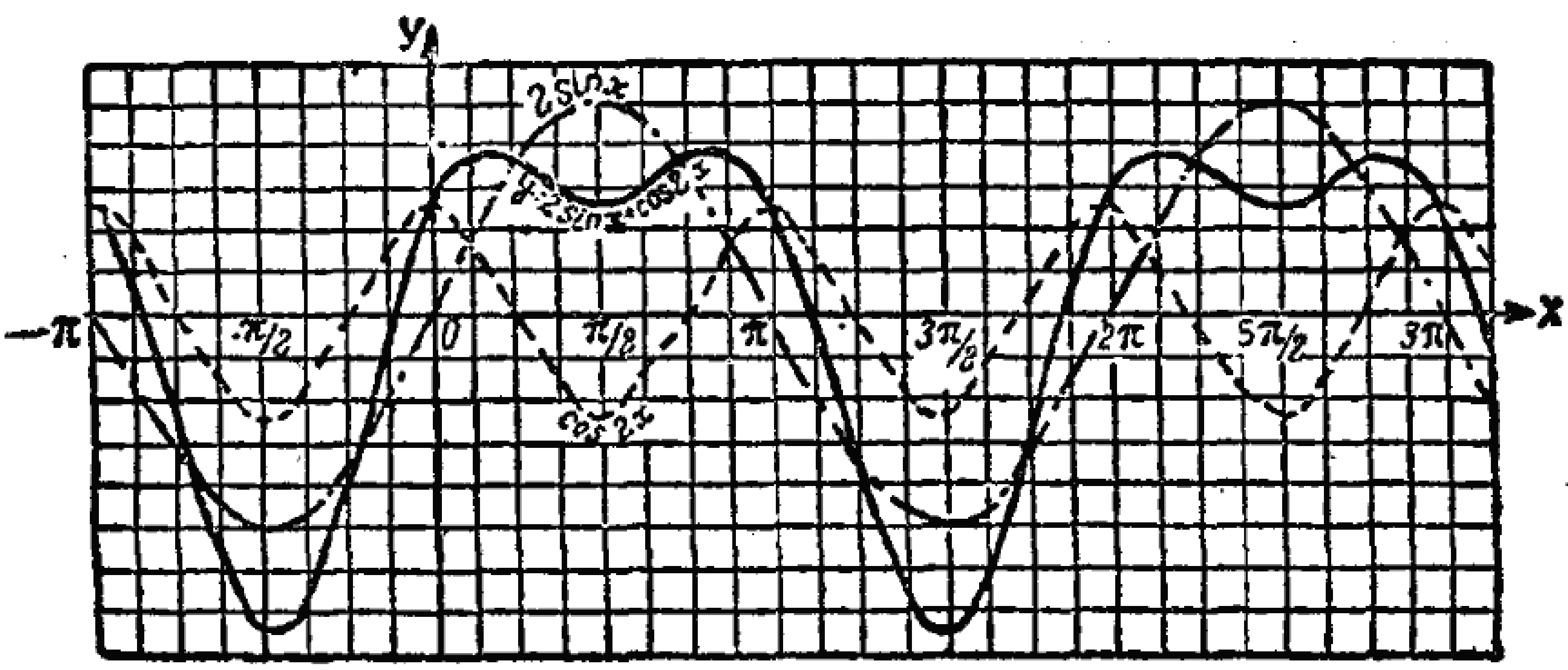


圖 38.

的圖形的作法。

注意，函数

$$y=A_1\sin a_1x+B_1\cos a_1x \tag{19}$$

可以表示成(18)的形式，它表示簡諧振动。

实际上，假設

$$m=\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},$$

$$n=\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},$$

$$A=\sqrt{A_1^2+B_1^2}。$$

显然

$$A_1=mA,\quad B_1=nA, \tag{20}$$

并且

$$m^2+n^2=1,$$

$$|m|\leqslant 1,\quad |n|\leqslant 1,$$

所以，由三角学知道，总可以求到一个角度 b_1，使得

$$\cos b_1=m,\quad \sin b_1=n。 \tag{21}$$

用表达式(20)来替代(19)中的 A_1 与 B_1，再应用等式(21)，就得到

$$y=A(\cos b_1\cdot\sin a_1x+\sin b_1\cdot\cos a_1x),$$

就是

$$y=A\sin(a_1x+b_1)。$$

24. 反三角函数(或圓函数) 由三角函数

$$y=\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x$$

經反演法所得的函数分别記作:

$$y=\operatorname{arc\,sin} x,\ \operatorname{arc\,cos} x,\ \operatorname{arc\,tg} x,\ \operatorname{arc\,ctg} x,$$

这符号表示一个角度(或是弧)，它的正弦，余弦，正切或余切等于 x。先看函数

$$y=\operatorname{arc\,sin} x。 \tag{22}$$

这函数的圖形(圖 39)，依照[20]所述的方法，可以由函数 $y=\sin x$

得到。这圖形全部在寬度是 2，通过 OX 軸上 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 一段的竪条上；就是函数(22)只确定在区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上，再有，方程(22)相当于方程 $\sin y=x$，由三角学知道，給定一个 x 的値，我們就得到无穷多个角度 y 的値。实际上，由圖形来看，过区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上一点垂直于 OX 軸的直綫，与圖形交于无穷多个点，所以函数(22)是多値函数。

直接由圖 39 来看，若是我們不要整个的圖形，只限定要实綫画出的一部分，这对应于只考虑区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的角度 y，函数(22)就成單値的了。

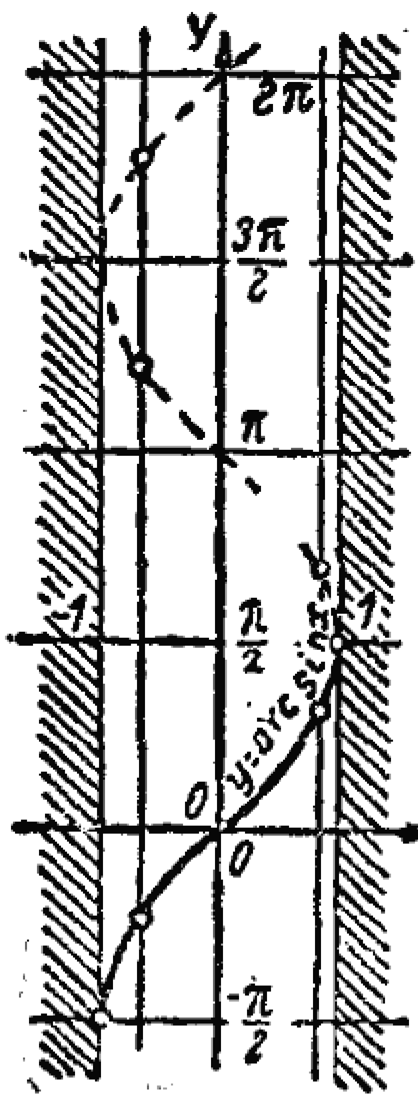


圖 39.

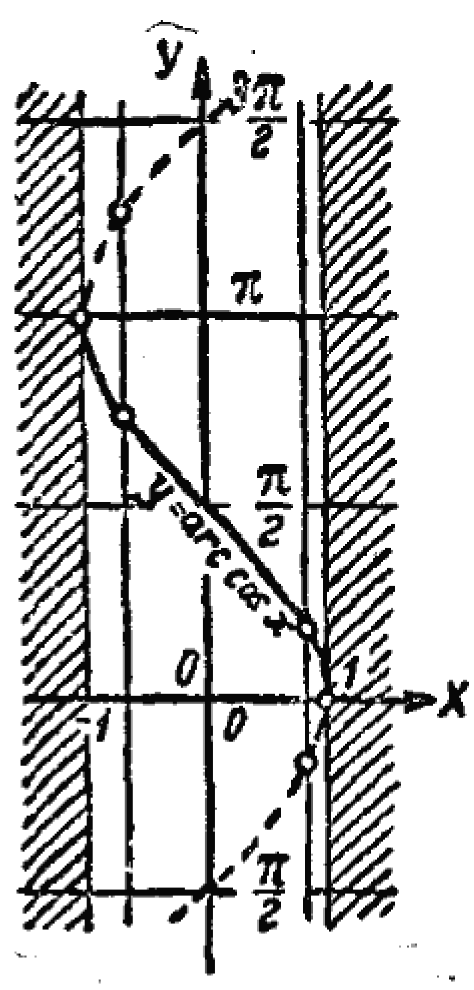


圖 40.

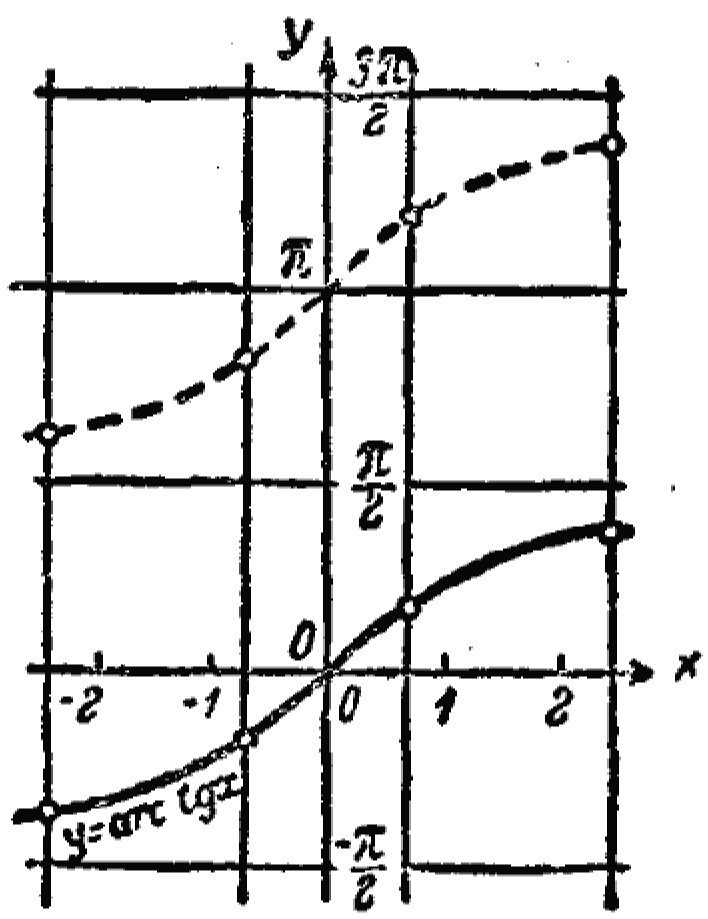


圖 41.

圖 40 与 41 表示函数 $y=\text{arc}\cos x$ 与 $y=\text{arc tg}\,x$ 的圖形，要弄成單値函数，保留的一部分，由实綫标記。(arc ctg x 的圖形請讀者自己作出)，注意函数 $y=\text{arc tg}\,x$ 与 $y=\text{arc ctg}\,x$ 确定于 x 的全部实数値。

由圖可看出，在曲綫的实綫部分上 y 的变化区間，我們得到下表，在这限制下，这些函数成为單値的。

y	arc sin x	arc cos x	arc tg x	arc ctg x
限制 y 的不等式	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$	$0\leqslant y\leqslant\pi$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$	$0<y<\pi$

如此确定的，叫做反三角函数的主値，不难証明，它們滿足下列关系式：

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{arc}\sin x+\operatorname{arc}\cos x=\frac{\pi}{2},\\ \operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x=\frac{\pi}{2}。\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

§2. 極限論。連續函数

25. 有序变量 以前談到自变量 x 时，我們只重視 x 可以取値的集合。例如，可以是滿足不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的値的集合。現在我們要考虑依序取无穷多个値的变量，就是我們現在不仅要重視 x 的値的集合，同时还要看它取这些値的順序。說得更精确些，就是我們假設，对变量 x 的任意一个値来看，可能分辨出来，其余的値，那些在它前面，那些在它后面；并且这变量沒有一个最后的値，就是无論取出这变量的那一个値，总有无穷多个値在它后面。这样的变量叫做有序变量。若 x', x'' 是有序变量 x 的两个値，则可能辨別出它們那个在前，那个在后，并且若 x' 在 x'' 前面，而 x'' 在 x''' 前面，則 x' 在 x''' 前面。例如，假設 x 的値的集合由不等式 $0\leqslant x<1$ 确定，而且两个不同的値的順序就按照由小到大的順序。如此，我們就得到一个有序变量，它由零向 1，經过所有的实数値，連續地增加，但总不到一。对于有时間性的現象，变量的値的順序就依照它的时間的順序安置；以后我們常这样利用时間的順序，并且用“先”与“后”两个辞，替代“在前面”与“在后面”。

有序变量的重要的特殊情形是这样的一种，就是变量的有順序的値可以編成一列如：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

的形式，且使任意两个值 x_p 与 x_q，在后面的有較大附标。显見，像上述由零向1增加的变量，它的有順序的值就不能这样編号。还要注意，有序变量的值里面可能有相同的。例如，像上面的編号变量，有时 $x_3=7$ 而 $x_{12}=7$。我們用"有序变量"这个辞，或是为簡短起見，就用"变量"这个辞。总是抽去量(長度，重量等)的具体特性。仅指它的数值的全部序列。我們常常引用一个字母，例如 x，算作它依序取上述的数值。

变量 x 的每一个值对应于 OX 軸上一个确定的点 K。如此，变量 x 的依序的改变就由 OX 軸上点 K 的移动表示出来。

这一节專講極限的基本理論，它是全部近代数学分析的基础。在这理論中考慮变量的一些最簡單的同时也是最重要的情形。

26. 无穷小量 假使，点 K 永远留在 OX 軸上某一个綫段的內部。这就相当于綫段 $\overline{OK}$ 的長度 (O 是坐标原点) 永远小于一个确定的正数 M。在这情形下，量 x 叫做有界的。注意 $\overline{OK}$ 的長度就是 $|x|$，于是我們有下面的定义。

定义 若有这样的一个正数 M 存在，使得变量 x 的所有的值均滿足 $|x|<M$，則这变量叫做有界的。

例如，无論怎样取 α，$x=\sin\alpha$ 是一个有界变量。在此时我們可以取任何一个大于1的数作 M。

現在再考慮一种情形，假設，依序改变的点 K 无限逼近于坐标原点。說得更精确些，就是假設在 OX 軸上，預先給定一个以 O 为中点的綫段 $\overline{S'S}$，无論它多么小，当点 K 依序改变时，要进入这个綫段內部，并且以后就只在这綫段內部移动。在这情形下，我們就說量 x 趋向零或者說它是无穷小量。

綫段 $\overline{S'S}$ 的長度記作 2ε。在这里我們用 ε 这个字母記任意給定的一个正数。若点 K 进入綫段 $\overline{S'S}$ 內部，則 $\overline{OK}$ 的長度 $<\varepsilon$，反之，若 $\overline{OK}$ 的長度 $<\varepsilon$，則点 K 进入綫段 $\overline{S'S}$ 內部。如此我們就有下面的

定义：

定义 若对任意給定的一个正数 ε，变量 x 有这样的一个値存在，使得在它后面的所有的値都滿足不等式 $|x|<\varepsilon$，就說这变量是趋向零的，或者說它是无穷小。

因为无穷小量的概念非常重要，我們再給这定义一个別的說法。

定义 若当变量 x 依序改变时，$|x|$ 可以变到小于任意給定的正数 ε，并且以后就永远小于 ε，則这变量叫做趋向零的或者叫做无穷小。

我們用"无穷小量"这个辭表示上面所述的那种变量改变的特性。不要把无穷小量的概念与实际上常用的很小的量的概念相混。

假設，測量某一个長度，我們得到 1000 m，还剩下一小段，有的时候，剩下这一段与整个的長比較起来，我們可以算作它很小，于是忽略不計。但是剩下这一段的長度还是有一个确定的正数表达它，所以就不能用"无穷小"这个辭。如果我們需要对这个長度作更精确的測量，就不能再把它算作很小，而应当注意它。所以很小这个概念是相对的概念，它与測量的实际特性有关。

假設，变量 x 依序取値：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

并且設 ε 是一个任意給定的正数。为要肯定 x 是个无穷小量；我們須要証明，自附标 n 的某一个値起，$|x_n|$ 小于 ε；換句話說，就是須要求出这样一个整数 N，使得当 $n>N$ 时，

$$|x_n|<\varepsilon。$$

这个数 N 依賴于所选擇的 ε。

作为无穷小量的一个例，我們考虑一个量，依序取値，

$$q,\ q^2,\ q^3,\ \cdots,\ q^n,\ \cdots\quad (0<q<1)。\tag{1}$$

現在須要滿足不等式：

$$q^n<\varepsilon\quad 或\quad n\log_{10} q<\log_{10}\varepsilon。$$

注意 $\log_{10} q$ 是个負数，而用負数除时，不等式改变方向；所以上面

的不等式可以写成：

$$n>\frac{\log_{10}\varepsilon}{\log_{10}q},$$

于是我們可以取商 $\log_{10}\varepsilon : \log_{10}q$ 所包含的最大的整数作 N。因此，这个量趋向零，通常說序列(1)趋向零。

若在序列(1)中我們用 $(-q)$ 替代 q，則不同的只是奇次項变成(−)号，但是这序列各項的絕对值保持不变；所以它还是一个无穷小量。

若量 x 是无穷小量，則通常用下面的式子記它

$$\lim x=0 \quad 或 \quad x\to 0;$$

其中 lim 是拉丁字 limes 的前面三个字母，中文就是極限。

現在証明无穷小量的两个性質：

1. 几个(有限数目的)无穷小量的和也是无穷小量。

考虑三个无穷小量的和 $w=x+y+z$，先把变量算作是編号的。設

$$x_1, x_2, \cdots; \quad y_1, y_2, \cdots; \quad z_1, z_2, \cdots$$

是 x, y 与 z 的依序的值。我們就得到 w 的依序的值：

$$w_1=x_1+y_1+z_1, \quad w_2=x_2+y_2+z_2, \cdots。$$

設 ε 是一个任意給定的正数。注意 x, y 与 z 都是无穷小量，我們就可以找到一个 N_1，使得当 $n>N_1$ 时，$|x_n|<\frac{\varepsilon}{3}$；一个 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，$|y_n|<\frac{\varepsilon}{3}$；一个 N_3，使得当 $n>N_3$ 时，$|z_n|<\frac{\varepsilon}{3}$。若将 N_1, N_2 与 N_3 三个数中的最大的記作 N，則当 $n>N$ 时，

$$|x_n|<\frac{\varepsilon}{3}; \quad |y_n|<\frac{\varepsilon}{3}; \quad |z_n|<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是当 $n>N$ 时

$$|w_n|\leqslant|x_n|+|y_n|+|z_n|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3},$$

就是当 $n>N$ 时，$|w_n|<\varepsilon$，所以 $w=x+y+z$ 是一个无穷小量。至

于非編号变量的情形，我們把 x，y 与 z 算作某一个有序变量 t 的函数：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$。x，y 与 z 的值也同样是有序改变的，就是若 $t=t'$ 在 $t=t''$ 前面，則 $x(t')$ 在 $x(t'')$ 前面。于是和

$$w(t)=x(t)+y(t)+z(t)$$

也是有序变量，这个和的意思是对应于同一个 t 的值，变量 x，y 与 z 的值的和。于是可以像对編号变量一样来証明。在可排变量的情形下，t 有上面的附标的作用，这时变量 t 只取正整数值。

2. 有界量与无穷小量的乘积是无穷小量。

考虑編号变量的乘积 xy，其中 x 是一个有界量，y 是一个无穷小量。由条件，对任何的 n，$|x_n|$ 永远小于某一正数 M。若 ε 是一个任意給定的正数，則有这样一个 N 存在，使得当 $n>N$ 时，$|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$。于是当 $n>N$ 时，

$$|x_ny_n|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M},$$

就是当 $n>N$ 时，$|x_ny_n|<\varepsilon$，由此推知 $xy\to0$。至于非編号变量可以类似的証明。

注意，若 x 是一个常量，这第二个性質仍然是对的。这时只須取任意一个大于 $|x|$ 的正数作 M 就成了。这就是說常量与无穷小量的乘积是无穷小量。

由于无穷小量的概念对以后非常重要，我們再仔細講一講，并且对上面的叙述作一些补充的附注。

我們已經証明，若 $0<q<1$ 或 $-1<q<0$ 則具有依序的值(1)的变量趋向零。設 $q=\frac{1}{2}$，得到依序的值：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots。$$

在这情形下，每一个在后面的值小于在前面的值，并且变量逐漸減

小，趋向零。若設 $q=-\frac{1}{2}$，則得到依序的值：

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots。$$

在这情形下，变量趋向零，但是取的值有时大于零，有时小于零。

在前面的序列中，每隔一个放入一个数零，就是說，作出一个变量依序取下面的值：

$$\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{16},\ 0,\ \frac{1}{32},\ 0,\ \cdots。$$

不难看出，这个变量也趋向零，但是它有无穷多次取零作值。这并不違反一个量趋向零的定义。

最后，假使一个变量取的值都等于零。这样的量也适合趋向零的量的定义，因为在这情形下，$|x|$ 永远等于零，就是当給定一个正数 ε 时，不仅由某一个值起 $|x|<\varepsilon$，而且它的全部值总小于 ε。換句話說，等于零的常量适合无穷小量的定义。不等于零的常量就不适合这个定义。

再給一个附注。回忆一下无穷小量的定义：当任意給定一个正数 ε 时，变量 x 就有这样一个值，使得在它后面所有的值都滿足不等式 $|x|<\varepsilon$。由此直接推知，当証明某一变量趋向零时，我們可以只考虑在某一个定值后面的那些值，并且这个定值可以随意选擇。

与这相連系，在極限論中，有界量的定义无須乎要量 y 的所有的值滿足不等式 $|y|<M$。下面的定义就足够了：若存在一个正数 M 与量 y 的一个值，使得在这个值后面的所有的值都滿足不等式 $|y|<M$，則量 y 叫做有界的。

用这个作有界量的定义时，上面第二个性質的証明完全一样。对于編号变量，由有界量的第二个定义可以推到第一个，所以第二个定义并不更广泛些。实际上，若当 $n>N$ 时，$|x_n|<M$，則把

$$|x_1|,\ |x_2|,\cdots,\ |x_N| \text{与} M$$

这 $(N+1)$ 个数中的最大的記作 M'，我們可以肯定，对任意的 n，$|x_n|<M'+1$。

27. 变量的極限 如果在 OX 軸上对应于一个变量的点 K 具有这样的特性，就是当 K 依序改变时，綫段 $\overline{OK}$ 的長度会变得小于一个任意給定的正数 ε，并且以后再变时，就永远小于 ε；我們就說这个变量是个无穷小。現在，我們假設綫段 $\overline{OK}$ 没有这个特性，而綫段 $\overline{AK}$ 有这个特性，其中 A 是 OX 軸上一个定点，坐标是 a（圖 42）。在这情形下，我們取長度是 2ε 的区間 $\overline{S'S}$ 时，就不再以坐标原点为中点，而以坐标是 a 的点 A 为中点；于是，当依序改变时，点 K 就要进入这个区間的內部，并且以后就永远在它的內部变动。有这样的情形时，我們說常数 a 是变量 x 的極限，或者說变量 x 趋向 a。

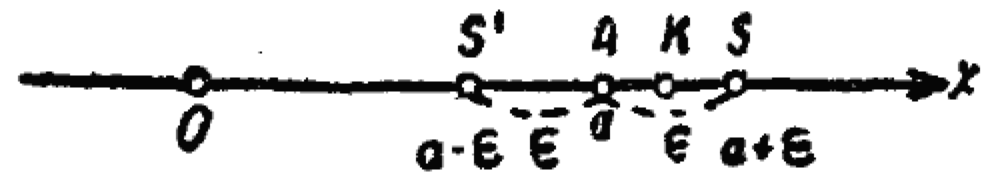


圖 42.

注意綫段 $\overline{AK}$ 的長度是 $|a-x|$ [9]，我們可以給下面的定义：

定义 若有一个变量 x 与一个常数 a，使得差 $a-x$（或 $x-a$）是个无穷小量，則 a 叫做这变量的極限。

注意无穷小量的定义，我們也可以用下面的方法，給出極限的定义：

定义 一个常数 a 叫做变量 x 的極限，如果它們有下面的特性：当任意給定一个正数 ε 时，变量 x 就有这样的一个值存在，使得在它后面的所有的值都滿足不等式 $|a-x|<\varepsilon$。

由这定义直接可以推出来下面的結果，我們这里不仔細証明了。

一个变量不能趋向两个不同的極限，并且一个变量可以沒有極限。例如，当角度 α 依序增加时，变量 $\sin\alpha$ 在 -1 与 $+1$ 之間擺动，而沒有極限。

无穷小量的極限等于零。

若一齐改变的两个变量 x 与 y，各自趋向極限 a 与 b，且当依序改

变时，經常的滿足不等式 $x\leqslant y$，則它們的極限 a 与 b 滿足不等式 $a\leqslant b$。

在这里我們提出，若变量滿足不等式 $x<y$，它們的極限仍然可能相等，所以 $a\leqslant b$ 中的等号不能去掉。

若当变量 x, y 与 z 一齐依序改变时，总滿足不等式 $x\leqslant y\leqslant z$，并且 x 与 z 趋向同一个極限 a，則 y 也趋向这个極限 a。

若 a 是变量 x 的極限(或 x 趋向 a)，就写成

$$\lim x=a \quad 或 \quad x\to a。$$

若 x 趋向 a，則差 $x-a=\alpha$ 是个无穷小量，我們可以写成：

$$x=a+\alpha, \tag{2}$$

就是任意一个趋向一个極限的变量，可以表示成两項的和：一項是等于这个極限的常量，一項是个无穷小量。反之，若变量 x 可以表示成和(2)的样子，其中 a 是个常量，α 是个无穷小量，則差 $x-a$ 是个无穷小量，于是 a 是 x 的極限。

若序列 x_1, x_2, … 趋向極限 a，則任意一个由它分出来的无穷的部分序列 x_{n_1}, x_{n_2}, … 也趋向極限 a。在这部分序列中，当 k 增加时，附标 n_k 經过一部分的正整数增加。对于一个趋向極限的非編号变量，一般說来，类似的性質不成立。

作为一个特例，我們考虑一个变量 x 依序取值

$$x_1=0.1,\ x_2=0.11,\ x_3=0.111,\ \cdots,$$

$$x_n=0.\overbrace{11\cdots11}^{n},\ \cdots,$$

現在証明它的極限等于 $\frac{1}{9}$。作出下面这些个差 $\frac{1}{9}-x_n$：

$$\frac{1}{9}-x_1=\frac{1}{90},\quad \frac{1}{9}-x_2=\frac{1}{900},$$

$$\frac{1}{9}-x_3=\frac{1}{9000},\ \cdots,$$

$$\frac{1}{9}-x_n=\frac{1}{9\times10^n}。$$

不等式 $$\frac{1}{9\times10^n}<\varepsilon,$$

显然相当于不等式:

$$9\times10^n>\frac{1}{\varepsilon}\quad 或\quad n>\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}-\log_{10}9,$$

于是我們可以取差 $\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}-\log_{10}9$ 所包含的最大的整数作 N。在这例中,对任意的 n,差 $\frac{1}{9}-x_n$ 是正数。就是 x 趋向極限 $\frac{1}{9}$,而总保持小于它。

現在考虑无穷多項等比級数的前 n 項和:

$$s_n=b+bq+bq^2+\cdots\cdots+bq^{n-1}\quad (0<|q|<1)。$$

我們知道 $$s_n=\frac{b-bq^n}{1-q}。$$

取 $n=1, 2, 3, \cdots$ 我們得到序列:

$$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_k, \cdots。$$

由 s_n 的表达式,就有

$$\frac{b}{1-q}-s_n=\frac{bq^n}{1-q}。$$

这等式右边是一个常量 $\frac{b}{1-q}$ 与一个无穷小量 q^n[26]的乘积。因此,由无穷小量的第二个性質[26]: 差 $\frac{b}{1-q}-s_n$ 是个无穷小量,且我們可以断言常数 $\frac{b}{1-q}$ 是序列 $s_1, s_2, \cdots, s_k\cdots$ 的極限。

假設 $b>0$ 而 $q<0$。則当 n 取偶数时,差 $\frac{b}{1-q}-s_n$ 是正的;n 取奇数时,它是負的;于是推知,变量 s_n 趋向这个極限,依次地有时大于它,有时小于它。

对于趋向一个極限 a 的量,像在[26]中对于趋向零的量一样,我們可以給出一些同样的附注。

任意一个等于 a 的常量适合变量趋向極限 a 的定义。这里我們指

出一个量；它所有的值都等于 a，就是它的值有无穷多个，但是所有的值都等于同一个数。以后，我們为方便起見，常这样把常量考虑作变量的特殊情形。

其次，确定变量 x 的極限时，不必考虑它的所有的值，只要看它的在某一个值（随意选擇）后面的值就足够了。

还要指出，若变量 x 趋向 a，則由某一个值起，它与 a 的差可以是任意小，于是它是有界的。

像我們已說过的一样，有序变量不一定总有極限。例如，若我們取有極限 $\frac{1}{9}$ 的編号变量 $x_1=0.1$; $x_2=0.11$; $x_3=0.111$; …，及有極限零的变量 $y_1=\frac{1}{2}$; $y_2=\frac{1}{2^2}$; $y_3=\frac{1}{2^3}$; …，則編号变量 $z_1=0.1$; $z_2=\frac{1}{2}$; $z_3=0.11$; $z_4=\frac{1}{2^2}$; $z_5=0.111$; $z_6=\frac{1}{2^3}$; …，不趋向任何極限。它的值的序列 $z_1, z_3, z_5, \cdots$ 有極限 $\frac{1}{9}$，而序列 $z_2, z_4, z_6, \cdots$ 有極限零。

28. 基本定理

1．几个变量的代数和的極限等于它們的極限之和。

現在考虑三个变量的代数和 $(x-y+z)$。假使量 x, y 与 z 各自趋向極限 a, b 与 c。我們要証明这个代数和趋向極限 $(a-b+c)$。

由[27]：

$$x=a+\alpha,\quad y=b+\beta,\quad z=c+\gamma,$$

其中 α, β 与 γ 都是无穷小量。于是这个和 $(x-y+z)$ 就有表达式：

$$x-y+z=(a+\alpha)-(b+\beta)+(c+\gamma)=(a-b+c)+(\alpha-\beta+\gamma)。$$

这等式右边第一个括号內是个常量，而第二个是个无穷小量[26]。于是推知

$$\lim(x-y+z)=a-b+c=\lim x-\lim y+\lim z。$$

2．有限个变量的乘积的極限等于它們的極限的乘积。

我們只考虑两个变量的乘积 xy，假設，一齐改变的 x 与 y 各自趋

向 a 与 b。現在要証明 xy 趋向 ab。

由[27]，

$$x=a+\alpha,\quad y=b+\beta,$$

其中 α 与 β 都是无穷小量，于是推知

$$xy=(a+\alpha)(b+\beta)=ab+(a\beta+b\alpha+\alpha\beta)。$$

根据无穷小量的两个性質[26]。我們知道在这等式右边括号內的和是个无穷小量，所以有：

$$\lim(xy)=ab=\lim x\cdot\lim y。$$

3. 商的極限等于極限的商，如果分母(除数)的極限不是零。

考慮商 $\frac{x}{y}$，假設一齐改变的量 x 与 y 各自趋向極限 a 与 b，而 $b\neq 0$。我們要証明 $\frac{x}{y}$ 趋向 $\frac{a}{b}$。

为要証明这个定理，只須証明差 $\frac{a}{b}-\frac{x}{y}$ 是个无穷小量。由給定的条件知道

$$x=a+\alpha,\quad y=b+\beta\quad (b\neq 0),$$

其中 α 与 β 都是无穷小量。于是

$$\frac{a}{b}-\frac{x}{y}=\frac{1}{b(b+\beta)}(a\beta-b\alpha)。$$

这等式右边的分式的分母是两个因子的乘积，它趋向 b^2。所以，由改变中的某一个阶段开始，它要大于 $\frac{b^2}{2}$，整个分式就在 0 与 $\frac{2}{b^2}$ 之間，就是它是个有界量，而表达式 $(a\beta-b\alpha)$ 是一个无穷小量。由[26]推知差 $\frac{a}{b}-\frac{x}{y}$ 是个无穷小量，所以

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\frac{\lim x}{\lim y}。$$

所証明的定理在極限論中具有基本意义。像証明无穷小量的性質时所作的一样，我們在不認为变量是編号的一般情形下来証明它們的。

但是像对于无穷小量的第一个性質一样，应当有下面的注解，在考虑乘积的情形时，我們把 x 与 y 算作一个有序变量 t 的函数：$x=x(t)$ $y=y(t)$，这时它們也是有序变量。同样可証它們的乘积 $w(t)=$ $=x(t)y(t)$ 也是有序变量。在編号变量时，t 有附标的作用，它取正整数値而增加。

还要注意，所証明的定理确定了和、积及商的極限的存在。例如，第三定理可以更完备地叙述成：如果被除数与除数趋向極限，且除数的極限异于零，則商趋向極限，且这極限等于被除数的極限与除数的極限之商。

下面提出几个由这些定理推出的結果。若变量 x 趋向極限 a，b 是个常量，k 是个正整数，則依照定理 2，变量 bx^k 趋向極限 ba^k。

考虑多項式

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_kx^{m-k}+\cdots+a_{m-1}x+a_m,$$

其中系数 a_k 都是常数。应用定理 1 与所作的附注，可以肯定，当 x 趋向 a 时，这个多項式趋向極限：

$$\lim f(x)=f(a)=a_0a^m+a_1a^{m-1}+a_2a^{m-2}+\cdots+$$
$$+a_ka^{m-k}+\cdots+a_{m-1}a+a_m。\qquad (3)$$

同样，我們可以肯定，当 x 趋向 a 时，有理分式

$$\varphi(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^p+b_1x^{p-1}+\cdots+b_{p-1}x+b_p}$$

趋向極限：

$$\lim\varphi(x)=\varphi(a)=\frac{a_0a^m+a_1a^{m-1}+\cdots+a_{m-1}a+a_m}{b_0a^p+b_1a^{p-1}+\cdots+b_{p-1}a+b_p},\qquad (4)$$

只須 $b_0a^p+b_1a^{p-1}+\cdots+b_{p-1}a+b_p\neq0$。

以上这些結果，无論 x 采取什么方式趋向 a，都是对的。

由一个变量作成的多項式推广，我們可以考虑由几个趋向極限的变量作成的多項式。

例如，若 $\lim x=a$ 而 $\lim y=b$，則

$$\lim\ (x^2+xy+y^2)=a^2+ab+b^2。$$

29. 无穷大量 若变量 x 趋向極限，則如我們所述，它显然是有界的。現在我們考虑无界变量的情形。

像以前一样，与量 x 一起，我們考虑对应于它的，沿 OX 軸变的点 K。設当点 K 依序改变时，无論我們取定一个多么大的以坐标原点 O 为中点的綫段 $\overline{T'T}$，它总会到这綫段外边，并且以后就永远在这綫段以外变化。在这情形下，我們就說量 x 是个无穷大量，或者說它趋向无穷大。設 $2M$ 是綫段 $\overline{T'T}$ 的長度。注意綫段 $\overline{OK}$ 的長度是 $|x|$，我們就有下面的定义：

若当变量 x 依序改变时，$|x|$ 变得大于任意給定的一个大数 M，并且以后就永远大于 M，則这变量叫做无穷大量或者說它趋向无穷大。換句話說：若对任意給定的正数 M。变量 x 存在这样的值，使对一切在它后面的值都有不等式 $|x|>M$，則說变量 x 是无穷大。

特別是，若一个无穷大量 x，当它依序改变时，由某一个值起，永远是正的（点 K 在点 O 之右），就說是 x 趋向正无穷大（$+\infty$）。若量 x 保持是負的（点 K 在点 O 之左），就說是 x 趋向負无穷大（$-\infty$）。

无穷大量記为：

$$\lim x=\infty,\quad \lim x=+\infty,\quad \lim x=-\infty,$$

或

$$x\to\infty,\quad x\to+\infty,\quad x\to-\infty。$$

“无穷大”这个辞，只是表示一个变量 x 的改变具有上述的特性，这里，像无穷小量的概念一样，須要分清无穷大量的概念与很大的量的概念。

例如，若量 x 依序取値 $1, 2, 3, \cdots$ 則显然 $x\to+\infty$。若它依序取値 $-1, -2, -3, \cdots$ 則 $x\to-\infty$；若它依序取値 $-1, 2, -3, 4, \cdots$ 則我們可以写成 $x\to\infty$。

作为例子，我們考虑一个量，依序取値：

$$q, q^2, q^3, \cdots, q^n, \cdots \quad (q>1), \tag{5}$$

并設 M 是一个任意給定的正数。不等式

$$q^n>M$$

相当于不等式：

$$n>\frac{\log_{10} M}{\log_{10} q},$$

所以，若 N 是商 $\log_{10} M: \log_{10} q$ 所包含的最大的整数，则当 $n>N$ 时，

$$q^n>M,$$

就是說考虑的量趋向 $+\infty$。

若在序列(5)中，用$(-q)$替代(q)，則只是 q 的奇次冪变号，而序列中各項的絕对値保持不变。所以当 q 取負値，而絕对値大于1时，序列(5)趋向无穷大。

以后，我們說到变量趋向極限时，总認为極限是有限数。有时我們說"一个变量趋向无穷大的極限"，这就表示它是个无穷大量。

由以上的定义，直接推出下面的結果：若变量 x 趋向零，而 m 是一个异于零的已知常量，則变量 $\frac{m}{x}$ 趋向无穷大；并且，若 x 趋向无穷大，則 $\frac{m}{x}$ 趋向零。

30. 單調变量 考虑一个变量时，常常不能求出它的極限，但对我們重要的是要知道这个極限是否存在，就是这变量是否趋向一个極限。現在就講極限存在的一个判别法。

假設变量 x 总是增加的（更正确些說，永远不減）或者总是減少的（更正确些說，永远不增）。在第一种情形下，这个量的任意一个値不小于所有的在它前面的値而不大于所有的在它后面的値。在第二种情形下，則不大于所有的在它前面的値而不小于所有的在它后面的値。在这两种情形下，我們都說：这个量單調的改变。

OX 軸上对应于它的点 K 就在一个方向移动——如果变量上升，就在正的方向，如果下降，就在負的方向。显然，这表示只有两种可能：

或者点 K 沿直綫移向无限远 ($x\to+\infty$, $x\to-\infty$)，或者点 K 无限逼近于某一个定点 A(圖43)，就是变量 x 趋向一个極限。若除去改变的單調性以外，还知道量 x 是有界的，則不会有第一种可能，于是可以肯定，这个量趋向一个極限。

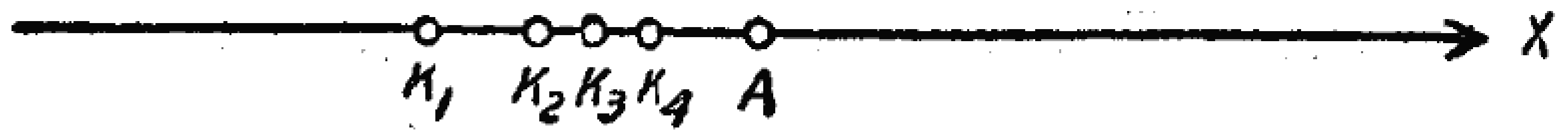


圖 43.

这样以直覚为基础的討論，自然不能算是証明，以后我們再引入严格的証明。

这个極限存在的判別法，常常叙述如下：若变量 x 是有界的幷且單調地改变，則它趋向一个極限。

作为例子，我們考慮序列：

$$u_1=\frac{x}{1},\quad u_2=\frac{x^2}{2!},\quad u_3=\frac{x^3}{3!},\quad \cdots,\quad u_n=\frac{x^n}{n!},\cdots ①, \tag{6}$$

其中 x 是一个給定的正数。

我們有

$$u_n=u_{n-1}\frac{x}{n}。 \tag{7}$$

当 $n>x$ 时，分数 $\frac{x}{n}$ 小于一，于是 $u_n<u_{n-1}$，就是，变量 u_n，由某一个值起，当 n 增加时，它总是减少，但是永远大于零。依照極限存在的判別法，这变量要趋向某一个極限 u。在等式(7)中，讓整数 n 无限增加，取極限，我們就得到：

$$u=u\cdot 0 \quad 或 \quad u=0,$$

就是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0。 \tag{8}$$

若在序列(6)中，用 $(-x)$ 替代 x，則只是有奇数附标 n 的項变号，

① 記号 $n!$ 是 $1\cdot2\cdot3\cdots n$ 的簡写，叫做“n 的阶乘”。

而这序列仍然趋向零；就是无論給定的x的值是正的还是負的，等式(8)总是对的。

在这个例中，我們計算極限u时，預先已經肯定它是存在的。若沒有肯定它的存在，用这算法，就可能引出錯誤的結果。例如，考慮序列

$$u_1=q,\ u_2=q^2,\ \cdots,\ u_n=q^n,\ \cdots\quad (q>1)。$$

显然，
$$u_n=u_{n-1}q。$$

如果不管u_n的極限是否存在，就用字母u来記它的極限。然后在这等式两边取極限，得到：

$$u=uq\quad 就是\quad u(1-q)=0,$$

于是推知
$$u=0。$$

但这是不对的，因为$q>1$时，有$\lim q^n=+\infty$[29]。

31. 極限存在的勾犀判別法　在[30]中叙述的極限存在的判別法，只是極限存在的充分条件，并不是必要条件，因为我們知道[27]，变量有时趋向一个極限，但是并不單調地改变。

法国数学家勾犀給了極限存在的一个必要且充分的条件。現在我們叙述如下。若已知一个变量的極限，則它有下述的特性，就是由变量的某一个值起，这个極限与变量值的差，就絕对值說小于任意給定的一个正数ε。按照勾犀判別法極限存在的必要且充分条件是：由变量的某一个值起，在它后面的任意两个值之差要小于任意給定的一个正数ε。勾犀判別法的正确的叙述如下：

勾犀判別法　变量x有極限的必要且充分条件如下：当任意給定一个正数ε时，x有这样一个值存在，使得在它后面的任意两个值x'与x''满足不等式$|x'-x''|<\varepsilon$。

設有序列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots。$$

依照勾犀判別法，这个序列有極限的必要且充分条件如下：当任意給定一个正数ε时，有这样一个N（依賴于ε）存在，使得

$$当\ m\ 与\ n>N\ 时，\quad |x_m-x_n|<\varepsilon。\qquad (9)$$

这个条件的必要性很容易証明。若这序列有極限 a，则写成 $x_m-x_n=(x_m-a)+(a-x_n)$，由此推知：

$$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-a|+|a-x_n|。$$

但是，根据極限的定义，一定有这样一个N存在，使得当 m 与 $n>N$ 时，$|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ 及 $|a-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是当$m$与 $n>N$ 时，$|x_m-x_n|<\varepsilon$。簡單說就是：若 x 的值变的时候，与 a 可任意接近，则它們彼此之間也一定可任意接近。

勾犀条件的充分性我們現在不給証明，只給下面一个直观的解釋(圖 44)。

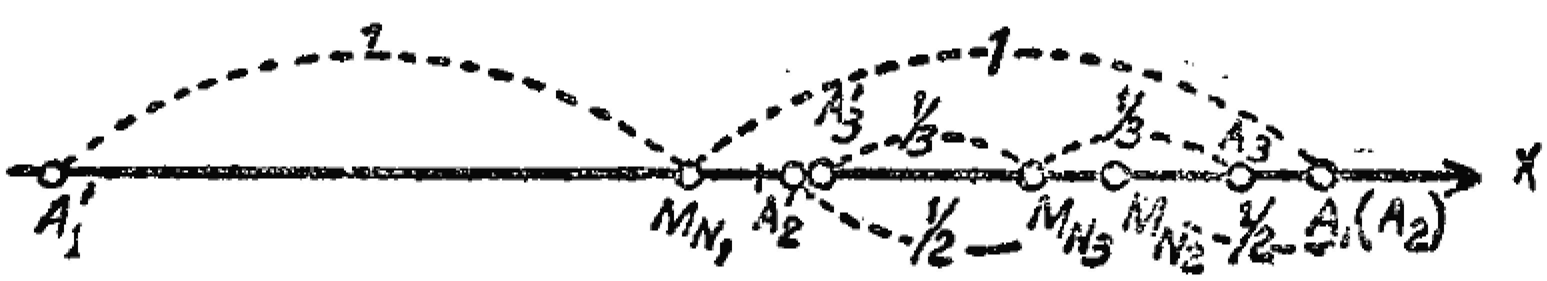


圖 44.

設 M_s 是坐标軸上对应于数 x_s 的点。我們假設条件(9)成立。依照这个条件，就有这样一个值 $N=N_1$ 存在，使得当 $s>N_1$ 时，

$$|x_s-x_{N_1}|<1,$$

就是当 $s>N_1$ 时，所有的点 M_s 都进入一个綫段 $\overline{A_1'A_1}$ 的内部这个綫段以 M_{N_1} 为中点，長度等于 2 。

同样，有这样一个值 $N=N_2\geqslant N_1$ 存在，使得当 $s>N_2$ 时

$$|x_s-x_{N_2}|<\frac{1}{2}。$$

作一个綫段，以 M_{N_2} 为中点，長度等于 1，并設 $\overline{A_2'A_2}$ 是这个綫段与 $\overline{A_1'A_1}$ 重合的部分。由上面两个不等式，当 $s>N_2$ 时，点 M_s 一定进入綫段 $\overline{A_2'A_2}$ 的内部。

同样的，还有这样一个值 $N=N_3\geqslant N_2$ 存在，使得当 $s>N_3$ 时，

$|x_s - x_{N_3}| < \frac{1}{3}$。与上面类似作一个綫段，以 M_{N_3} 为中点，長度等于 $\frac{2}{3}$，它与綫段 $\overline{A_2'A_2}$ 重合的部分記作 $\overline{A_3'A_3}$，于是当 $s > N_3$ 时，所有的点 M_s 都进入綫段 $\overline{A_3'A_3}$ 的内部。取 $\varepsilon = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，如此就得到一列綫段 $\overline{A_n'A_n}$，在这些綫段中，每一个都被它前面的綫段所包含，而且它們的長度趋向零。最后，显見这些綫段逼近于同一个点 A，于是对应于这个点的数 a，就是这变量 x 的極限，因为由上面的作法推知，当 s 的值足够大时，所有的点 M_s 与点 A 可任意接近。

作为勾犀条件的应用，我們考慮刻卜勒方程，这是为确定行星在它的軌道上的位置用的。这方程是：

$$x = q \sin x + a,$$

其中 a 与 q 是两个已知数，q 在 0 与 1 之間，而 x 是未知的。

任意取一个数 x_0，作出序列：

$$x_1 = q \sin x_0 + a, \qquad x_2 = q \sin x_1 + a, \ \cdots,$$
$$x_n = q \sin x_{n-1} + a, \quad x_{n+1} = q \sin x_n + a, \ \cdots。$$

由这些等式中的第二个减掉第一个，得到

$$x_2 - x_1 = q(\sin x_1 - \sin x_0) = 2q \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2}。$$

注意，$|\sin \alpha| < |\alpha|$ 及 $|\cos \alpha| \leqslant 1$，得到：

$$|x_2 - x_1| \leqslant 2q \frac{|x_1 - x_0|}{2} = q|x_1 - x_0|。 \tag{10}$$

同理可以得到不等式：

$$|x_3 - x_2| \leqslant q|x_2 - x_1|,$$

再由不等式(10)，可以写成：

$$|x_3 - x_2| \leqslant q^2 |x_1 - x_0|。$$

如此繼續算下去对任意的 n，可以得到不等式：

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^n |x_1 - x_0|。 \tag{11}$$

現在考慮差 $x_m - x_n$，为确定起見，我們算作 $m > n$。

$$x_m - x_n = x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + x_{m-2} - x_{m-3} + \cdots + x_{n+1} - x_n。$$

由不等式(11)及等比級数項的和的公式，就有：

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + |x_{m-2} - x_{m-3}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant$$
$$\leqslant (q^{m-1} + q^{m-2} + q^{m-3} + \cdots + q^n) |x_1 - x_0| =$$
$$= q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1-q} |x_1 - x_0|。$$

当 n 无限增加时，因子 q^n 趋向零[26]；因子 $|x_1 - x_0|$ 是个常数，并且因为 $m>n$ 时，q^{m-n} 在 0 与 1 之間，所以分数 $\dfrac{1-q^{m-n}}{1-q}$ 永远在零与 $\dfrac{1}{1-q}$ 之間，就是它是有界的。如此当 n 无限增加时，任意取 $m>n$，差 $x_m - x_n$ 趋向零，于是满足条件(9)。依照勾犀条件，我們可以肯定有一个極限存在：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi。$$

在等式
$$x_{n+1} = q \sin x_n + a$$
中，讓 n 无限增加。应用函数 $\sin x$ 的連續性①，取極限得：

$$\xi = q \sin \xi + a, \tag{12}$$

就是，变量 x_n 的極限 ξ 是刻卜勒方程的一个根。

作序列 x_n 时，我們是由一个任意的数 x_0 开始的，但是，我們可以証明，刻卜勒方程沒有两个不同的根，就是 $\lim x_n = \xi$ 不依賴于 x_0 的选擇，它就是刻卜勒方程的唯一的根。

假設，除已經求出的根 ξ 外，它还有一个根 ξ_1，就是

$$\xi_1 = q \sin \xi_1 + a。$$

由这方程減掉方程(12)就得到：

$$\xi_1 - \xi = q(\sin \xi_1 - \sin \xi) = 2q \sin\frac{\xi_1 - \xi}{2} \cos \frac{\xi_1 + \xi}{2},$$

因此，像上面一样，

$$|\xi_1 - \xi| \leqslant q |\xi_1 - \xi|。$$

但是 q 在 0 与 1 之間，这个关系只有当 $\xi_1 - \xi = 0$ 时才能成立，就是 $\xi_1 = \xi$，于是推知，刻卜勒方程只有一个根。

32. 有函数关系的两个变量的同时变化 考虑两个变量 x 与 y，它們有函数关系

$$y = f(x),$$

并設函数 $f(x)$ 确定于点 $x = c$ 的左右近傍。若变量 x 經过所有的实数

① 連續性的定义将在[34]給出。

值增加地趋向 c，但总不达到 c。这时 $f(x)$ 是个有序变量。如果它有一个極限 A，通常写作下面的样子：

$$\lim_{x\to c-0} y=\lim_{x\to c-0} f(x)=A, \tag{13}$$

其中符号 $x\to c-0$ 說明 x 由較小的值趋向 c。

完全一样的，若 x 經过所有的实数值减小地趋向 c，而这时 $f(x)$ 趋向一个極限 B，則写作：

$$\lim_{x\to c+0} y=\lim_{x\to c+0} f(x)=B。 \tag{14}$$

显然，極限(13)的存在，就相当于，当 x 保持小于这个数 c 而逼近于 c 时，$f(x)$ 与数 A 可任意接近，就是(13)相当于下面的条件：当任意給定一个正数 ε 时，有这样一个正数 η 存在，使得

$$当\ x<c\ 而\ c-x<\eta\ 时，\quad |A-f(x)|<\varepsilon。$$

这个数 η 自然要依賴于 ε。

完全类似的，(14) 相当于下面的条件：当任意給定一个正数 ε 时，有这样一个正数 η 存在，使得

$$当\ x>c\ 而\ x-c<\eta\ 时，|B-f(x)|<\varepsilon。$$

若極限 A 与 B 都存在，并且彼此相等，則写作下面的样子：

$$\lim_{x\to c} y=\lim_{x\to c} f(x)=A。 \tag{15}$$

这里表示 x 由任何一方面趋向 c，于是(15)相当于下面的意思：当任意給定一个正数 ε 时，有这样一个数 η 存在，使得

$$当\ |c-x|<\eta\ 而\ x\neq c\ 时，|A-f(x)|<\varepsilon。 \tag{16}$$

有时極限(13)記作 $f(c-0)$，極限(14)記作 $f(c+0)$：

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=f(c-0),\quad \lim_{x\to c+0} f(x)=f(c+0)。$$

不要把 $f(c-0)$ 与 $f(c+0)$ 这两个符号与 $f(c)$ 相混，$f(c)$ 是当 $x=c$ 时，$f(x)$ 的值。这个值可能与 $f(c-0)$，$f(c+0)$ 不同，或者甚至于可能根本沒有意义。如果一个函数的圖在点 $x=c$ 是連續的，那么極限 $f(c-0)$ 与 $f(c+0)$ 就要存在，而且我們要有 $f(c-0)=f(c+0)=f(c)$，就是

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)。$$

在这情形下,我們說:当 $x=c$ 时(在点 $x=c$),函数 $f(x)$ 是連續的。以后我們再仔細考虑連續函数的性質。

再看一般情形,上面的定义很容易推广到 y 趋向无穷大的情形。例如,容易看出,

$$\lim_{x\to c-0}\frac{1}{x-c}=-\infty;\quad \lim_{x\to c+0}\frac{1}{x-c}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}x=+\infty;\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg}x=-\infty。$$

考虑函数 $y=\operatorname{arc\,tg}x$ 的主值[24],可以写成

$$\lim_{x\to c-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-c}=-\frac{\pi}{2};\quad \lim_{x\to c+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-c}=\frac{\pi}{2}。$$

若 $f(x)$ 确定于所有的 x 的充分大的值,則可能存在一个極限:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A。$$

若无論 x 是正的还是負的,只要它的絕对值充分大,$f(x)$ 都被确定,則可能存在一个極限。

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A。$$

最后这个等式相当于下面的条件:当任意給定一个正数 ε 时,有这样一个正数 M 存在,使得

$$当\ |x|>M\ 时,\quad |A-f(x)|<\varepsilon。$$

不难証实下面的等式的正确性:

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty;\qquad \lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;\quad \lim_{x\to\infty}x^2=+\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{3};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=0。$$

再考虑一个物理上的例子，假使我們把一个固体的物体加热，設它的初温是 t_0，在沒有达到融点以前，加热时，物体的温度上升。在达到融点而未全部变成液体状态时加热，物体的温度不变，它保持在融点的温度，直到全部液化以后，又开始上升。由液体状态变到气体状态时，也是类似的情形。現在我們把物体吸收的热量 Q 考虑作它的温度的函数。圖45表示这个函数的圖形，这里横軸用作温度，縦軸——物体吸收的热量。設这物体开始变向液体状态时的温度是 t_1，由液体状态开始变向气体状态时的温度是 t_2。显見

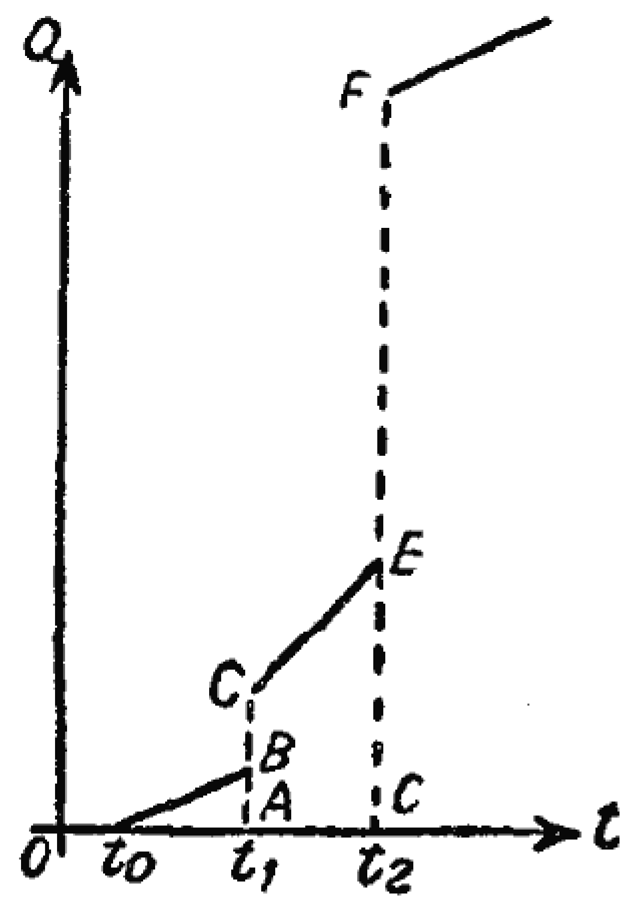


圖 45.

$$\lim_{t\to t_1-0}Q=\text{縦坐标}\ \overline{AB},\quad \lim_{t\to t_1+0}Q=\text{縦坐标}\ \overline{AC}\ 。$$

綫段 $\overline{BC}$ 之長表示物体的融解热，綫段 $\overline{EF}$——汽化热。

若極限 $f(c-0)$ 与 $f(c+0)$ 存在而不等，則其差 $f(c+0)-f(c-0)$ 叫做当 $x=c$ 时（在点 $x=c$）函数 $f(x)$ 的跃度。

函数 $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x-c}$，当 $x=c$ 时，有个跃度 π，我們所考虑的函数 $Q(t)$，在点 $t=t_1$ 时，有等于融解热的跃度。

我們确定 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 时，算作 x 趋向 c，但总不等于 c。这个預先声明是極重要的，因为当 $x=c$ 时，$f(x)$ 的值有时或者不存在，或与 x 逼近于 c 时的 $f(x)$ 的值无关。例如当 $t=t_1$ 时，函数 $Q(t)$ 是不确定的。

为解释上面的叙述。再考虑一个例子。假設在区間 $(-1, +1)$ 上确定一个函数如下：

当 $-1\leqslant x<0$ 时， $y=x+1$;

当 $0<x\leqslant 1$ 时， $y=x-1$;

当 $x=0$ 时， $y=0$。

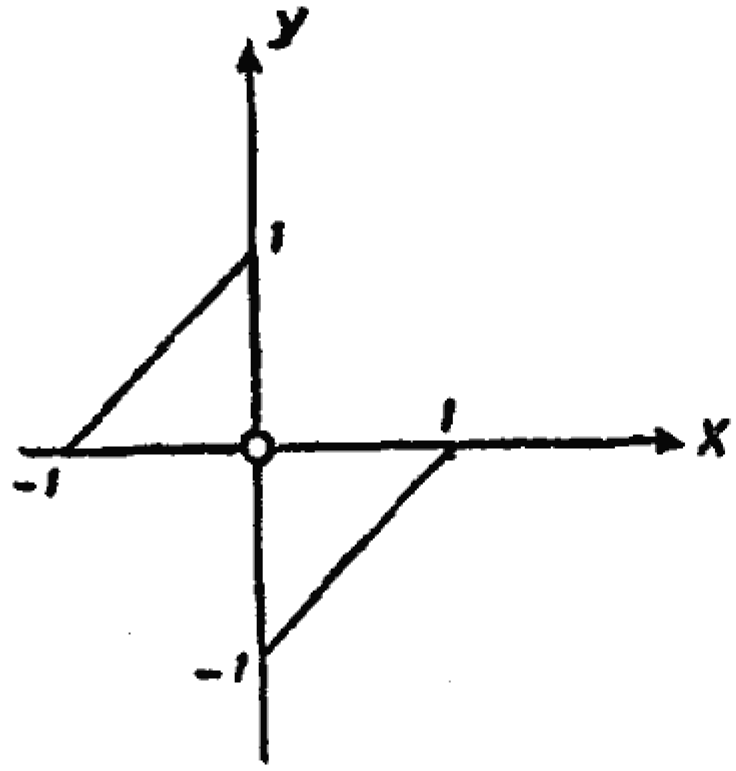


圖 46.

圖 46 表示这个函数的圖形。它由两段不包括端点（当 $x=0$ 时）的直綫段与一个孤点——坐标原点——組成。在这个情形下。我們就有

$$\lim_{x\to -0} f(x)=1,\quad \lim_{x\to +0} f(x)=-1,\quad f(0)=0。$$

33. 例 現在我們考虑一个对以后很重要的例。設

$$y=\frac{\sin x}{x},$$

这个函数确定于所有的 x 的値，但是 $x=0$ 除外，因为这时分子与分母都成了零，于是分式就沒有意义了。我們討論当 x 趋向零时，y 的改变情形。当 x 变符号时，这个分式不变，所以只須求 x 由正値趋向零时（在第一象限），这个分式的極限。如果我們証明了这个極限存在，由以上所述，当 x 由負値趋向零时，就要有同样的極限。注意，这里不能用关于商的極限的定理，因为分子与分母都趋向零。

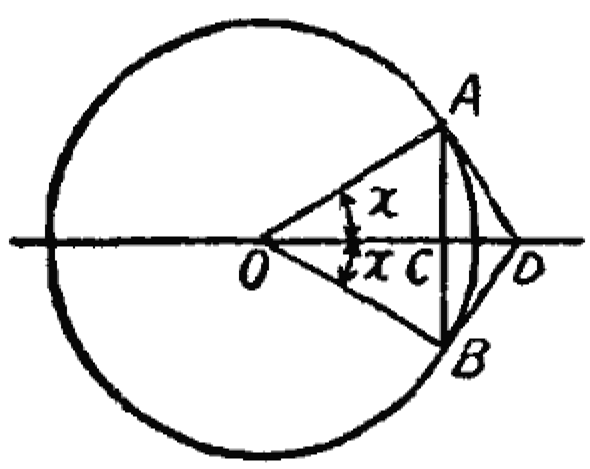


圖 47.

考虑 x，作半徑为一的圓的圓心角。角度的測量以弧度为單位，就有（圖 47）

$$\sin x=\overline{AC},\quad x=\frac{1}{2}\widehat{AB}\ \operatorname{tg} x=\overline{AD},$$

其中 $\overline{AD}$ 是过弧 x 的端点的圆周的切綫。

注意 $\overline{AB}$, $\widehat{AB}$ 与折綫 ADB 的長度,可以写成:

$$2\sin x<2x<2\operatorname{tg} x,$$

把这不等式,用 $2\sin x$ 除,就得到:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

或

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x。\tag{17}$$

但是当 x 趋向零时,显然,綫段 $\overline{OC}$ 所表示的 $\cos x$ 趋向1,就是变量 $\frac{\sin x}{x}$ 經常地在 1 与一个趋向 1 的量之間,所以[27]:

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1。$$

在这个情形下,我們确定条件(16)中談到的数 η。由 1 减掉不等式(17)的三个部分,得到:

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x,$$

这个不等式說明:

$$当\ |1-\cos x|<\varepsilon 时,\quad \left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon。$$

注意,第一象限的一个弧的正弦小于这个弧長,就得到:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2},$$

于是,只須取

$$\frac{x^2}{2}<\varepsilon\quad 就是\quad |x|<\sqrt{2\varepsilon}。$$

所以,在这情形下,可以用$\sqrt{2\varepsilon}$作η。

34. 函数的連續性 假設函数$f(x)$确定于点$x=c$及其左右近傍,我們已經講过这函数在这点連續的定义。現在再叙述一遍。

定义 若当$x\to c$时,函数$f(x)$的極限存在,并且这个極限等于$f(c)$:

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)=f(\lim x), \tag{18}$$

就說:当$x=c$时(在点$x=c$),$f(x)$是連續的。

这就相当于:左右两个極限$f(c-0)$与$f(c+0)$存在,并且彼此相等,而又都等于$f(c)$,就是$f(c-0)=f(c+0)=f(c)$。由[32],上述定义的条件就相当于:当任意給定一个正数ε时,就有这样一个正数η存在,使得

$$\text{当}\ |c-x|<\eta\ \text{时},\quad |f(c)-f(x)|<\varepsilon。 \tag{19}$$

注意,由于这个正数ε是可以随意选擇的,所以在这定义中我們可以用$|f(c)-f(x)|\leqslant\varepsilon$替代$|f(c)-f(x)|<\varepsilon$。这个注解适用于以前所有的类似的定义,特别是无穷小量的定义与極限的定义。并且也适用于以后与这相类似的定义。

差$x-c$是自变量的改变量,而差$f(x)-f(c)$是对应的函数的改变量;于是上述函数的連續性的定义也就相当于:若当自变量的改变量是无穷小时(由値$x=c$起),对应的函数的改变量也是无穷小;就說:这个函数在点$x=c$是連續的。

注意,等式(18)所表达的連續性的性質,告訴我們,求这函数的这个極限时,只要把自变量換上它的極限就成了。

由[28]公式(3)与(4),我們看出,x的多項式与有理函数(多項式的商),当x取任意一个値时,都是連續函数;不过使有理函数的分母等于零的値要除外。

显然,对任意的x永远保持同一个値的[12]函数$y=b$也是連續的。

第一章中的所有初等函数(幂函数,指数函数,对数函数,三角函数与反三角函数),除了使它們成为无穷大的那些值外当 x 取任意一个能使它們确定的值时,都是連續的。例如,当 x 取任意一个正值时,$\log_{10} x$ 是連續的;除了值 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 外,其中 k 是任意一个整数,当 x 取任意一个值时,$\operatorname{tg} x$ 是連續的。

再指出一种函数 u^v,其中 u 与 v 都是 x 的連續函数,并且 u 不取負值。这样的函数叫做幂指函数。除了使得 u 与 v 同时等于零,或 $u=0$ 而 $v<0$ 这些值外,这个函数也具有連續性。

这里我們肯定的說出初等函数的連續性,自然这是須要証明的,不过現在我們不証,以后我們再仔細重談这个問題。

不难証明:任意有限个連續函数的和或乘积也是連續函数;两个連續函数的商,除了自变量的那些使分母为零的值外,也是連續函数。

我們只考虑商的情形。假設,当 $x=a$ 时,函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 是連續的,并且 $\psi(a)\neq 0$。作出函数:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}。$$

应用关于商的極限定理,得到:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)}=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=f(a),$$

于是証明当 $x=a$ 时,$f(x)$的連續性。

再指出一个簡單的例。由于 $y=\sin x$ 是 x 的連續函数;若 b 是一个常量,則 $y=b\sin x$ 也是連續函数;因为它是两个連續函数 $y=b$ (参看上面)与 $y=\sin x$ 的乘积。

現在我們再看函数 $y=\frac{\sin x}{x}$,当 $x=0$ 时,这个函数不确定,但是

我們知道 $\lim\limits_{x\to 0} y=1$。所以，若我們假設当 $x=0$ 时 $y=1$，則在点 $x=0$，y 就是連續函数了。

如果一个函数在某一个点不确定，当 x 趋向这个点时求这函数的極限叫做定未定式。若这極限存在，我們就說，在这个不确定的点，这極限是这个函数的眞值。以后我們有很多定未定式的例子。

35. 連續函数的性質 以上我們講了在給定点 x 的函数的連續性的定义。現在假設一个函数确定在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上。若 x 取这区間上任意一个值时，它都是連續的，就說：它在区間 $[a, b]$ 上是連續的。这里要指出，在这区間的端点 $x=a$ 与 $x=b$ 这函数的連續性，是下面的意义：

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a), \quad \lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)。$$

所有的連續函数都具有下面的性質：

1. 若函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續，則在这区間上，x 至少有这样一个值存在，使 $f(x)$ 取它的最大值，并且 x 至少也有这样一个值存在，使 $f(x)$ 取它的最小值。

2. 若函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續，$f(a)=m$，$f(b)=n$，并設 k 是 m 与 n 之間的任意一个值，則在区間 $[a, b]$ 上，x 至少有这样一个值存在，使得 $f(x)$ 的值等于 k；特別是，若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 不同号，則在这区間 $[a, b]$ 內，x 至少有这样一个值存在，使得 $f(x)$ 的值为零。

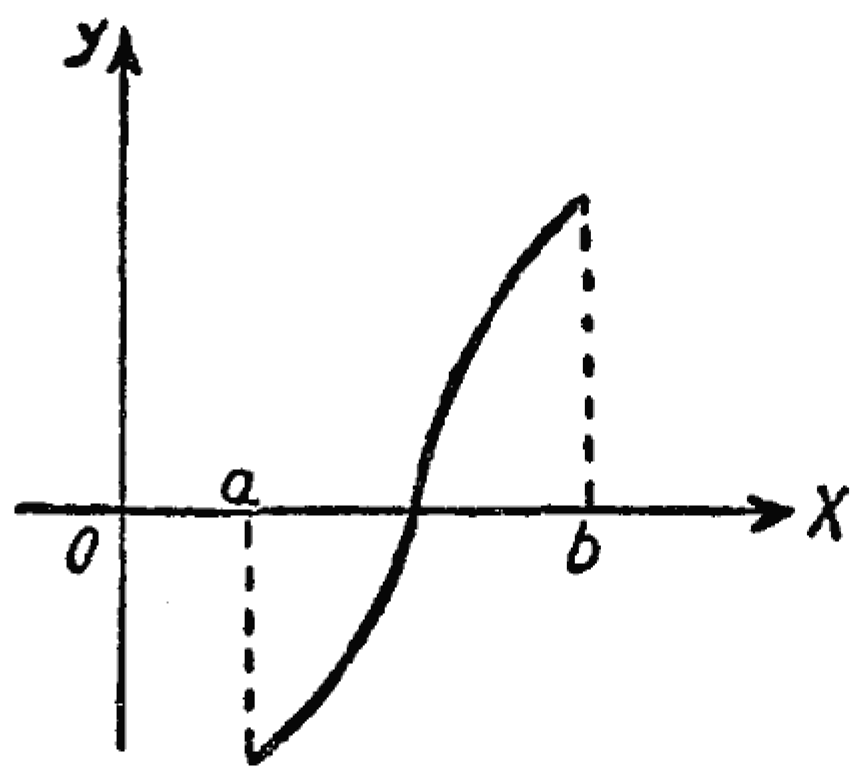


圖 48.

如果我們注意到对应于連續函数的圖形是連續曲綫，这两个性質就显然直接成立。自然这个說法不可以用作証明。看起来很明显的連續曲綫的概念，細致研究起来却是非常复杂的。这两个以及下面的第三个性質的严格証明要用无理数的理論作基础。我們現在不証。

在这一节的最后几段中，我們再講清楚：无理数的理論及其与極限論的联系，以及連續函数的性質。注意：連續函数的第二个性質也可以叙述如下：当 x 由 a 到 b 連續改变时，連續函数 $f(x)$ 至少有一次經过在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之間的任意一个数。

圖 48 与 49 各表示一个在区間 $[a, b]$ 上的連續函数的圖形，其中 $f(a)<0$ 而 $f(b)>0$，在圖 48 上圖形与 OX 軸交一次，当 x 取这个对应的值时，函数 $f(x)$ 等于零。在圖 49 上，这样的值就不只一个，而有三个。

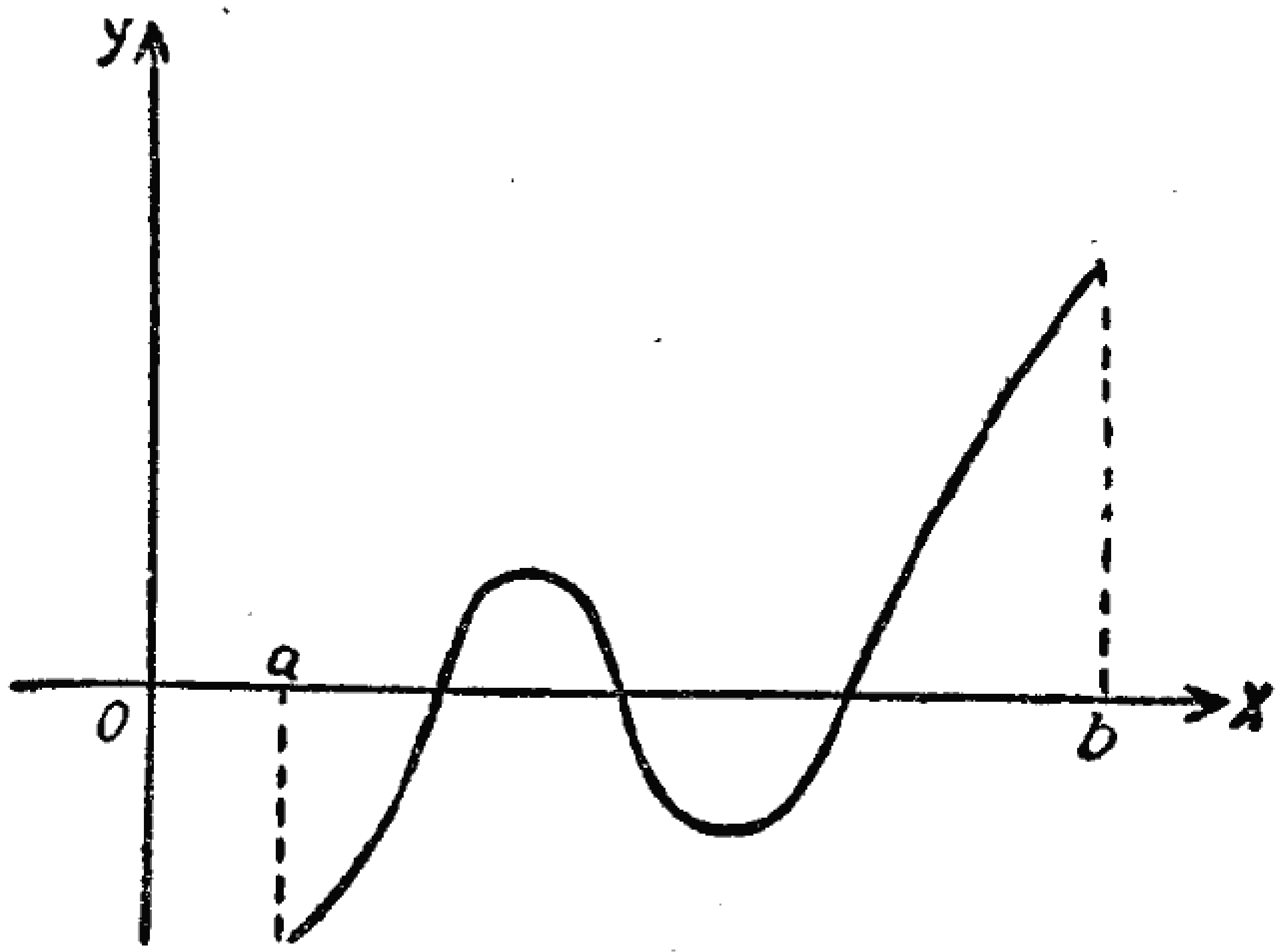


圖 49.

現在我們講連續函数的第三个性質，这个性質不如前两个来得明显。

3. 若 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續，且 $x=x_0$ 是 x 在这区間上的一个值，則由条件(19)[**34**](用 x_0 替代 c)，当任意給定一个正数 ε 时，就有这样一个依賴于 ε 的 η 存在，使得

$$\text{当 } |x-x_0|<\eta \text{ 时，}\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

这里我們自然算作 x 也是在这区間上的(例如，若 $x_0=a$，則 x 只有大于 a 的值；若 $x_0=b$，則 $x<b$)，不过这个数 η 不只是依賴于 ε，而且它

也依賴于在我們考虑的区間上所取的值 $x=x_0$。連續函数的第三个性質断定，事实上，当任意給定 ε 时，对于在区間 $[a, b]$ 上的所有的 x 的值，有一个共同的 η 存在。換句話說就是：若 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續則当任意給定一个正数 ε 时，就有这样一个正数 η 存在，使得在区間 $[a, b]$ 上的任意两个值 x' 与 x''，如果滿足不等式

$$|x''-x'|<\eta, \tag{20}$$

就有

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon。 \tag{21}$$

这个性質叫做一致連續：如此，若一个函数在区間 $[a, b]$ 上連續，則它在这区間上一致連續。

还要注意：这里我們假設 $f(x)$ 連續，不仅是当 x 取区間 $[a, b]$ 内的所有的值时；并且当 $x=a$ 与 $x=b$ 时，它也連續。

我們由一个例来闡明一致連續的性質。先給上面的不等式換个样子，用 x 替代 x'，$x+h$ 替代 x''。这时 $x''-x'=h$ 就是自变量的改变量，而 $f(x+h)-f(x)$ 就是对应的函数的改变量。一致連續性可以写成：

$$\text{当 } |h|<\eta \text{ 时，}\quad |f(x+h)-f(x)|<\varepsilon,$$

其中 x 与 $(x+h)$ 是在区間 $[a, b]$ 上的任意两个点。

例，考虑函数，

$$f(x)=x^2。$$

在这情形下，

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2。$$

当任意給定 x 一个値时，若自变量的改变量 h 趋向零，則函数的改变量 $(2xh+$ $+h^2)$ 也趋向零。这就再一次肯定了[34]：当 x 取任意一个値时，这个函数是連續的。例如在区間 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 上，它是連續的。現在我們要証明在这个区間上，它也是一致連續的，对应于一个 ε 我們就需要选擇一个数 η，使得当 x 与 $x+h$ 在区間 $[-1, 2]$ 上而 $|h|<\eta$ 时，滿足不等式

$$|2xh+h^2|<\varepsilon。 \tag{22}$$

我們知道

$$|2xh+h^2|\leqslant|2xh|+h^2=2|x|\cdot|h|+h^2。$$

但是在区間$[-1, 2]$上，$|x|$最大的值是 2，所以我們可以写成：

$$|2xh+h^2|\leqslant 4|h|+h^2。$$

我們算作 $|h|<1$，于是 $h^2<|h|$，上面的不等式就可以写成

$$|2xh+h^2|<4|h|+|h| \quad 或 \quad |2xh+h^2|<5|h|。$$

若是讓 $|h|$ 滿足条件 $5|h|<\varepsilon$，不等式 (22) 就一定成立。因为以上我們設 $|h|<1$，于是 h 应当滿足两个不等式

$$|h|<1 \quad 与 \quad |h|<\frac{\varepsilon}{5}。$$

因此，我們可以取 1 与 $\frac{\varepsilon}{5}$ 两个数中較小的一个作 η。当 ε 很小时（只要 $\varepsilon<5$）我們应当取 $\eta=\frac{\varepsilon}{5}$，于是在任何情形下，当給定 ε 时，对于区間$[-1, 2]$上的所有的 x，我們能求出同一个 η 来。

不連續的函数或是只在一个区間內連續的函数就可能沒有上述的性質，考慮圖 46 表示的函数。它确定于区間$[-1, 1]$上，但是当 $x=0$ 时，是不連續的。它有与 1 願意多近就多近的值，但是沒有等于 1 的值，也沒有大于 1 的。如此这个函数的值就沒有最大的。同理也沒有最小的，初等函数 $y=x$ 在区間$[0, 1]$內也沒有最大的与最小的值。若在閉区間$[0,1]$上考慮这个函数，則当 $x=0$ 时，它有最小的值，而当 $x=1$ 时，它有最大的值。再考慮一个函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，它在左边开的区間 $0<x\leqslant 1$ 上是連續的。当 x 趋向零时，$\frac{1}{x}$无限增大，$\sin\frac{1}{x}$ 在 (-1) 与 $(+1)$ 之間擺动，于是当 $x\to+0$ 时，$\sin\frac{1}{x}$ 沒有極限。这个函数在区間 $0<x\leqslant 1$ 上沒有一致連續性。考慮两个值：$x'=\frac{1}{n\pi}$ 与 $x''=\frac{2}{(4n+1)\pi}$，其中 n 是正整数。当任意选定 n 时，这两个值都在所述的区間上。并且

$$f(x')=\sin n\pi=0,$$

$$f(x'')=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1。$$

如此 $$f(x'')-f(x')=1 \quad 而 \quad x''-x'=\frac{2}{(4n+1)\pi}-\frac{1}{n\pi}。$$

当正整数 n 无限增加时，差 $x''-x'$ 趋向零，而差 $f(x'')-f(x')$ 永远等于 1。由此看出，对于区間 $0<x\leqslant 1$ 来講，若选定公式(21)中的 $\varepsilon=1$，就沒有这样一个正数 η 存在，使得由 (20) 可以推得 $|f(x'')-f(x')|<1$。

再取一个函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，当 $x\to+0$ 时，第一个因子 x 趋向零，而第二个

因子的絕对值不超过 1，所以 [32] 当 $x\to+0$ 时，$f(x)\to0$，当 $x=0$ 时，第二个因子沒有意义，但是如果我們补充上 $f(0)=0$，就是算作当 $0<x\leqslant1$ 时，$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，而 $f(0)=0$；就得到一个在閉区間[0, 1] 上的連續函数。显然，除去 x 等于零以外，当 x 取任意的值时，函数 $\sin\frac{1}{x}$ 与 $x\sin\frac{1}{x}$ 显然都是連續的。

36. 无穷小量的比較，无穷大量的比較 若 α 与 β 是一齐趋向零的两个量，則求比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 的極限时，不能用关于商的極限的定理。我們算作变量 α 与 β 趋向零，但是不取零作値。若比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 趋向一个异于零的有限極限，則比 $\frac{\alpha}{\beta}$ 也趋向一个异于零的有限極限。在这情形下，我們說：α 与 β 是同級的无穷小。若比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 的極限等于零。就說 β 是个比 α 較高級的无穷小，而 α 是个比 β 較低級的无穷小。若比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 趋向无穷大，則 $\frac{\alpha}{\beta}$ 趋向零，就是 β 是个比 α 較低級的无穷小，而 α 是个比 β 較高級的无穷小。容易証明：若 α 与 β 是同級的无穷小，而 γ 是个比 α 較高級的无穷小，則它也是个比 β 較高級的无穷小。由于 $\frac{\gamma}{\alpha}\to0$，并且比 $\frac{\alpha}{\beta}$ 有一个异于零的有限極限；根据等式 $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$，应用关于乘积的極限的定理，直接推知 $\frac{\gamma}{\beta}\to0$，于是得証。

現在指出同級无穷小的一个重要的情形。若 $\frac{\beta}{\alpha}\to1$ $\left(\text{同时也有}\ \frac{\alpha}{\beta}\to1\right)$，則无穷小量 α 与 β 叫做相抵的。由等式 $\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}-1$，直接推知，$\alpha$ 与 β 的相抵性相当于說差 $\beta-\alpha$ 是个比 α 較高級的无穷小。由等式 $\frac{\beta-\alpha}{\beta}=1-\frac{\alpha}{\beta}$，同理推知，这个相抵性也相当于 $\beta-\alpha$ 是个比 β 較高級的无穷小。

若 k 是一个正的常数，$\frac{\beta}{\alpha^k}$ 趋向一个异于零的有限極限，就說 β

是个关于 α 的 k 級无穷小。若 $\frac{\beta}{\alpha^k}\to c$，$c$ 是一个异于零的数，則 $\frac{\beta}{c\alpha^k}\to 1$。就是 β 与 $c\alpha^k$ 是相抵的无穷小，于是推知，差 $\gamma=\beta-c\alpha^k$ 是个比 β（或是比 $c\alpha^k$）較高級的无穷小。若取 α 作基本的无穷小，則等式：$\beta=c\alpha^k+$ $+\gamma$，其中 γ 是个比 $c\alpha^k$ 較高級的无穷小，表明把无穷小量 β 分离为一个无穷小 $c\alpha^k$（与 α 的比的最簡形式）与一个余項 γ，这个 γ 是个比 β 較高級的无穷小（或是比 $c\alpha^k$）。

无穷大量 u 与 v 的比較可用类似的办法。若 $\frac{v}{u}$ 趋向一个异于零的有限極限，則 u 与 v 叫做同級的无穷大。若 $\frac{v}{u}\to 0$，則 $\frac{u}{v}\to\infty$。在这情形下就說：v 是一个比 u 較低級的无穷大，或者說 u 是一个比 v 較高級的无穷大。若 $\frac{v}{u}\to 1$，則 u 与 v 叫做相抵的。若 k 是一个正的常数，并且 $\frac{v}{u^k}$ 有一个异于零的有限極限，就說 v 是个关于 u 的 k 級无穷大。所有关于无穷小的叙述，对无穷大也都成立。

还要指出，若比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 或 $\frac{v}{u}$ 根本沒有極限，則对应的无穷小或无穷大叫做不可比的。

37．例

1．以前我們講过

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

就是 $\sin x$ 与 x 是相抵的无穷小，于是推知，差 $\sin x-x$ 是个比 x 較高級的无穷小，以后我們就知道这个差与 $-\frac{1}{6}x^3$ 是相抵的。它是一个关于 x 的三級无穷小。

2．現在我們証明差 $1-\cos x$ 是一个关于 x 的二級无穷小。实际上，应用三角公式与初等变换，就得到：

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2。$$

若 $x\to 0$ 則 $\alpha=\frac{x}{2}$ 也趋向零，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

就是，$1-\cos x$ 是一个关于 x 的二級无穷小。

3. 由公式

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{x}{\sqrt{1+x}+1},$$

推知
$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1},$$

因此
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2},$$

就是，$\sqrt{1+x}-1$ 与 x 是同級的无穷小，而 $\sqrt{1+x}-1$ 与 $\frac{1}{2}x$ 是相抵的。

4. 現在我們証明 m 次的多項式是关于 x 的 m 級无穷大。实际上，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{x^m}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{a_m}{x^m}\right)=a_0。$$

不难看出，两个同次的多項式，当 $x\to\infty$ 时，是同級的无穷大。它們的比有个極限，就是它們的最高次項的系数的比。例如：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-3}{7x^2+2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{5}{7}。$$

若两个多項式的次数不等，則当 $x\to\infty$ 时次数高的一个，与另一个比較，是个較高級的无穷大。

33. 数 e 現在我們考虑一个对以后很重要的例子，就是考虑一个变量，它依序取值：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

其中 n 取正整数上升趋向 $+\infty$，应用牛頓二項式公式得到：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\cdots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)。$$

这样写成的和含有$(n+1)$个正項，当整数n增加时，第一，項的数目要增加，第二，以前的每一項本身要增加，因为在一般項的表达式

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$ ①

中，$k!$ 保持不变，而当n增加时，每一个括号内的差要增大。如此我們看出，当n增加时，所考虑的变量也增加。因此，为要肯定这个变量的極限存在，只要証明它是有界的就成了。

在一般項的表达式中用1替代每一个差，并且用2替代$k!$中每一个$\geqslant 3$的因子。如此替代的話，每一項都变大了。再用等比級数和的公式就得到：

---

① 乘积$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$是由分式

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

得来的，只要把分子的k个因子，每个用n除一下，并注意分母上因子n的数目恰好等于k就成了。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

就是,变量$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$是有界的,我們用 e 記这个变量的極限:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\text{ 取正整数})。 \tag{23}$$

显然,这个極限不大于 3 。

現在証明,当 x 取任意的值趋向 $+\infty$ 时,表达式$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$也趋向这个極限 e。

設 n 是 x 所包含的最大的整数,就是

$$n\leqslant x<n+1。$$

显然,这数 n 与 x 共同趋向 $+\infty$,注意若 $a>b>1$ 而 $c>d>0$ 則 $a^c>b^d$,我們可以写成

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}。 \tag{24}$$

但是,由等式(23):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e,$$

并且

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=e\cdot1=e。$$

如此,不等式(24)两端的两項都趋向極限 e,所以中間的一項,也要趋向这个極限,就是

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e。\tag{25}$$

我們只剩下要考虑 x 趋向 $-\infty$ 的情形。

用一个新的变量 y 替代 x，假設：

$$x=-1-y,$$

于是
$$y=-1-x。$$

由后一个等式看出，当 x 趋向 $-\infty$ 时，y 趋向 $+\infty$。

在表达式 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 中，如此替换变量，并注意等式(16)就得到：

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y}{-1-y}\right)^{-1-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{1+y}=$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)\right]=e\cdot1=e。$$

如果 x 趋向带有任意符号的 ∞，亦就是 $|x|\to\infty$，則由上述推出，此时有：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e。\tag{26}$$

以后我們可指出計算这个数 e 到任意精确度的簡便方法。可以証明，这个数是个无理数，准确到七位小数的近似値是 $e=2.7182818\cdots$。

現在我們不難求出表达式 $\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$ 的極限，其中 k 是一个給定的数。应用冪函数的連續性，得到：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k=e^k,$$

其中用 y 記商 $\frac{x}{k}$，它与 x 一齐趋向 ∞。

在复利的理論中，会遇到这样的表达式 $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$。

假設，每年計算利息一次。若本金是 a，利率是 $p\%$，一年末的本

利和，就是：

$$a(1+k),$$

其中
$$k=\frac{p}{100};$$

第二年末就是：

$$a(1+k)^2,$$

一般来講，m 年末就是：

$$a(1+k)^m。$$

現在假設每过 $\frac{1}{n}$ 年計算利息一次，这个数 k 就要減小 n 倍，而时間的区間数就要增加 n 倍，于是 m 年末的本利和就是：

$$a\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn}。$$

最后，設 n 无限增加，就是計算利息的时間区間无限減小以至于連續的計算。m 年末的本利和就是：

$$\lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn} = \lim_{n\to\infty} a\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}\right]^{m} = ae^{km}。$$

取这个数 e 作对数的底。这样的对数叫做自然对数，平常就只用 log 来記，不必写上底。

当变量 x 趋向零时，表达式 $\frac{\log(1+x)}{x}$ 中，分子与分母都趋向零。定这个未定式，引用一个新变量 y，設

$$x=\frac{1}{y} \quad 就是 \quad y=\frac{1}{x},$$

于是当 $x\to 0$ 时，y 趋向无穷大，再应用对数的連續性以及公式 (26)，就得到：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to\infty} y\log\left(1+\frac{1}{y}\right)=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=\log e=1。$$

这里显示出为什么願意选它作对数的底。这正像取弧度作單位来测量角度时，表达式 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 的眞值等于 1 一样。在自然对数的情形，表达式 $\frac{\log(1+x)}{x}$ 在 $x=0$ 的眞值也等于 1。

由对数的定义，有下面的关系式：

$$N=a^{\log_a N}。$$

用 e 作底求对数，就得到

$$\log N=\log_a N\cdot\log a \quad 或 \quad \log_a N=\log N\cdot\frac{1}{\log a}。$$

这个关系式表明，当任意一个数 a 作底时，N 的对数可以通过自然对数来表达。因子 $M=\frac{1}{\log a}$ 叫做用 a 作底的对数系的模，当 $a=10$ 时，准确到七位小数的近似值是：

$$M=0.4342945\cdots。$$

39. 未証明的命題 当叙述極限理論时，我們留下些命題沒有証明，現在总述如下：單調有界变量的極限存在[**30**]，極限存在的必要且充分条件（勾犀判别法）[**31**]以及在閉区間上連續函数的三个性質[**35**]。这些命題的証明要以实数理論与它們的演算为基础，由下一段开始我們講实数的理論幷証明上述几个命題。

現在再介紹一个新的概念。幷且再叙述一个命題，这个命題也留在以后証明。

若有一个由有限个实数組成的集合（例如，由一千个实数），則它們中必有一个最大的与一个最小的数。若有一个实数的无穷集合，縱然这些数都包含在一个确定的区間里，这些数中也不一定总有一个最大的与一个最小的。例如，若我們考虑所有的在 0 与 1 之間的实数組成的集合，但 0 与 1 不屬于这个集合，則这个数集合中就沒有一个最大的，也沒有一个最小的。无論我們取一个与 1 多么近但小于 1 的数，在所取的数与 1 之間总可以找到另外一个数。在这情形下，不屬于数集

合的 0 与 1，具有下述的性質：这个集合中沒有大于 1 的数，但是，当任意給定一个正数 ε 时，总有大于 $(1-\varepsilon)$ 的数。同样的，这个集合中沒有小于零的数，但是任意給定一个正数 ε 后，总有小于 $(0+\varepsilon)$ 的数。这两个数 0 与 1 各叫做上述实数集合的下确界与上确界。我們由这个例推广到一般的情形。

由这例子我們轉到一般的情形。

設有某一个实数集合 E，若有这样一个数 M 存在，使得屬于集合 E 的所有的数 $\leqslant M$，就說它是有上界的。同样的，若有这样一个数 m 存在，使得屬于集合 E 的所有的数 $\geqslant m$，就說这个集合是有下界的。若一个集合有上界也有下界，就簡称它是有界的。

定义 若有这样一个数 β 存在，使得集合 E 中沒有大于 β 的数，但是当任意給定一个正数 ε 时，总有大于 $(\beta-\varepsilon)$ 的数，則 β 叫做集合 E 的上确界。若有这样一个数 α 存在使得集合 E 中沒有小于 α 的数，但是当任意給定一个正数 ε 时，总有小于 $(\alpha+\varepsilon)$ 的数，則 α 叫做集合 E 的下确界。

若集合 E 沒有上界，就是，任意給定一个数，E 中的数总有大于它的，則这个集合沒有上确界。同样的，若集合 E 沒有下界的，則它沒有下确界。若一个集合中有一个最大的数，显然它就是这个集合的上确界。同样的，若一个集合中有一个最小的数，則它就是这个集合的下确界。不过，我們已經看到，无穷集合中的数，不一定总有一个最大的或有一个最小的。但是，可以証明，有上界的集合总有一个上确界，有下界的集合总有一个下确界。还要指出一点：由定义直接推知，上确界或下确界只能有一个。

这一段所述的命題，以后我們常常要用。以下几段，印成小号字，第一遍讀时可以先不念。

40. 实数 現在开始講实数的理論。我們首先从全部有理数的集合出發，就是正負的整数与分数。所有这些有理数依它增加的順序安置好。这时，若 a 与 b

是两个不同的有理数，则它們之間可以插入任意多个有理数。实际上，設 $a<b$，我們引入正的有理数 $r=\frac{b-a}{n}$，其中 n 是任一正整数。有理数 $a+r$, $a+2r$, $\cdots$, $a+(n-1)r$ 就在 a 与 b 之間，由于正整数 n 的选擇是随意的，于是証明了我們的肯定。

任意把全部有理数分作两組，使它們一組（第一組）中的任意一个数小于另一組（第二組）中的任意一个数；如此一分，我們就叫做一个有理数的分划。这样作，显然，若一个数在第一組，则任意一个小于它的数也在第一組；若一个数在第二組，则任意一个大于它的数也在第二組。

假設，第一組的数中有一个最大的，则根据上述有理数集的性質，就肯定第二組的数中沒有最小的。同样的，若第二組的数中有一个最小的，则第一組的数中沒有最大的。若一个分划的第一組的数中有一个最大的，或是第二組的数中有一个最小的，则这个分划叫做第一类分划。这样的分划很容易作。随便取一个有理数 b，讓所有的小于 b 的有理数都在第一組，所有的大于 b 的有理数都在第二組，至于 b 呢，或者讓它在第一組（它就是最大的），或者讓它在第二組（它就是最小的）；这样就作成一个第一类分划。取所有的有理数作 b，如此就得到所有的第一类分划，我們就說这样一个第一类的分划定义一个有理数 b，b 就是第一組的最大的或是第二組的最小的。

但是还有第二类分划，这时第一組沒有最大的数，而第二組也沒有最小的数。例如，我們作这样一个分划。讓所有的負有理数，零以及平方小于 2 的正有理数都在第一組，而平方大于 2 的正有理数在第二組。由于沒有一个有理数平方等于 2，于是这样就把所有的有理数都分配好了，我們就得到一个分划。現在証明在这第一組中沒有最大的数。这只要証明：若一个数 a 屬于第一組，就一定有大于 a 且也屬于第一組的数。若 a 是負的或是零，这显然是对的，假設 $a>0$，由作成第一組的条件 $a^2<2$，我們引入一个正有理数 $r=2-a^2$，証明可以确定适当小的正有理数 x，使得 $(a+x)$ 也屬于第一組，就是滿足不等式

$$2-(a+x)^2>0 \quad \text{或} \quad r-2ax-x^2>0,$$

就是要找这样一个正有理数，使它滿足不等式：

$$x^2+2ax<r_{\circ}$$

先算作 $x<1$，于是 $x^2<x$，所以 $x^2+2ax<x+2ax=(2a+1)x$，就是 x 須要滿足不等式：

$$(2a+1)x<r,$$

如此 x 就由两个不等式：

$$x<1 \quad 与 \quad x<\frac{r}{2a+1}$$

确定。

显然，滿足这两个不等式的正有理数 x 可以求出随便多少个来。同理可証这个分划的第二組沒有最小的数。所以我們所作的例是一个第二类分划。实数理論的基本要点就在于下述的規定：我們算作任意一个第二类分划定义一个新的数——无理数。不同的第二类分划定义不同的无理数。不难想到；上例中的第二类分划所定义的无理数，就是平常我們記作 $\sqrt{2}$ 的。

現在可以把所有如此引入的无理数与以前的有理数排成增加的順序，这順序我們还可用 OX 軸上的点来直观地表示。若 α 是一个无理数，把定义这个无理数的分划的第一組記作 I (α)，把第二組記作 II (α)。我們把这个数 α 算作是大于 I(α) 中的任意一个数，而小于 II(α) 中的任意一个数。如此，任意一个无理数就可以与任意一个有理数比較大小。余下还要定义两个不同的无理数 α 与 β 的大小。只要 α 与 β 不同，I(α) 与 I(β) 就不能全同，而一定是其中一个包含另一个。假設 I(β) 包含 I(α)，就是 I(α) 中任意一个数都屬于 I(β)，但是 I(β) 中有的数屬于 II(α)。这时我們算作 $\alpha<\beta$，这就是定义。如此，全部有理数与无理数，換句話說，就是全部实数的集合，就依照大小顺序安置好了。此时，应用上面給的定义，不难証明：若 a, b 与 c 是三个实数，$a<b$ 而 $b<c$，則 $a<c$。

首先我們指出一个上述定义的一个簡單推論，設 α 是一个无理数。由于組 I(α) 沒有最大的数，組 II(α) 沒有最小的数，則显然，α 与任意一个有理数 a 之間有任意多的有理数。現在設 $\alpha<\beta$ 是两个不同的无理数，I(β) 中有些有理数在 II(α) 中，于是直接推知 α 与 β 之間也应当有任意多的有理数，一般来講就是：两个不同的实数之間总有任意多个有理数。

現在我們証明无理数理論的基本定理，考虑全部实数集合，并任意作这个数域的分划，就是把所有的实数(不只是有理数)，分作两組，I 与 II，使得 I 中任意一个数小于 II 中任意一个数。現在証明：此时，一定是或者 I 有最大的数，或者 II 有最小的数（像有理数域的分划一样，这两种情形不可能同时都有）。为此，用 I′ 記 I 中所有的有理数的集合，II′ 記 II 中所有的有理数的集合。这两組 (I′, II′) 确定一个有理数域的分划，而这个分划确定一个实数 α（有理数或是无理数）。为确定起見，假設作上述实数的分划时，α 屬于組 I，現在証明，α 就是組 I 中的最大的。实际上，假若不如此，則組 I 中有一个大于 α 的实数 β 存在。取 α 与 β 之間的

一个有理数 $r(\alpha<r<\beta)$，它应当屬于組 I，于是屬于組 I'。

如此，确定实数 α 的分划 (I', II') 的第一組中就要出現一个大于 α 的有理数 r。这是不可能的。所以我們假設 α 不是組 I 中最大的数是不对的。同理可証若 α 在組 II 中，則它应当是 II 中的最小的。

于是我們証明了下面的基本定理。

基本定理　任意作一个实数域的分划时，一定是，或者第一組中有一个最大的数，或者第二組中有一个最小的数。

很容易給出实数理論的几何意义，我們先只考慮 OX 軸上，坐标是有理数的点。在有理数域作一个分划就对应于把直綫 OX 切断成两个半綫。若在一个坐标是有理数的点处切断，則得到一个第一类分划，并且切断所在的点的坐标，不是第一組的最大的数就是第二組的最小的数；若在一个坐标不是有理数的点切断，則得到一个第二类分划，它定义一个无理数，这个数被取作切断所在的点的坐标。用无理数的坐标填滿了这样的空点之后，直綫的任意分划就可在具有实数坐标的点發生。所有这些只是几何的解釋，并不能用作証明。由所給定义得到的无理数 α，不难用对应于这个数的十进位无穷小数来記[2]，只取这个小数的前有限位应当是一个屬于 $\mathrm{I}(\alpha)$ 的有理数。但是若这前有限位的最后一位数加一，則对应的有理数就应当在 $\mathrm{II}(\alpha)$ 中了。

41. 实数的运算　无理数的理論中，除去上面所給的定义与基本定理外，还包含无理数运算的定义，并研究这些运算的性質，給这些运算的定义时，我們要以有理数域的分划为根据。但是这样的分划不只确定无理数，而且也确定有理数（第一类分划），这些运算的定义就要普遍的适用于所有的实数，并且对有理数来用时，这些定义要与平常的定义一致。下面叙述这个問題时，我們只是一般的講。

我們先作一个附注。設 α 是一个实数。任意取一个（小的）正有理数 r，由 $\mathrm{I}(\alpha)$ 中一个有理数 a 起始作等差級数：

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \cdots,\ a+nr,\ \cdots。$$

当 n 相当大时，数 $(a+nr)$ 就在 $\mathrm{II}(\alpha)$ 中，于是推知，就有这样一个正整数 k 存在，使得 $[a+(k-1)r]$ 屬于 $\mathrm{I}(\alpha)$，而 $[a+kr]$ 屬于 $\mathrm{II}(\alpha)$；就是：

附注　任意給定一个正有理数 r，无論多么小，可以在任意一个有理数域分划的每一組中，各找出一个数来，使得这两个数之差等于 r。

現在我們講加法的定义。設 α 与 β 是两个实数。設 a, a', b, b' 各为 $\mathrm{I}(\alpha)$，$\mathrm{II}(\alpha)$，$\mathrm{I}(\beta)$，$\mathrm{II}(\beta)$ 中任意一个数。考慮所有的可能的和 $(a+b)$ 以及 $(a'+b')$。在任何情形下，有：$a+b<a'+b'$。作一个新的有理数分划，讓比所有 $(a+b)$ 都大

的全部有理数放在第二組，讓其余的有理数都在第一組。这时，第一組中任意一个数小于第二組中任意一个数；并且所有的$(a+b)$都在第一組，$(a'+b')$都在第二組。所作的新分划确定一个实数，我們就叫它做和$(\alpha+\beta)$。这个数显然$\geqslant$所有的$a+b$，而$\leqslant$所有的$a'+b'$。注意，由上面的附注，数a与a'之差可以等于一个任意小的正有理数，b与b'也是如此；于是不难証明，滿足上述两个不等式的数只能有一个。我們知道有理数的加法滿足几个法則，容易証实这里确定的加法也滿足这些法則：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha,\quad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\quad \alpha+0=\alpha。$$

例如，为要得到$\beta+\alpha$，我們不作和$(a+b)$，$(a'+b')$，而作和$(b+a)$，$(b'+a')$，因为我們知道有理数的加法滿足交換律，所以这些和与以前的和是相同的。

設α是一个实数。我們用下面这个分划定义数$(-\alpha)$：讓所有的$\mathrm{II}(\alpha)$中的数，变了号，放在第一組；所有的$\mathrm{I}(\alpha)$中的数，变了号，放在第二組。如此，实际上得到一个有理数分划，并且不难証实，这样定义的数$(-\alpha)$滿足：

$$-(-\alpha)=\alpha,\quad \alpha+(-\alpha)=0。$$

并且若$\alpha>0$，則$-\alpha<0$；若$\alpha<0$，則$-\alpha>0$。α与$(-\alpha)$两个数中大于零的那个叫做这个数α的絕对值。像以前一样，数α的絕对值記做$|\alpha|$。

現在來講乘法。設α与β是两个正实数，就是$\alpha>0$，$\beta>0$。設a是$\mathrm{I}(\alpha)$中任意一个正数，b是$\mathrm{I}(\beta)$中任意一个正数，a'与b'各为$\mathrm{II}(\alpha)$与$\mathrm{II}(\beta)$中任意一个数(它們一定是正的)。作一个新的分划，讓比所有乘积ab都大的全部有理数在第二組，其余的有理数在第一組。于是所有的ab都在第一組，而所有的$a'b'$都在第二組，这个新的分划定义一个实数，我們叫它做乘积$\alpha\beta$。这个数$\geqslant$所有的ab而$\leqslant$所有的$a'b'$，并且只有这一个实数滿足这两个不等式。

若两个数α与β中，有一个是負的或者都是負的，則我們引用通常的乘法符号規則，把它們的乘积归結到上面的情形，就是我們設$\alpha\beta=\pm|\alpha||\beta|$，若$\alpha$与$\beta$都小于零，就取$(+)$号；若一个小于零，一个大于零，就取負号。

与0相乘时，取$\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$作定义。不难驗証乘法的基本法則：

$$\alpha\beta=\beta\alpha,\quad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma),\quad \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma。$$

若几个因子中至少有一个等于零，在这情形下而只有在这情形下，这几个因子的乘积等于零。

減法定义为加法的逆运算，就是$\alpha-\beta=x$相当于$x+\beta=\alpha$。在这个等式的两边都加上$(-\beta)$，根据上述的加法性質，我們得到：$x=\alpha+(-\beta)$，就是說差要由这个公式定义，于是減法的运算就化成加法了。余下要檢驗，所得x的表达式确实滿

足条件 $x+\beta=\alpha$，但这可由加法的性質直接推出。还要指出，下面这个普通減法的性質是正确的：不等式 $\alpha>\beta$ 与 $\alpha-\beta>0$ 同效。在講除法之前，我們先定义一个已知数的倒数。若 a 是异于零的有理数，則数 $\frac{1}{a}$ 叫做它的倒数。設 α 是一个异于零的实数。先設 $\alpha>0$ 并設 a' 是 $\mathrm{II}(\alpha)$ 中任意一个数（它是一个正有理数）。我們用下面的分划定义 α 的倒数：讓所有的負数，零与所有的数 $\frac{1}{a'}$ 在第一組，其余的数在第二組。設某一个正数 c_1，屬于这个新分划的第一組。也就是 $c_1=\frac{1}{a_1'}$，其中 a_1' 在 $\mathrm{II}(\alpha)$ 中。任意取一个正有理数 $c_2<c_1$。它就可以表示成 $c_2=\frac{1}{a_2'}$ 其中 a_2' 是个有理数而且 $a_2'>a_1'$，就是 a_2' 也屬于 $\mathrm{II}(\alpha)$。換句話說就是，若某一个正数屬于这个新分划的第一組，則任意一个小于它的正有理数也屬于这个第一組。由定义所有的負数与零也都在第一組。因此，我們所作的定义 α 的倒数的分划具有这个基本条件，就是第二組中任意一个数大于第一組中任意一个数。这个 α 的倒数記作 $\frac{1}{\alpha}$。

若 $\alpha<0$，则我們用下面的公式定义它的倒数：

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{|\alpha|}。$$

应用乘法的定义，得到

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1。$$

現在我們講除法，这是乘法的逆运算，就是 $\alpha:\beta=x$ 相当于 $x\beta=\alpha$；像减法一样，不难証明，若 $\beta\neq0$，則这个商由 $x=\alpha\frac{1}{\beta}$ 得到，如此，除法就化为乘法。用零除是不可能的。

正整数次乘方可以化为乘法来作。开方定义为乘方的逆运算。設 α 是一个正实数，而 n 是一个大于 1 的整数。作这样一个有理数分划：讓所有的負数，零与所有的 n 次方小于 α 的正数在第一組，其余的数在第二組。应用乘法的定义，不难証明，这个分划所定义的正数 β 滿足条件 $\beta^n=\alpha$ 就是 β 是根 $\sqrt[n]{\alpha}$ 的算术值。若 n 是偶数；則第二个值是 $(-\beta)$。类似的可以确定一个負实数的奇次根（一个答案）。关于指数函数我們以后再仔細講。最后还要指出下面这个重要的結論：由于这些运算的基本法則都成立，于是所有代数中的法則与恒等式，当所含的字母了解作实数时，也都成立。

42. 数集的确界；極限存在的判别法 現在証明[39]中所述的关于实数集合的确界的定理。

定理 若实数集合 E 有上界，则它有一个上确界；若 E 有下界，则它有一个下确界。

我們只証明这定理的第一部分。已知 E 中所有的数小于某一个数 M。用下面的方法作一个实数分划：大于 E 中所有的数的一切数在第二組，其余的数在第一組。例如，設 $p\geqslant 0$，所有的数 $(M+p)$ 都在第二組，又如 E 中所有的数都在第一組。設 β 是所作的分划确定的实数。由[40]中基本定理，它或者是第一組中的最大的，或者是第二組中的最小的。現在証明 β 就是 E 的上确界。首先由于所有的 E 中的数都在第一組，所以 E 中沒有大于 β 的数。并且当任意給定 $\varepsilon>0$ 时，E 中一定有大于 $(\beta-\varepsilon)$ 的数，因为假若沒有这样的数，则数 $\left(\beta-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 就大于 E 中所有的数，于是就应当在第二組，但是实际上它 $<\beta$，所以在第一組。于是这个定理得証。显然，若 β 屬于 E，则它是 E 中的最大的数。

現在証明單調有界变量的極限存在[30]。設变量 x 总是增加或者至少它不减。就是，它的任意一个值不小于在它前面的值。此外再設 x 是有界的，就是有这样一个数 M 存在，使得所有的 x 的值都小于 M。考慮全部 x 的值的集合，由上面已經証明的定理，有一个数 β 存在，它是这个集合的上确界。現在証明 β 就是 x 的極限。設 ε 是任意一个正数。根据上确界的定义，可以找出一个 x 的值大于 $(\beta-\varepsilon)$，这时，再由單調性，在它后面的 x 的值就都大于 $(\beta-\varepsilon)$，并且它們不能大于 β，于是根据 ε 的任意性，我們看出 $\beta=\lim x$。同理可証單調减小变量的情形。

在証明勾犀判别法以前[31]，先証一个我們要用的定理。

定理 設有一个有限区間的序列：

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \cdots,\ (a_n,\ b_n),\ \cdots,$$

其中每一个在后面的区間包含在它前面的区間里，就是 $a_{n+1}\geqslant a_n$，$b_{n+1}\leqslant b_n$，并設这些区間的長度趋向零，就是 $(b_n-a_n)\to 0$，在这情形下，当 n 增加时，区間的端点 a_n 与 b_n 趋向于同一个極限。

已知 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots$，并且对任意的 n，$a_n<b_1$，如此，序列 a_1，a_2，$\cdots$ 就是單調而有界的，所以有極限：$a_n\to a$，再由 $(b_n-a_n)\to 0$ 写成 $b_n=a_n+\varepsilon_n$，其中 $\varepsilon_n\to 0$，于是推知 b_n 也趋向一个極限，而且这个極限就是 a。

現在来証明勾犀判别法。我們只限于变量的值是編号的情形：

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \tag{27}$$

要証明，序列 (27) 有極限存在的必要且充分条件如下：对于任意給定的一个正数 ε，有这样一个 N 存在，使得

$$\text{当}\ m\ \text{与}\ n>N\ \text{时}，\quad |x_m-x_n|<\varepsilon。\tag{28}$$

現在証明这个条件是充分的，就是满足这个条件的序列(27)有極限。由以前[31]的討論推得，若滿足这个条件，則可以作出一个区間的序列：

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \cdots,\ (a_k,\ b_k),\ \cdots$$

它具有下述的性質：每一个在后面的区間，包含在它前面的区間里，而且長度 (b_k-a_k) 趋向零；并且任意一个区間 $(a_k,\ b_k)$ 对应于这样一个正整数 N_k，使得当 $s>N_k$ 时。所有的 x_s 都屬于 $(a_k,\ b_k)$。这些区間就对应于 [31] 中的綫段 A'_kA_k。由上面証的定理，就有

$$\lim_{k\to\infty} a_k=\lim_{k\to\infty} b_k=a。\tag{29}$$

現在証明 a 是序列(27)的極限。設給定一个正数 ε。根据(29)，有这样一个正整数 l 存在，使得区間 $(a_l,\ b_l)$ 以及所有的在它后面的区間都在区間 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 內。

由此推知，当 $s>N_l$ 时，所有的数 x_s 屬于这个区間，就是当 $s>N_l$ 时，$|a-x_s|<$ $<\varepsilon$。由于 ε 的任意性，我們得到 a 是序列(27)的極限，于是証明了条件(28)的充分性。这个条件的必要性已經在[31]中証过。对于非編号变量的情形这样証法仍然有效。

43. 連續函数的性質 現在我們証明[35]中所述連續函数的性質，先証明一个輔助定理：

定理 I. 若 $f(x)$ 在区間 $[a,\ b]$ 上是連續的，而 ε 是一个任意給定的正数，則这个区間可以如此分成有限个新的区間，使得当 x_1 与 x_2 同屬于任意一个新区間时，$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$。

我們用反証法，假設这个定理不成立，就会引出謬論。設 $[a,\ b]$ 不能分成如上所述的有限个部分。我們由中点把它分成两个区間 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 与 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$。若是对于这两个区間的任何一个，这定理都成立，那么对于整个的区間 $[a,\ b]$ 它也就应当成立。所以我們要設这两个区間中至少有一个不能分成如定理所述的有限个部分。取使这定理不成立的一个，再把它分成相等的两部分，像上面一样，又至少有一个使这定理不成立，再把这一个分成两半。如此繼續作下去，我們得到区間序列

$$[a,\ b],\ [a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ \cdots,\ [a_n,\ b_n],\ \cdots,$$

其中每一个是在它前面那个的一半，所以，長度 b_n-a_n 等于 $\dfrac{b-a}{2^n}$，当 n 增加时，

它趋向零。对于任意一个区間$[a_n, b_n]$这个定理不成立，就是无論那个$[a_n, b_n]$也不能分成有限个新的区間，使得，只要x_1与x_2同屬于任意一个新区間时，$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$。現在証明，这是錯誤的。

由[**42**]中定理，a_n与b_n有一个共同的極限：

$$\lim a_n=\lim b_n=\alpha, \tag{30}$$

并且这个極限，像所有的数a_n, b_n一样，在区間$[a, b]$上。先假設α在$[a, b]$內。已知当$x=\alpha$时，$f(x)$是連續的，于是推出[**34**]，当定理中的ε給定时，就有这样一个η存在，使得区間$(\alpha-\eta, \alpha+\eta)$內所有的$x$就适合不等式

$$|f(\alpha)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}。 \tag{31}$$

若x_1与x_2是区間$(\alpha-\eta, \alpha+\eta)$內任意两个值，則

$$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)-f(\alpha)+f(\alpha)-f(x_1),$$

因此
$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|f(x_2)-f(\alpha)|+|f(\alpha)-f(x_1)|,$$

再根据(31)

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},$$

就是，当x_1与x_2是区間$(\alpha-\eta, \alpha+\eta)$內任意两个值时，

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon。 \tag{32}$$

但是根据(30)必有一个区間$[a_l, b_l]$包含在区間$(\alpha-\eta, \alpha+\eta)$內。所以，当$x_1$与$x_2$是区間$[a_l, b_l]$上任意两个值时，它們滿足不等式(32)。就是对于区間$[a_l, b_l]$这个定理成立甚至于不必再分就成。这与以上对于任意一个区間$[a_n, b_n]$这定理不成立的假定互相矛盾。如此，若α在区間(a, b)內，这个定理証完。若α与这区間的一端重合，例如$\alpha=a$則只要用区間$(a, a+\eta)$替代区間$(\alpha-\eta, \alpha+\eta)$，可以同样証明。

現在証明[**35**]中第三个性質：

定理II. 若$f(x)$在区間$[a, b]$上連續，則它在这区間上一致連續，就是当任意給定一个正数ε时，有这样一个正数η存在，使得区間$[a, b]$上的任意两个值x'与x''，只要滿足不等式$|x''-x'|<\eta$，就有$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$。

根据定理I我們可以把$[a, b]$分成有限个新的区間，使得当x_1与x_2同屬于任意一个新区間时，$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{2}$。設这些新区間中最小的一个的長度是$\eta$，現在証明，对于这个数$\eta$，我們的定理成立。实际上，若$x'$与$x''$是$[a,b]$上两个值并且滿足不等式$|x''-x'|<\eta$，則或者$x'$与$x''$屬于同一个新区間或者它們分別屬

于两个相邻的新区間。在第一种情形下，由新区間的作法，就有 $|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}$，所以更有 $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$。在第二种情形下，我們把 x' 与 x'' 所在的两个区間的相接点記作 γ，于是可以写成：

$$f(x'')-f(x')=f(x'')-f(\gamma)+f(\gamma)-f(x'),$$

就是

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant|f(x'')-f(\gamma)|+|f(\gamma)-f(x')|。 \tag{33}$$

因为 x'' 与 γ 在同一个新区間上，γ 与 x' 也在同一个新区間上，所以

$$|f(x'')-f(\gamma)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(\gamma)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{34}$$

由不等式(33)与(34)，得到 $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$，于是定理証完。

定理 I 引出这样的系：

系 在区間$[a, b]$上連續的函数，必有上界，且有下界，就是在这区間上是有界的。換句話說就是，有这样一个数 M 存在，使得 $[a, b]$ 上所有的 x 的值滿足不等式 $|f(x)|<M$。实际上，取定一个 $\varepsilon_0>0$，于是根据定理 I，讓 $\varepsilon=\varepsilon_0$，就可以把$[a, b]$分成有限个具有所述特性的新区間。設 n_0 是一組这样的新区間的数目。当任意两个点屬于同一个新区間时，就有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon_0$。由此直接推知，当 x 取区間 $[a, b]$ 上任意一个值时，$|f(x)-f(a)|<n_0\varepsilon_0$，就是所有的 $f(x)$ 的值都在 $f(a)-n_0\varepsilon_0$ 与 $f(a)+n_0\varepsilon_0$ 之間。

由于在区間$[a, b]$上全部 $f(x)$ 的值的集合有上界及下界，它就有上确界与下确界[**42**]。我們用 β 記它的上确界，α 記它的下确界。現在証明[**35**]中第一个性質。

定理 III. 在区間 $[a, b]$ 上連續的函数，在这区間上达到它的最大值与最小值。

我們要証明，在区間$[a, b]$上，有这样一个 x 的值存在，使得 $f(x)$的值等于 β，也有一个 x 的值，使得 $f(x)$ 的值等于 α。我們只証明前一部分，用反証法。假設$[a, b]$上沒有 x 的值使得 $f(x)$ 等于 β（于是就总小于 β）。作一个新函数：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\beta-f(x)}。$$

由于分母不会等于零，这个新函数在区間 $[a, b]$ 上也是連續的[**34**]。从另一方面看，由上确界的定义，当任意取一个 $\varepsilon>0$ 时，$[a, b]$ 上就有这样的 x 的值，使得 $f(x)$ 的值在 $\beta-\varepsilon$ 与 β 之間。这时 $0<\beta-f(x)<\varepsilon$，于是 $\varphi(x)>\frac{1}{\varepsilon}$。由于 ε 可

以取得任意小，所以在区間$[a, b]$上的連續函数$\varphi(x)$就沒有上界，这与上述定理 I 的系不合。

最后我們証明[35]中第二个性質。設$f(x)$在$[a, b]$上連續，而k是$f(a)$与$f(b)$之間的一个数。为确定起見，假設$f(a)<k<f(b)$。作一个在区間$[a, b]$上連續的新函数：

$$F(x)=f(x)-k,$$

它在这区間两端的值

$$F(a)=f(a)-k<0,$$
$$F(b)=f(b)-k>0,$$

就是在这区間两端$F(x)$的值异号。如果我們能証明在$[a, b]$內有这样的一个值x_0存在，使得$F(x_0)=0$，則这时$f(x_0)-k=0$就是$f(x_0)=k$，于是这个性質就成立。所以只要証明下面这个定理就成了。

定理 IV. 若$f(x)$在区間$[a, b]$上連續，而$f(a)$与$f(b)$异号則在这区間內至少有这样一个值x_0存在，使得$f(x_0)=0$。

像定理 III 一样，用反証法，設在区間$[a, b]$上，$f(x)$无論如何不等于零，作一个新函数：

$$\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}, \tag{35}$$

它在区間$[a, b]$上也是連續的[34]。設任意給定一个$\varepsilon>0$，根据定理 I，我們可以在区間$[a, b]$內选出有限个点，把这些点与这区間的两个端点排好，使得，在任意两个相邻点$f(x)$的差的絕对值小于ε。注意$f(a)$与$f(b)$异号，我們可以肯定，在上述点中能够找出两个相邻的点ξ_1与ξ_2使得$f(x)$在該处的值异号，于是，一方面，$f(\xi_1)$与$f(\xi_2)$异号；另一方面，$|f(\xi_2)-f(\xi_1)|<\varepsilon$。但是，若两个异号的实数的差的絕对值$<\varepsilon$，則这两个数中每一个的絕对值$<\varepsilon$，例如，$|f(\xi_1)|<\varepsilon$，于是由(35)，$|\varphi(\xi_1)|>\frac{1}{\varepsilon}$，由于$\varepsilon$可以取得任意小，于是在区間$[a, b]$上連續的函数$\varphi(x)$就不是在这区間上有界的了。这是錯誤的，如此定理証完。

44. 初等函数的連續性 以前我們已經証明多項式与有理函数是連續的[34]。現在考慮指数函数

$$y=a^x \qquad (a>0), \tag{36}$$

并且为确定起見，算作$a>1$。对一切正的有理数x，这函数是完全确定的。对于負的有理数x，它由下面这公式确定：

$$a^x=\frac{1}{a^{-x}}, \tag{37}$$

此外，$a^0=1$。如此，对一切有理数 x，这函数是确定的。由代数学中已知，乘除法对应于指数加减的法则。

如 x 是一个正有理数值 $\frac{p}{q}$ 則，

$$a^x=\sqrt[q]{a^p},$$

其中根号取算术值。显然，，$a^p>1$，由根号的定义推出：当 $x>0$ 时，$a^x>1$ (应用[41]中定义)。由(37)推出当 $x<0$ 时，$0<a^x<1$。現在証明若 $x_2>x_1$，則 $a^{x_2}>a^{x_1}$，就是 a^x 是增函数。实际上，

$$a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1),$$

而 $x_2-x_1>0$，于是推知，右边的两个因子都是正的。还要証明当 x 取有理数值趋向零时，$a^x\to1$。先假定，x 自右方經过所有的有理数值减小地趋向零的情形。这时 a^x 减小，保持 >1，于是推知有一个極限，我們記作 l。再注意，当 x 如上所述改变时，$2x$ 也同样自右經过所有的有理数値趋向零。显然，

$$a^{2x}=(a^x)^2,$$

取極限，就得到

$$l=l^2 \quad \text{或} \quad l(l-1)=0,$$

就是 $l=1$ 或 $l=0$，但是由于 $a^x>1$，l 不能等于零，所以若 x 自 右 方 趋 向 零，則 $a^x\to1$，由(37)推出，当 $x\to0$ 自左时，会有同样的極限。所以，若 x 取有理数值趋向零，則 $a^x\to1$。由此直接推出：若 x 取有理数值趋向一个有理数的極限 b，則 $a^x\to a^b$。实际上，

$$a^x-a^b=a^b(a^{x-b}-1)。$$

因为差$(x-b)$趋向零，所以由以上所述$(a^{x-b}-1)$也趋向零。

現在对于无理数 x，我們来定义函数(36)。設 α 是一个无理数，而 $\mathrm{I}(\alpha)$ 与 $\mathrm{II}(\alpha)$ 是定义 α 的有理数分划的第一組与第二組。假設，x 經过 $\mathrm{I}(\alpha)$ 中所有的有理数值增加地趋向 α，于是 a^x 增加，但保持有界，因为它 $<a^{x''}$，其中 x'' 是 $\mathrm{II}(\alpha)$ 中任意一个数。如此，当 x 如上所述改变时，a^x 有一个極限，暫时我們記作 L。同样，若 x 經过 $\mathrm{II}(\alpha)$ 中的有理数减小地趋向 α，則 a^x 也有一个極限。現在我們証明这个極限也等于 L。設 x' 在 $\mathrm{I}(\alpha)$ 中，x'' 在 $\mathrm{II}(\alpha)$ 中，就有：

$$a^{x''}-a^{x'}=a^{x'}(a^{x''-x'}-1)<L(a^{x''-x'}-1),$$

就是

$$0<a^{x''}-a^{x'}<L(a^{x''-x'}-1)。$$

当 x' 与 x'' 逼近于 α 时，差 $(x''-x')$ 与零可以任意接近，根据上面写的不等式，差 $a^{x''}-a^{x'}$ 与零也可任意接近，由此推出上面关于極限相同的断言。我們取

上述的極限 L 作 a^α 的定义，就是 a^α 是当 x 經过有理数值趋向 α 时，a^x 趋向的極限。現在对一切实数 x，函数(36)都有定义。由以上所述，容易証明，这个函数是增函数，就是若 x_1 与 x_2 是任意两个实数，滿足不等式 $x_2>x_1$，則 $a^{x_2}>a^{x_1}$。証明这一点时，要分别考虑，x_1 与 x_2 都是无理数与有一个是有理数的情形。还要証明，对任意的实数 x，这函数是連續的。首先需要証明，当我們允許 x 取所有的实数值趋向零时，$a^x\to 1$。这可以像 x 取有理数时一样証明。再应用公式：

$$a^x-a^\alpha=a^\alpha(a^{x-\alpha}-1),$$

我們可以証明当 $x\to\alpha$ 时，$a^x\to a^\alpha$，于是得到 a^x 对任意实数 x 的連續性。

不难証明，当指数是任意一个实数时，指数函数的所有基本性質仍成立。例如，設 α 与 β 是两个无理数，并設 x 与 y 各取有理数值一齐改变 $x\to\alpha$，$y\to\beta$。对于有理指数我們有：

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}。$$

取極限并应用已經証明的指数函数的連續性，就得到对于无理指数也有同样的性質：

$$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}。$$

还要証明指数函数的乘冪对于指数相乘的法則：

$$(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}。$$

若 $\beta=n$ 是一个正整数，則这个公式可以由指数函数值的积等于指数和的法則直接推出。若 $\beta=\frac{p}{q}$ 是一个正有理数，則

$$(a^\alpha)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^\alpha)^p}=\sqrt[q]{a^{\alpha p}}=a^{\alpha\frac{p}{q}}。$$

对于負有理数，可以直接由公式(37)推出。現在假設 β 是一个无理数，并設 r 取有理数趋向 β。由以上所証我們有：

$$(a^\alpha)^r=a^{\alpha r}。$$

取極限并应用指数函数的連續性，并且，在左边我們取 a^α 作底于是得到 $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$。

在講对数函数之前，先作关于反函数的一些附注，关于反函数我們在[20]中已經談过。若 $y=f(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上是連續增函数，并且 $f(a)=A$，$f(b)=B$，則根据連續函数的第二个性質，当 x 經过所有的实数值由 a 增加到 b 时，$f(x)$ 一定由 A 增加到 B，經过 A 与 B 之間的所有的值。如此，对于区間 $[A,B]$ 上任意一个 y 的值，$[a,b]$ 上有确定的 x 与之对应，并且反函数 $x=\varphi(y)$ 是單值的，也是增加的。若当 $x=x_0$ 在 $[a,b]$ 內时，$y_0=f(x_0)$，并且 x 跑遍小区間 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$

內的值，則 y 将跑遍某一个区間 $(y_0-\eta_1,\ y_0+\eta_2)$ 內的值。把 η_1 与 η_2 两个正数中小的一个記作 δ，我們可以肯定，若 y 在区間 $(y_0-\delta,\ y_0+\delta)$ 內. 而这区間只是区間 $(y_0-\eta_1,\ y_0+\eta_2)$ 的一部分，則对应的 x 的值就更在以前的区間 $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ 內，就是若 $|y-y_0|<\delta$，則 $|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$。由于 ε 的任意性，这就說明了当 $y=y_0$ 时，函数 $\varphi(y)$ 是連續的。若 x 与一端重合，例如 $x=a$，則在上面的討論中，要用区間 $(x_0,\ x_0+\varepsilon)$ 替代区間 $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$。类似的可以討論連續減函数 $f(x)$ 的情形。

回到函数(36)。由于 $a>1$，則 $a=1+b$，其中 $b>0$，应用牛頓二項式公式，当 n 是一个正整数时：

$$a^n=(1+b)^n>1+nb,$$

由此显見，当 x 无限增加时，a^x 也无限增加。再由 (37) 推出，当 $x\to-\infty$ 时，$a^x\to 0$。注意由于上面关于反函数的敘述，可以肯定，当 $y>0$ 时，(36)的反函数

$$x=\log_a y \tag{38}$$

是單值的連續增函数。同样可以討論 $0<a<1$ 的情形，只不过函数(36)与(38)都是減函数。

現在介紹一个新概念——复合函数。設 $y=f(x)$ 是一个在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的連續函数，并且它的值在区間 $[c,\ d]$ 上。再設 $z=F(y)$ 是一个在区間 $c\leqslant y\leqslant d$ 上的連續函数。把 y 看为上述 x 的函数，我們得到 x 的一个复合函数：

$$z=F(y)=F[f(x)]。$$

我們說，这个函数通过 y 依賴于 x。它确定在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上。不难看出，在这区間上，它是連續的。实际上，根据 $f(x)$ 的連續性，x 的改变量是无穷小时、对应的 y 的改变量也是无穷小。再根据 $F(y)$ 的連續性，y 的改变量是无穷小时，对应的 z 的改变量也是无穷小。

現在考慮冪函数

$$z=x^b, \tag{39}$$

其中 b 是任意一个实指数，并且我們算作 x 只取正値。由对指数函数的討論直接推出，当任意一个 $x>0$ 时，函数(39)有确定的值。应用对数的定义，例如，取自然对数，我們可以把(39)写成：

$$z=e^{b\log x}。$$

設 $y=b\log x$，于是 $z=e^y$，我們可以把这个函数考慮作 x 的复合函数，由指数函数与对数函数的連續性可以証明，对任意的 $x>0$ 时，函数(39)是連續的。

应用初等三角学中的公式，不难証明三角函数的連續性。实际上，由三角公式：

$$\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

推出
$$|\sin(x+h)-\sin x|\leqslant 2\left|\sin\frac{h}{2}\right|,$$

因为$\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|\leqslant 1$。但是对于任意角度$\alpha$；$|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$，于是推知：

$$|\sin(x+h)-\sin x|\leqslant|h|,$$

因此，当h趋向零时，差$|\sin(x+h)-\sin x|$趋向零，这給出当x取任意一个值时，函数$\sin x$的連續性。同样可証函数$\cos x$对所有的x的連續性。由公式

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x},$$

直接推知[34]，$\operatorname{tg}x$与$\operatorname{ctg}x$对所有的x的連續性，只是使分母成为零的值除外。

函数$y=\sin x$是区間$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的連續增函数。应用上面关于反函数的叙述，可以断言，在区間$-1\leqslant y\leqslant 1$上，函数$x=\arcsin y$的主值[24]，是区間$-1\leqslant y\leqslant 1$上的連續增函数。类似的可以証明其他反三角函数的連續性。

第二章　导数概念及其应用

§3. 一阶导数与一阶微分

45. 导数概念　考虑一个点，作直綫运动。由直綫上一个定点算起，它所經过的路程 s 是时間 t 的函数：

$$s=f(t),$$

于是对任意一个确定的瞬时 t，有一个确定的量 s 与之对应。若給 t 一个改变量 Δt，则在这个新的瞬时 $t+\Delta t$，有一个路程 $s+\Delta s$ 与之对应，其中 Δs 是在时間区間 Δt 内所經过的距离。在等速运动中，距离的改变量与时間的改变量成正比，于是比 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 是一个常量，表示这个运动的等速度。在一般情形中，这个比依賴于所选出的瞬时 t 与改变量 Δt；而它表示在由 t 到 $t+\Delta t$ 这时間区間内，这个运动的平均速度。平均速度就是假想一个作等速运动的点在时間区間 Δt 内經过距离 Δs 所应有的速度。例如，在等加速度运动中，我們有

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t,$$

所以

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2+v_0(t+\Delta t)-\frac{1}{2}gt^2-v_0t}{\Delta t}=gt+v_0+\frac{1}{2}g\Delta t_{\circ}$$

Δt 这一段时間愈短，我們就愈可以認为所考虑的点的运动在这一段时間内是等速的。于是当 Δt 趋向零时，比 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 的極限，确定出在給定瞬时 t 的速度 v：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}。$$

例如：在等加速度运动的情形：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+v_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt+v_0。$$

像路程一样，速度也是 t 的函数。这个函数叫做 $f(t)$ 对于 t 的导数。我們說速度是距离对于时間的导数。

考虑起化学反应的某种物質，在瞬时 t 这物質已經起了反应的量 x 是 t 的一个函数。若时間改变 Δt 则 x 将有改变量 Δx 与之对应，于是 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 就表示在 Δt 这一段时間內这个化学反应的平均速率。而当 Δt 趋向零时，这个比的極限就表示这个化学反应在瞬时 t 的速率。

以前[32]，我們考虑过物体吸收的热量 Q 是它的温度 t° 的函数。設 Δt° 与 ΔQ 各是温度与热量的对应的改变量，精确的測量証明 ΔQ 与 Δt° 不成正比，于是比 $\frac{\Delta Q}{\Delta t^\circ}$ 表示在由 t° 到 $t^\circ+\Delta t^\circ$ 这温度区間內这个物体的平均比热。而当 Δt° 趋向零时，这个比的極限就是在温度 t° 时这个物体的比热。如此比热是热量对于温度的导数。

由于对这些例子的討論，我們得到下面关于导函数的概念。

給定一个函数 $y=f(x)$；設对应于自变量的改变量 Δx，函数的改变量是 Δy，則当 Δx 趋向零时，比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限叫做这个函数的导数。

記导数的符号用 y' 或 $f'(x)$：

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}。$$

求导数的运算叫做微分法。

上述的極限可以不存在。于是那时导数也就不存在。假設导数存在，我們可以写成：

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

其中当 $\Delta x \to 0$ 时，$\alpha \to 0$ [27]。

再写成：

$$f(x+\Delta x)-f(x)=[f'(x)+\alpha]\Delta x,$$

于是直接看出：若 $\Delta x \to 0$，则 $[f(x+\Delta x)-f(x)] \to 0$，就是若当 x 取某一个值时，导数存在，则这时这个函数是連續的。但是反过来說是不对的，就是由函数的連續性，不能判定导数的存在。要注意，在求导数时，我們用到分式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，其中分子与分母都趋向零，但是 Δx 永不等于零。

46. 导数的几何意义 为了了解导数的几何意义，我們考虑函数 $y=f(x)$ 的圖形。在这圖形上取一点 M，坐标为 (x, y)。离它不远再在曲綫上取一点 N，坐标为 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$。作出它們的縱坐标 $\overline{M_1M}$ 与 $\overline{N_1N}$。并过点 M 作直綫平行于 OX 軸。我們就有(圖 50)：

$$\overline{MP}=\overline{M_1N_1}=\Delta x,\ \overline{M_1M}=y,$$
$$\overline{N_1N}=y+\Delta y,\ \overline{PN}=\Delta y。\quad (1)$$

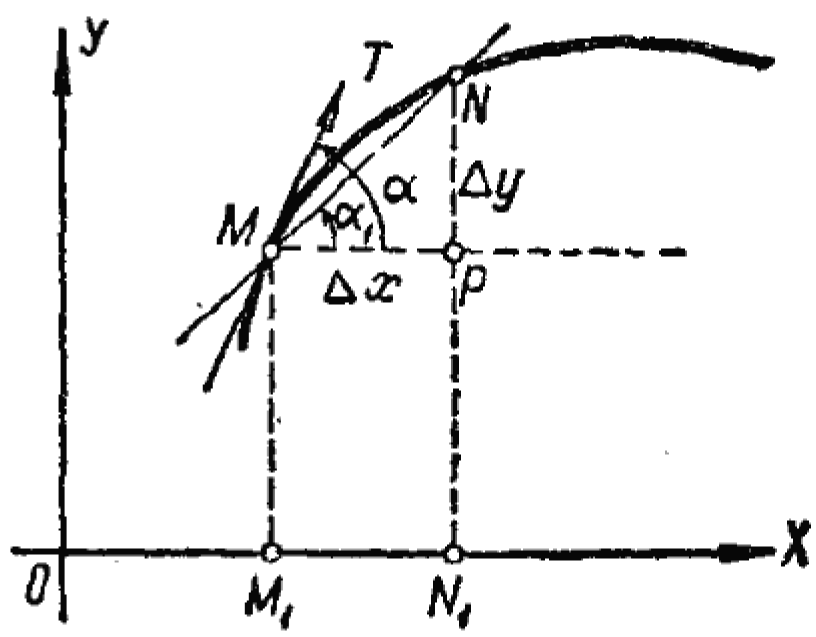


圖 50.

显然，比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于割綫 MN 与 OX 軸的正向所成的交角 α_1 的正切。当 Δx 趋向零时，点 N 将沿此曲綫趋向点 M，割綫 MN 的極限位置就是这曲綫在点 M 的切綫 MT 的位置；于是导数 $f'(x)$ 等于这曲綫在点 $M(x, y)$ 的切綫与 OX 軸的正向所成的交角 α 的正切，就是等于这个切綫的斜率。

公式(1)中，諸綫段的計算，应注意其方向，并且記着，改变量 Δx 与 Δy，可以是正的，也可以是負的。

如此，我們看到，导数 $f'(x)$ 的存在，紧联着方程 $y=f(x)$ 的曲綫的切綫的存在。但是一个連續曲綫可以在某些点没有切綫；或有平行

于 OY 軸的切綫,它的斜率成为无穷大(圖 51);于是,对于这些 x 值,函数 $f(x)$ 就沒有导数。

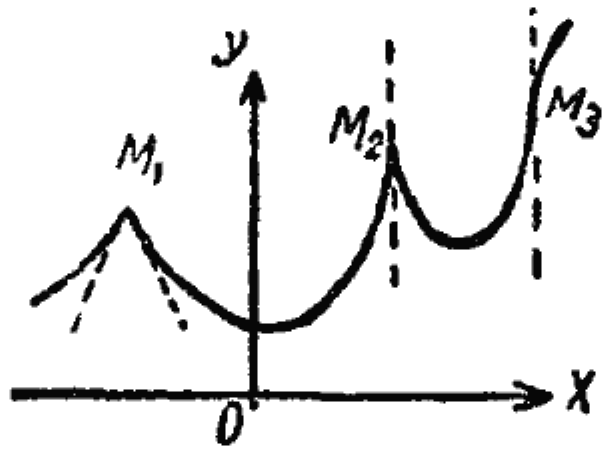


圖 51.

曲綫上这种特殊点可以有任意多个。甚至已經証明,我們可以作出这样一个連續函数,使得当 x 取任意一个値时,都沒有导数。对应于这种函数的曲綫是不能用我們的几何法表示的。

为簡單起見,用 h 記自变量的改变量,那个比就写成:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}。\tag{2}$$

若 x 是使 $f(x)$ 有定义的某一区間內的一个定点,則比(2)是 h 的一个函数。这个函数,除 $h=0$ 外,对一切与零充分接近的 h 都有定义。当 $h\to 0$ 时,这个比的極限应依照[32]中所述来确定。如果它存在,就給出导数 $f'(x)$。这个極限的存在,相当于以下的条件[32]:当任意給定一个正数 ε 时,有这样一个正数 η 存在,使得

$$当\ |h|<\eta,\ 而\ h\neq 0\ 时,\quad \left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\varepsilon。$$

有时,当 h 沿正値自右方趋向零以及沿負値自左方趋向零时,比(2)有一个極限。这种極限平常用記号 $f'(x+0)$ 与 $f'(x-0)$ 来記,而叫做右导数与左导数。若这两个極限不同,則它們分別定出曲綫在它的折点的切綫的斜率(假設这样的切綫存在)。圖 51 表示在 M_1 点的这种切綫。

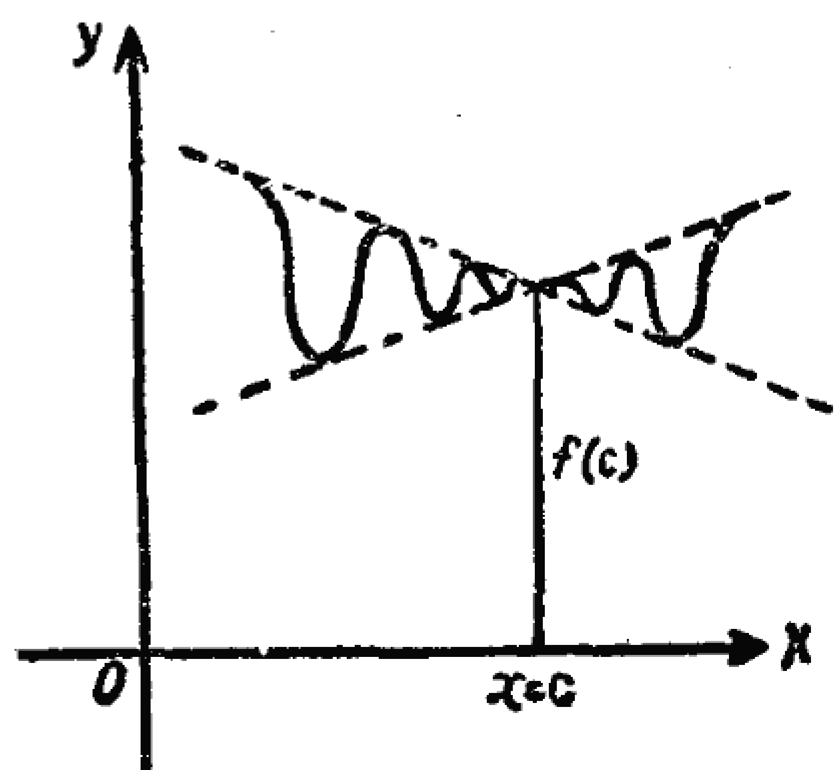


圖 52.

导数的存在相当于 $f'(x+0)$ 与 $f'(x-0)$ 存在,并且相等。这时 $f'(x)=f'(x+0)=f'(x-0)$。自然,也

可能有函数的这样的連續点，在其上 $f'(x+0)$ 与 $f'(x-0)$ 都不存在。在圖 52 中表示出这样的曲綫。当 $x=c$ 时，它沒有所述的导数。

若連續函数只在区間 $[a, b]$ 上給定，則当 $x=a$ 时，我們只能有右导数 $f'(a+0)$。而在 $x=b$ 时，只能有左导数 $f'(b-0)$。这时我們說 $f(x)$ 在（閉）区間 $[a, b]$ 上有导数 $f'(x)$，意思是說：当 x 在这区間內时，导数用一般的意义；而当 x 是区間的一端时，导数只用这里說的意义。

若 $f(x)$ 确定于区間 (A, B) 上，(A, B) 比 $[a, b]$ 較广，就是 $A<a$，$B>b$，而且 $f(x)$ 在 (A, B) 內有通常的导数 $f'(x)$，則它在区間 $[a, b]$ 上更有上述意义的导数。

47. 簡單函数的导数 由导数的概念知道，为要确定一个函数的导数。应先求出这个函数的改变量，用与它对应的自变量的改变量去除，再求当自变量的改变量趋向零时，这个比的極限。現在用这方法求某些最簡函数的导数：

I $y=b$（常量）[12]。

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{b-b}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,$$

就是，常量的导数是零。

II. $y=x^n$（n 是正整数）。

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2}+\cdots+h^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}hx^{n-2}+\cdots+h^{n-1}\right]=nx^{n-1}。$$

特別是，若 $y=x$，則 $y'=1$。以后我們再把冪函数的微分法規則推广到指数 n 为任意实数值的情形。

III. $y=\sin x$。

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x,$$

因为当 $\frac{h}{2}$ 趋向零时，$\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$[33]。

IV. $y=\cos x$。

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x。$$

V. $y=\log x\,(x>0)$。

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x},$$

因为当 $h\to 0$ 时，变量 $\alpha=\frac{h}{x}$ 也趋向零，而 $\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}\to 1$[38]。

VI. $y=cu(x)$。其中 c 是一个常量，$u(x)$ 是 x 的一个函数。

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h}=c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=cu'(x),$$

就是：一个常量与一个变量的乘积的导数，等于这变量的导数与这常量的乘积，或是説：求导数时，常因子可以提出来。

VII. $y=\log_a x$。我們知道，$\log_a x=\log x\dfrac{1}{\log a}$[38]。应用公式VI得到：

$$y'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log a}。$$

VIII. 考虑几个函数之和的导数，用三个做例子。

$$y=u(x)+v(x)+w(x)。$$

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)+w(x+h)]-[u(x)+v(x)+w(x)]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\frac{w(x+h)-w(x)}{h}\right]=$$

$$=u'(x)+v'(x)+w'(x),$$

就是：几个函数之和的导数等于各函数的导数之和。

IX. 現在考虑两个函数的乘积的导数。

$$y=u(x)\cdot v(x)。$$

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}。$$

在分子上加一个 $u(x+h)v(x)$ 再减去它，得到

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to0}v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=$$

$$=u(x)v'(x)+v(x)u'(x),$$

就是：在两个因子的情形下，我們証明：乘积的导数等于每一个因子的导数与其余因子的乘积之和。

証明三个因子的情形时，把其中两个的乘积先看成一个因子，应用上面的公式：

$$y=u(x)v(x)w(x),$$

$$y'=\{[u(x)v(x)]w(x)\}'=[u(x)v(x)]w'(x)+[u(x)v(x)]'w(x)=$$

$$=u(x)v(x)w'(x)+u(x)v'(x)w(x)+u'(x)v(x)w(x)。$$

利用数学归納法不难把这法則推广到任何有限多个因子的情形。

X. 現在設 y 是一个商式：

$$y=\frac{u(x)}{v(x)}。$$

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{v(x)v(x+h)}\cdot\frac{u(x+h)v(x)-v(x+h)u(x)}{h}。$$

在第二个分式的分子上加一个乘积 $u(x)v(x)$，再減去它。注意，$v(x)$ 的連續性，就得到：

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{1}{v(x)v(x+h)}\cdot\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-v(x+h)u(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{v(x)v(x+h)}\left[v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]=$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2},$$

就是：分式（商）的导数等于分子的导数乘上分母減去分母的导数乘上分子，再用分母的平方除。

XI. $y=\operatorname{tg}x$。

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}。$$

XII. $y=\operatorname{ctg}x$。

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}。$$

在 VI, VIII, IX, X 的結論中，我們假設函数 $u(x)$，$v(x)$，$w(x)$ 都有导数，于是証明了函数 y 的导数存在。

48. 复合函数与反函数的导数 我們回忆复合函数的概念。設函数 $y=f(x)$，在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上連續，并且函数的值在区間 $c\leqslant y\leqslant d$ 上，再設函数 $z=F(y)$ 在区間 $c\leqslant y\leqslant d$ 上連續。把 y 視为 x 的上述函数，

就得到一个x的复合函数。

$$z=F(y)=F[f(x)]。$$

我們說这样的函数通过y依賴于x，不难看出这函数在区間$a\leqslant x\leqslant b$上連續。实际上，因为$f(x)$是連續函数，当x的改变量是无穷小时，y的改变量也是无穷小，又因为$F(y)$是連續函数，当y的改变量是无穷小时，z的改变量也是无穷小。

在引出复合函数的微分法則以前，我們先作一个附注：若$z=F(y)$当$y=y_0$时有导数，則依照[**45**]所述，我們可以写成

$$\Delta z=F(y_0+\Delta y)-F(y_0)=[F'(y_0)+\alpha]\Delta y, \tag{3}$$

其中变量α是Δy的一个函数，它对一切与零充分接近而异于零的Δy都有定义。并且当Δy取不等于零的值趋向零时，$\alpha\to 0$。又因$\Delta y=0$时，$\Delta z=0$，所以当$\Delta y=0$时，α取任意值，等式(3)总是对的，于是当$\Delta y=0$时，自然地，置$\alpha=0$；如此規定以后，我們就可以算作：无論怎么样，縱然Δy取等于零的值，只要$\Delta y\to 0$，公式(3)中的$\alpha\to 0$。現在我們来講关于复合函数的导数的定理。

定理 若$y=f(x)$，在点$x=x_0$，有导数$f'(x_0)$，并且$z=F(y)$在点$y_0=f(x_0)$有导数$F'(y_0)$；則$F[f(x)]$在点$x=x_0$有导数，并且等于乘积$F'(y_0)\cdot f'(x_0)$。

給定自变量一个值x_0，設Δx是它的改变量，(不是零)，并且$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$是变量$y$的对应的改变量(可能等于零)。再設$\Delta z=F(y_0+\Delta y)-F(y_0)$，如果当$\Delta x\to 0$时，比$\frac{\Delta z}{\Delta x}$的極限存在，那么当$x=x_0$时复合函数$z=F[f(x)]$对于$x$的导数就等于这个極限。将(3)的两边用$\Delta x$除：

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=[F'(y_0)+\alpha]\frac{\Delta y}{\Delta x}。$$

根据函数$y=f(x)$在点$x=x_0$的連續性，当Δx趋向零时，$\Delta y\to 0$，于是由以上所述，$\alpha\to 0$；此时比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趋向导数$f'(x_0)$。将上面等式取極

限，就得到：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=F'(y_0)\cdot f'(x_0),$$

于是定理証完。注意，$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 連續，是由导数 $f'(x_0)$ 存在推知的[**45**]。

上面所証明的定理，可以叙述成复合函数微分法的法则的形式：复合函数的导数等于它对于中間变量的导数与中間变量对于自变量的导数的乘积。

$$z'_x=F'(y)f'(x)。$$

現在講反函数的微分法則，若 $y=f(x)$ 是区間 $[a, b]$ 上的連續增函数（就是当 x 的值增加时，对应的 y 也增加），且 $A=f(a)$，$B=f(b)$，則由[**21**]与[**44**]，我們知道，在区間 $[A, B]$ 上，存在單値連續的同时也是增加的反函数。由于增加性，若 $\Delta x\neq 0$ 則 $\Delta y\neq 0$，逆之亦然，由于連續性，若 $\Delta x\to 0$ 則 $\Delta y\to 0$，逆之亦然。（类似的可以考虑减函数的情形。）

定理 若 $f(x_0)$ 在点 x_0 有异于零的导数 $f'(x_0)$，則反函数 $\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 有导数：

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}。\tag{4}$$

用 Δx 与 Δy 記 x 与 y 的对应的改变量，就是

$$\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0),\quad \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

并注意它們都不是零，那就可以写成：

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}。$$

以上我們看到，Δx 与 Δy 一齐趋向零，将上面等式取極限就得到（4）。

所証明的定理，可以叙述成反函数微分法則的形式：反函数的导数等于直接函数在对应点的导数除 1。

反函数的微分法則有簡單的几何解释 [21]，函数 $x=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 在 XOY 平面上有同一个圖形，所不同的只是当考虑函数 $x=\varphi(y)$ 时，OY 軸是自变量的軸，而不是 OX 軸(圖 53)。作切綫 MT，并回忆导数的几何意义就得到

$$f'(x)=\operatorname{tg}(OX,\ MT)=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\varphi'(y)=\operatorname{tg}(OY,\ MT)=\operatorname{tg}\beta,$$

并且在圖 (53) 中，β 与 α 角都算正的。

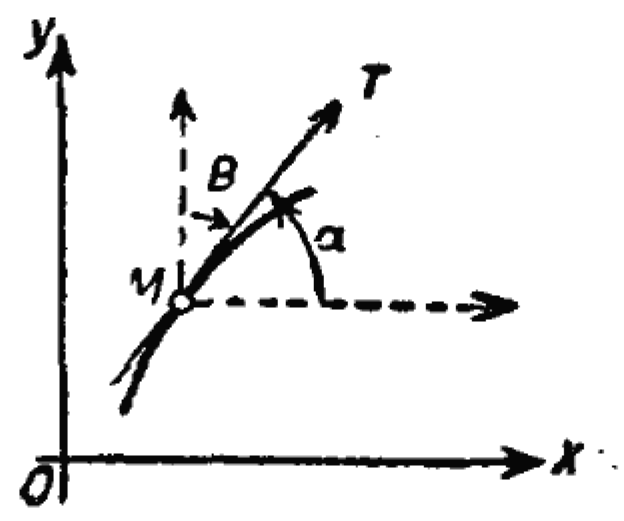


圖 53.

但是，显然，$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，于是

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}，\text{就是 } \varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}。$$

若 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，則倒过来，函数 $y=f(x)$ 也可以算作 $x=\varphi(y)$ 的反函数。

我們把反函数的微分法則应用于指数函数：

XIII. $y=a^x(a>0)$。

它的反函数是

$$x=\varphi(y)=\log_a y,$$

由公式 VII:

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\log a},$$

由此由反函数微分法則，就得到：

$$y'=\frac{1}{\varphi'(y)}=y\log a \text{ 或 } (a^x)'=a^x\log a。$$

特别是在当 $a=e$ 时，則有：

$$(e^x)'=e^x。$$

由这公式以及复合函数的微分法則，我們就能計算冪函数的导数。

XIV. $y=x^n(x>0)$。这函数确定于所有大于零的 x 值，而且有正值[19]。

用对数的定义，我們可以把这个函数表示成一个复合函数

$$y=x^n=e^{n\log x}。$$

用复合函数的微分法则，就得到：

$$y'=e^{n\log x}\cdot\frac{n}{x}=x^n\cdot\frac{n}{x}=nx^{n-1}。$$

这个結果不难推广到 x 取負值的情形，那时只要函数本身存在就行，例如 $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$。

对于求反函数的导数，我們应用反函数微分法則：

XV. $y=\text{arc}\sin x$。

我們考虑这个函数的主値[24]，就是在区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ 上的角度，这个函数可以看作 $x=\sin y$ 的反函数。依照求反函数的微分法則，就有：

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

这个根式应取正号，因为 $\cos y$ 在区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ 上是正的。同样方法，可以得到：

$$(\text{arc}\cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

这里考虑的是 $\text{arc}\cos x$ 的主値，就是在区間 $[0, \pi]$ 上的弧度值。

XVI. $y=\text{arc tg}\, x$。

$\text{arc tg}\, x$ 的主値在区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内，而这函数可以看作 $x=\text{tg}\, y$ 的反函数；于是：

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\text{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}。$$

同样方法可以得到

$$(\text{arc ctg}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}。$$

XVII. 考虑函数(幂指函数)

$$y=u^v,$$

其中 u 与 v 都是 x 的函数。

我們可以写成

$$y=e^{v\log u},$$

再用复合函数的微分法則,得到

$$y'=e^{v\log u}(v\log u)',$$

应用乘积的微分法則,再把 $\log u$ 看作 x 的复合函数,求其导数,最后得到:

$$y'=e^{v\log u}\left(v'\log u+\frac{v}{u}u'\right) \text{ 或 } y'=u^v\left(v'\log u+\frac{v}{u}u'\right)。$$

49. 导数公式表与例題 把我們求出的所有微分法則列表如下:

1. $(c)'=0$。
2. $(cu)'=cu'$。
3. $(u_1+u_2+\cdots+u_n)'=u_1'+u_2'+\cdots+u_n'$。
4. $(u_1u_2\cdots u_n)'=u_1'u_2\cdots u_n+u_1u_2'u_3\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_n'$。
5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$。
6. $(x^n)'=nx^{n-1}$, $(x)'=1$。
7. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log a}$, $(\log x)'=\frac{1}{x}$。
8. $(e^x)'=e^x$, $(a^x)'=a^x\log a$。
9. $(\sin x)'=\cos x$。
10. $(\cos x)'=-\sin x$。
11. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$。
12. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$。
13. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

15. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$。

16. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$。

17. $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \log u \cdot v'$。

18. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (y 通过 u 依賴于 x)。

19. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$。

应用已經求出的公式作下列例題:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$。

用公式 3,6 与 2 得到:

$$y' = 3x^2 - 6x + 7。$$

2. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$。

用公式 6 得到:

$$y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}。$$

3. $y = \sin^2 x$。

令 $u = \sin x$, 用公式 18, 6 与 9。

$$y' = 2u \cdot u' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x。$$

4 $y = \sin(x^2)$。

令$u = x^2$, 用同样公式,

$$y' = \cos u \cdot u' = 2x \cos(x^2)。$$

5. $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$。

先令 $u = x + \sqrt{1+x^2}$, 再令 $v = 1 + x^2$, 用两次公式 18 并用公式 7, 3 与 6。

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}[1+(\sqrt{1+x^2})'] =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right] =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}。$$

6. $y=\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$。

令 $u=\frac{x}{2x+1}$，用公式 18，6 与 5。

$$y'=n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)'=n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1}\frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2}=\frac{nx^{n-1}}{(2x+1)^{n+1}}。$$

7. $y=x^x$。

用公式 17 得到

$$y'=x^{x-1}\cdot x+x^x\log x=x^x(1+\log x)。$$

8. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{5}$$

給定 y 是 x 的一个隐函数。要求 y 的导数。假設我們由已知方程中解出 y，則得到 $y=f(x)$，将 $y=f(x)$ 代入方程的左方，必恒等于零。但是像常量的导数一样零的导数是零。所以若把 y 算作由这方程所定的 x 的函数，求出已知方程左方对 x 的导数，它应該等于零。

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0,$$

因此
$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}。$$

在这种情形下，y' 不仅用 x 而且又要用 y 来表达，但我們却可以不必为求导数而对方程（5）解出 y 来，也就是說，可以不用求出函数的显式。

由解析几何学知道，方程（5）对应的圖形是橢圓。而 y' 的表达式給出这个橢圓在坐标为 (x, y) 的点的切綫的斜率。

50. 微分概念 設 Δx 是自变量的任意一个改变量，并認为它是不依賴于 x 的，我們叫它做自变量的微分，用記号 Δx 或 dx 記。这个記号，不是表示 d 与 x 的乘积，而是整个的用做一个記号来代表自变量的改变量，它是一个任意的量并不依賴于 x。

一个函数的导数与自变量的微分的乘积，叫做这个函数的微分。

函数的微分用記号 dy 或 $df(x)$ 来記：

$$dy \text{ 或 } df(x)=f'(x)dx。 \tag{6}$$

由这公式得到，用微分的商来表达导数的方法。

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}。$$

函数的微分与它的改变量不是一样的。为要認清这两个的区别，我們看函数的圖形。在曲綫上任取一点 $M(x, y)$ 与另外一点 N，作出切綫 MT，M 与 N 点的縱坐标，以及平行于 OX 軸的直綫 MP (圖 54)，就有：

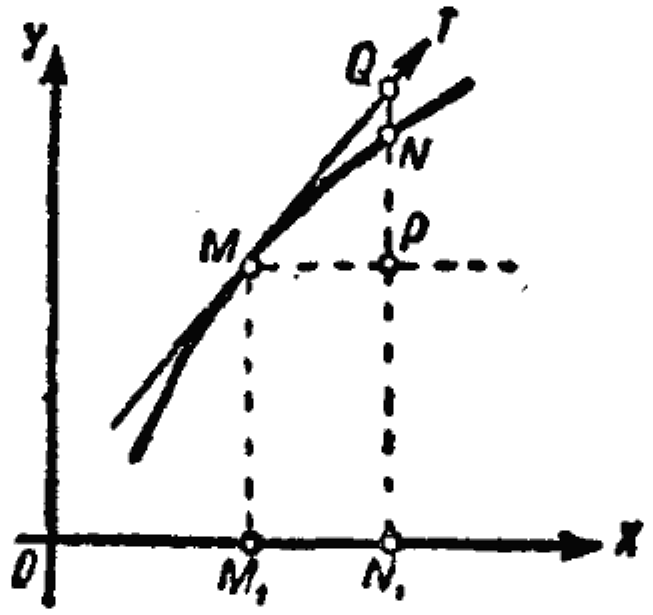


圖 54.

$$\overline{MP}=\overline{M_1N_1}=\Delta x\ (\text{或 } dx),$$

$$\overline{PN}=\Delta y\ (y \text{ 的改变量}),$$

$$\operatorname{tg}\angle PMQ=f'(x),$$

由此

$$dy=f'(x)dx=\overline{MP}\operatorname{tg}\angle PMQ=\overline{PQ}。$$

綫段 $\overline{PQ}$ 代表函数的微分，綫段 $\overline{PN}$ 代表函数的改变量，这两个并不重合。如果我們假想在区間 $(x, x+dx)$ 上函数的改变量与自变量的改变量成正比，而比例系数恰好是切綫 MT 的斜率[即导数 $f'(x)$]；也就是說，如果把該区間上的曲綫段 MN 换为切綫綫段 $\overline{MQ}$，則綫段 $\overline{PQ}$ 表示这样换了之后所得的改变量。

綫段 $\overline{NQ}$ 代表微分与改变量的差。下面我們証明：当 Δx 趋向零时，这个差与 Δx 比較起来是个較高級的无穷小[**36**]。

因为比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限就是导数，所以[**27**]：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon,$$

其中 ε 与 Δx 一起是一个无穷小，由这等式得到：

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x,$$

或

$$\Delta y=dy+\varepsilon\Delta x,$$

于是看出 dy 与 Δy 之差等于 $(-\varepsilon\Delta x)$。而 $(-\varepsilon\Delta x)$ 与 Δx 之比等于 $(-\varepsilon)$，当 Δx 趋向零时，这个比也趋向零。就是 dy 与 Δy 之差与 Δx 比較起来是个較高級的无穷小。注意，这个差可以是正的，也可以是負

的，在我們的圖中 Δx 与这个差都具有正号。

公式(6)給我們求函数的微分的法則。以下我們把这法則应用到某些特殊情形：

I. 若 c 是一个常量，則

$$dc=(c)'dx=0\cdot dx=0,$$

就是，常量的微分等于零。

II. $d[cu(x)]=[cu(x)]'dx=cu'(x)dx=c\,du(x)$,

就是微分中的常因子可以提出来。

III. $d[u(x)+v(x)+w(x)]=[u(x)+v(x)+w(x)]'dx=$

$=[u'(x)+v'(x)+w'(x)]dx=u'(x)dx+v'(x)dx+w'(x)dx=$

$=du(x)+dv(x)+dw(x)$,

就是諸項和的微分等于各項的微分之和。

IV. $d[u(x)v(x)w(x)]=[u(x)v(x)w(x)]'dx=$

$=v(x)w(x)u'(x)dx+u(x)w(x)v'(x)dx+u(x)v(x)w'(x)dx=$

$=v(x)w(x)du(x)+u(x)w(x)dv(x)+u(x)v(x)dw(x)$,

就是：乘积的微分等于每个因子的微分与其他因子的乘积之和。

我們虽然只作了含三个因子的情形，但是同样的結論对任何有限多个因子的情形仍是适合的。

V. $d\dfrac{u(x)}{v(x)}=\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'dx=\dfrac{v(x)u'(x)dx-u(x)v'(x)dx}{[v(x)]^2}=$

$$=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{[v(x)]^2},$$

就是：商(分式)的微分等于分子的微分乘上分母，减去分母的微分乘上分子，再被除于分母的平方。

VI. 考虑复合函数 $y=f(u)$，其中 u 是 x 的函数。我們假設 y 是 x 的函数来求 dy

$$dy=y'_x\,dx=f'(u)u'_x\,dx=f'(u)du,$$

就是：复合函数的微分形式，与輔助函数是自变量时的微分形式相同。

为比較函数的微分与改变量，我們考虑一个数值的例：作一个函数

$$y=f(x)=x^3+2x^2+4x+10,$$

考虑它的改变量：

$$f(2.01)-f(2)=2.01^3+2\times 2.01^2+4\times 2.01+10-(2^3+2\times 2^2+4\times 2+10),$$

算出来，我們得到改变量

$$\Delta y=f(2.01)-f(2)=0.240801。$$

求函数的微分比求改变量簡單得无可比拟。在这情形下 $dx=2.01-2=0.01$。于是函数的微分

$$dy=(3x^2+4x+4)dx=(3\times 2^2+4\times 2+4)\cdot(0.01)=0.24。$$

比較 dy 与 Δy，我們看出它們到三位小数为止是一样的。

51. 几个微分方程 我們已經証明，在区間 $(x, x+dx)$ 上，若以函数的微分替代它的改变量，則函数的改变量与自变量的改变量就成正比，且有对应的比例系数。并且証明了由这样替代所生的差誤与 dx 比較起来是个較高級的无穷小。研究自然現象时，应用到无穷小分析，就是以此为基础的。

觀察一个变化时，把它分成許多小的阶段，对每一个小的阶段，因为它很小，我們就可以应用上述的比例性質，如此在極限时就得到一个方程，表示自变量，函数以及它們的微分（或导数）的关系。这个方程叫做对应于所考虑的变化的微分方程。由微分方程中求未知函数的問題，就是微分方程的积分問題。

于是，应用无穷小的分析，去研究任何一个自然律，必須作出所考虑的自然律的微分方程。再求它的积分。这个积分問題常常比第一个問題困难得多，我們以后再講。下面的例題中我們介紹几个对应于簡單的自然現象的微分方程。

1. 气压的公式 單位面积上的大气压力 p 显然是地面高度 h 的函数，考虑横断面积为一單位面积的直立空气柱。作高度为 h 及 $h+dh$ 之二横断面 A 及 A_1。由断面 A 换到断面 A_1 压力 p 减少（假設 $dh>0$）的量，就等于在 A 与 A_1 之間的一段气柱所包含空气的重量。若 dh 很小，在这一段內就可以把空气的密度 ρ 近似地算做常量。因为柱体 AA_1 的底面积是一，高是 dh，所以容积是 dh，而未知重量是 $\rho\,dh$，于是 p 减少的量（当 $dh>0$ 时）等于 $\rho\,dh$：

$$dp=-\rho\cdot dh。$$

依照波义耳—馬略特定律密度 ρ 与压力 p 成正比：

$$\rho=cp\,(c\text{ 是一个常量}),$$

最后我們得到微分方程：

$$dp=-cp\,dh \quad 或 \quad \frac{dp}{dh}=-cp。$$

2. 一級化学反应 設某物質原来質量为 a，發生化学反应。在瞬时 t 到 $t+$ $+dt$ 这时間区間內起反应的物質的量 dx，当 dt 很小时可以算作与 dt 及在瞬时 t 尙未起反应的物質的量成正比例：

$$dx=c(a-x)\,dt \text{ 或 } \frac{dx}{dt}=c(a-x)。$$

变换这个微分方程，引入新变量 $y=a-x$ 替代 x，其中 y 表示在瞬时 t 尙未起反应的質量。注意 a 是常量就得到：

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{dx}{dt},$$

于是一級化学反应的微分方程就可以写成：

$$\frac{dy}{dt}=-cy。$$

3. 冷却定律 設将加热到高溫的某物体，放在有定常溫度 $0°$ 的介質中，物体就要冷却，而它的溫度 θ 是时間 t 的函数。我們把 t 由物体放入介質的瞬时算起。在时間区間 dt 內，物体放出的热量 dQ 可以近似地認为与这区間 dt 的長短及在瞬时 t 物体与介質的溫度差成正比(牛頓冷却定律)。于是可以写成：

$$dQ=c_1\theta\,dt \quad (c_1 \text{ 是一个常量})。$$

将該物体的比热記作 k 就有：

$$dQ=-k\,d\theta,$$

这里我們写負号是因为在考虑的情形中 $d\theta$ 是負的(溫度降低)。比較这两个 dQ 的表达式就得到：

$$d\theta=-c\theta\,dt \quad \left(c=\frac{c_1}{k}\right) \quad \text{或} \quad \frac{d\theta}{dt}=-c\theta,$$

如果我們把 k 算作常量，c 就是个常量。我們介紹的几个微分方程，具有同样的形式。它們都表示一个性質——导数与函数成正比。并且有負的比例系数 $(-c)$。

在[38]中我們証明过。若連續計算复利，本金 a 經过 t 年应得本利和 ae^{kt}，其中 k 是利率(以百分表示)，

$$y=ae^{kt}。 \tag{7}$$

求导数，得到

$$y'=ake^{kt}=ky。 \tag{8}$$

在这情形下，我們得到导数与原来的函数成正比的性質。因此这种性質叫做复利律。以后我們可以証明函数(7)給出微分方程(8)的解，a 是一个任意常量，我們将写作 C。

如此，我們的微分方程的解就是(用 $-c$ 代替 k)；

$$p(h)=Ce^{-ch},\ y(t)=Ce^{-ct},\ \theta(t)=Ce^{-ct}, \tag{9}$$

其中 C 是一个常量，現在我們确定上式中每个常量 C 的物理意义。在第一个公式中讓 $h=0$ 得到

$$C=p(0)=p_0,$$

其中 p_0 是当 $h=0$ 时(就是地面上)的大气压力。在第二个公式中。当 $t=0$ 时

$$C=y(0),$$

就是 C 为开始时尙未起反应的質量，我們以前曾用 a 記它。最后，在第三个公式中，讓 $t=0$，就知道 C 是物体放入介質中时，該物体的初温 θ_0，于是最后得到：

$$p(h)=p_0e^{-ch},\ y(t)=ae^{-ct},\ \theta(t)=\theta_0e^{-ct}。 \tag{10}$$

52. 誤差的估計 当作实际测量或不精确計算时，任何一个量 x 会有誤差 Δx，Δx 叫做观測的或計算的絕对誤差或絕对差誤。它不表示观測的精确程度。例如測量房子的長度时近 1cm 的誤差，实际上是允許的。但是对測量两个邻近物体間的距离來講(如烛与像幕)，这样大小的誤差，就認为太不精确了。于是引起相对誤差的概念。它等于絕对誤差与这个被测量的量的值之比的絕对值 $\left|\dfrac{\Delta x}{x}\right|$。

現在設某一个量 y 由方程 $y=f(x)$ 确定。由确定 x 时的誤差 Δx，产生誤差 Δy。当 Δx 的値很小时，可以取微分 dy 做 Δy 的近似値，于是在确定量 y 时的相对誤差由下式表达：

$$\left|\frac{dy}{y}\right|。$$

例 1. 我們知道，用正切电流計，确定电流强度 i 时，用公式：

$$i=c\operatorname{tg}\varphi。$$

設 $d\varphi$ 是讀角度 φ 时的誤差。

$$di=\frac{c}{\cos^2\varphi}d\varphi,\quad \frac{di}{i}=\frac{c}{\cos^2\varphi\cdot c\operatorname{tg}\varphi}d\varphi=\frac{2}{\sin 2\varphi}d\varphi,$$

由此看出，当 φ 靠近 45° 时，确定 i 时的相对誤差 $\left|\dfrac{di}{i}\right|$ 較小。

2. 考慮乘积 uv：

$$d(uv)=vdu+udv,\quad \frac{d(uv)}{uv}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v},$$

于是

$$\left|\frac{d(uv)}{uv}\right|\leqslant\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|,$$

就是乘积的相对誤差不大于各因子的相对誤差之和。

对于商有同样的法則，因为，

$$d\frac{u}{v}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},$$

$$\frac{d\dfrac{u}{v}}{\dfrac{u}{v}}=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v};\quad \left|\frac{d\dfrac{u}{v}}{\dfrac{u}{v}}\right|\leqslant\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|。$$

3. 考慮圓面积的公式：

$$Q=\pi r^2,\ dQ=2\pi r\,dr,$$

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{2\pi r\,dr}{\pi r^2}=2\frac{dr}{r},$$

就是用上面写的公式求圓面积时，在确定面积时的相对誤差等于确定半徑时的相对誤差的二倍。

4. 如果我們要由一个角度的正弦与正切的对数求这个角度 φ，应用微分法則，就有

$$d(\log_{10}\sin\varphi)=\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\log 10\cdot\sin\varphi},\quad d(\log_{10}\operatorname{tg}\varphi)=\frac{d\varphi}{\log 10\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot\cos^2\varphi},$$

因此

$$d\varphi=\frac{\log 10\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi}d(\log_{10}\sin\varphi),\quad d\varphi=\log 10\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot d(\log_{10}\operatorname{tg}\varphi)。\quad(11)$$

假設确定 $\log_{10}\sin\varphi$ 与 $\log_{10}\operatorname{tg}\varphi$ 时，我們有同样的誤差（这个誤差依賴于所用对数表的小数位数）。公式(11)中第一式所給 $d\varphi$ 的絕对値比第二式較大。因为第一式中 $\log 10\cdot\sin\varphi$ 除以 $\cos\varphi$，而第二式中則乘以 $\cos\varphi$，且 $|\cos\varphi|<1$。因此求角度时用 $\log_{10}\operatorname{tg}\varphi$ 表比較好。

§ 4. 高阶导数与高阶微分

53. 高阶导数　我們知道函数 $y=f(x)$ 的导数，也是 x 的一个函数。再求它的导数，我們又得到一个新的函数，这叫做原来函数 $f(x)$ 的第二导数或二阶导数。記作：

$$y''\ \text{或}\ f''(x)。$$

求第二导数的导数，就得到三阶导数或第三导数：

$$y'''\ \text{或}\ f''(x)。$$

如此应用求导数的运算。就可以得到任何导数 $y^{(n)}$ 或 $f^{(n)}(x)$。考

虑一些例子：

1. $y=e^{ax}$, $y'=ae^{ax}$, $y''=a^2e^{ax}$, $\cdots$, $y^{(n)}=a^ne^{ax}$。

2. $y=(ax+b)^k$, $y'=ak(ax+b)^{k-1}$, $y''=a^2k(k-1)(ax+b)^{k-2}$, $\cdots$, $y^{(n)}=a^nk(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(ax+b)^{k-n}$。

3. 我們知道

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad (\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

就是說求 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的导数时，結果只是把角度增加 $\frac{\pi}{2}$，所以

$$(\sin x)''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

一般来講

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)。$$

4. $y=\log(1+x)$, $y'=\dfrac{1}{1+x}$, $y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $y'''=\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$,

$$\cdots,\ y^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}。$$

5. 考虑几个函数的和：

$$y=u+v+w。$$

設函数 u, v 与 w 的相当級导数存在，我們应用和的微分法則，就得到：

$$y'=u'+v'+w',\ y''=u''+v''+w'',\ \cdots,\ y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}+w^{(n)},$$

就是說和的任何导数，等于各項的同阶导数之和，例如：

$$y=x^3-4x^2+7x+10,\ y'=3x^2-8x+7,\ y''=6x-8,\ y'''=6,$$

$y^{(4)}=0$ 并且，一般来講，当 $n>3$ 时，$y^{(n)}=0$。

用同样方法能够証明，若 $n>m$，則 m 次多項式的 n 阶导数等于零。

現在考虑两个函数的乘积 $y=uv$ 的导数。应用求乘积及和的导数的法則，就得到：

$$y'=u'v+uv',$$

$$y''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=$$

$$=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''。$$

現在指出下面这个求导数的法則：为要求乘积 uv 的 n 阶导数，先用牛頓二項式公式展开 $(u+v)^n$，再在得到的展开式中将 u 及 v 的指数换成导数的阶指标，并将展开式中首尾两項的零次 $(u^0=v^0=1)$ 换成原来函数，就成了。

这个法則叫做莱伯尼慈法則，形式上可以写成下面的样子：

$$y^{(n)}=(u+v)^{(n)}。$$

我們用数学归納法証明这个法則是对的。假設这法則对于 n 阶导数是对的，就是說

$$y^{(n)}=(u+v)^{(n)}=u^{(n)}v+\frac{n}{1}u^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}。\quad(1)$$

为要得到 $y^{(n+1)}$，求上式对 x 的导数。依照求乘积的导数的公式，上式中一般項 $u^{(n-k)}v^k$ 就换成 $u^{(n-k+1)}v^{(k)}+u^{(n-k)}v^{(k+1)}$ 的和，但是形式上这个和可以写成：

$$u^{n-k}v^k(u+v)。$$

实际上，去掉括号，将指数换成导数的阶指标，我們就得到 $u^{(n-k+1)}v^{(k)}+u^{(n-k)}v^{(k+1)}$ 的和。(1)中每一項都是这样，所以 $y^{(n+1)}$ 就是将(1)的全部和形式上乘以 $(u+v)$，于是

$$y^{(n+1)}=(u+v)^{(n)}\cdot(u+v)=(u+v)^{(n+1)}。$$

我們已經証明：若莱伯尼慈法則对于某一个 n 是对的，則它对于 $(n+1)$ 也是对的。但是我們可直接确定这法則当 $n=1, 2$ 及 3 时是对的。所以它对于所有 n 的正整数值都是对的。

考慮一个例：

$$y=e^x(3x^2-1),$$

求 $y^{(100)}$:

$$y^{(100)}=(e^x)^{(100)}(3x^2-1)+\frac{100}{1}(e^x)^{(99)}(3x^2-1)'+\frac{100}{1}\cdot\frac{99}{2}(e^x)^{(98)}(3x^2-1)''+$$

$$+\frac{100}{1}\cdot\frac{99}{2}\cdot\frac{98}{3}(e^x)^{(97)}(3x^2-1)'''+\cdots+e^x(3x^2-1)^{(100)},$$

其中二次多項式的导数,从三阶起都等于零。而 $(e^x)^{(n)}=e^x$, 最后,我們得到:

$$y^{(100)}=e^x(3x^2-1)+100e^x\cdot 6x+4950e^x\cdot 6=e^x(3x^2+600x+29699)。$$

54. 二阶导数的力学意义　考虑一个点的直綫运动:

$$s=f(t),$$

其中 t 是时間, s 是由直綫上一定点算起的路程。求出对于 t 的一阶导数,得到运动的速度:

$$v=f'(t)。$$

当 Δt 趋向零时, 比 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 的極限就是二阶导数。这个比 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, 表示在时間区間 Δt 上,速度改变的快慢且給出在这时間区間上的平均加速度。而当 Δt 趋向零时, 这个比的極限就是这个运动在瞬时 t 的加速度 w:

$$w=f''(t)。$$

假設 $f(t)$ 是一个二次多項式

$$s=at^2+bt+c,\quad v=2at+b,\quad w=2a,$$

就是說加速度 w 是一个常量, 而系数 $a=\frac{1}{2}w$。当 $t=0$ 时,得到 $b=v_0$ 就是說系数 b 等于初速; 而且 $c=s_0$, 就是說 c 等于 $t=0$ 时的点到直綫上起算点的距离。将求出的 a, b 与 c 的值代入 s 的表达式中, 得到等加速度$(w>0)$或等减速度$(w<0)$运动的路程公式:

$$s=\frac{1}{2}wt^2+v_0t+s_0。$$

一般来講, 知道路程变化的規律以后,求对 t 的二阶导数, 就能确定加速度 w; 于是应用牛頓第二定律 $f=mw$ (m 是运动点的質量),就

能确定出产生这运动的力 f。

以上所述，仅适合于直綫运动。由力学中知道，在曲綫运动中，$f''(t)$ 只是加速度矢量在軌道的切綫上的投影。

例如考虑点 M 的簡諧运动，設 O 为点 M 所在的直綫上一定点，則由点 O 到点 M 的距离 s 由下式确定：

$$s=a\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t+\omega\right),$$

其中振幅 a，振动周期 τ 及相 ω 都是常量，求导数，就确定出速度 v 与力 f。

$$v=\frac{2\pi a}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t+\omega\right),\quad f=mw=-\frac{4\pi^2m}{\tau^2}a\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t+\omega\right)=$$

$$=-\frac{4\pi^2m}{\tau^2}s,$$

就是說力的大小与 $\overline{OM}$ 綫段的長短成正比，而方向相反。換句話說，就是力总是在由 M 到 O 的方向，而大小与 M 点到 O 点的距离成正比。

55. 高阶微分 現在介紹函数的高阶微分的概念。函数 $y=f(x)$ 的微分

$$dy=f'(x)dx$$

是 x 的函数，但是不要忘記自变量的微分 dx 永远算作不依賴于 x[**50**]，并且以后求导数时，可像常因子一样，把它提出导数符号的外面，把 dy 考虑作 x 的函数，就可以作出这个函数的微分，它叫做原来函数 $f(x)$ 的二阶微分，用記号 d^2y 或 $d^2f(x)$ 来記：

$$d^2y=d(dy)=[f'(x)dx]'dx=f''(x)dx^2。$$

得到的又是 x 的一个函数。再求它的微分就是三阶微分：

$$d^3y=d(d^2y)=[f''(x)dx^2]'dx=f'''(x)dx^3。$$

一般来講，繼續求微分就得到函数 $f(x)$ 的 n 阶微分的概念，并得到它的表达式

$$d^nf(x) \text{ 或 } d^ny=f^{(n)}(x)dx^n。\tag{2}$$

由这公式，可以将n阶导数表現成商的形式：

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}。\tag{3}$$

現在考慮，复合函数$y=f(u)$的情形，其中u是某一自变量的函数。我們知道[50]，这函数的一阶微分的形状与u是自变量的情形是一样的：

$$dy=f'(u)du。$$

当确定高阶微分时，因为u不是自变量，我們就不能再把du算作常量，那么得到的公式就与公式(2)的形状不同了。例如，应用求乘积的微分的公式，二阶微分就有表达式

$$d^2y=d[f'(u)du]=du\,d[f'(u)]+f'(u)d(du)=f''(u)du^2+f'(u)d^2u,$$

与公式(2)比較，它多了一項$f'(u)d^2u$。

若u是自变量；則要把du算作常量，而$d^2u=0$。現在假設u是自变量t的綫性函数，就是說：

$$u=at+b。$$

这时$du=adt$，就是說du仍可算作常量，所以这样的复合函数的高阶微分就可由公式(2)表达

$$d^nf(u)=f^{(n)}(u)du^n,$$

就是說，若x是自变量或是一个自变量的綫性函数，則表达式(2)用作高阶微分是适合的。

56. 函数的差分 用h記自变量的改变量，对应的函数的改变量就是：

$$\Delta y=f(x+h)-f(x)。\tag{4}$$

它也叫做函数$f(x)$的一阶差分。这差分本身也是x的一个函数，我們可以再求它的差分，就是这个新函数在$x+h$的值减掉在x的值。这个新差分叫做原来函数$f(x)$的二阶差分，記做Δ^2y，用函数$f(x)$的值来表达Δ^2y是很容易的：

$$\Delta^2 y=\Delta(\Delta y)=[f(x+2h)-f(x+h)]-[f(x+h)-f(x)]=$$
$$=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)。\qquad (5)$$

这个二阶差分也是 x 的函数。再确定这个函数的差分，就得到原来函数的三阶差分。将等式(5)的右方用 $x+h$ 代 x，再减掉等式(5)的右方，結果就得到 $\Delta^3 y$ 的表达式：

$$\Delta^3 y=[f(x+3h)-2f(x+2h)+f(x+h)]-[f(x+2h)-$$
$$-2f(x+h)+f(x)]=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)。$$

如此可以确定任何阶差分，且 n 阶差分将有下面的表达式：

$$\Delta^n y=f(x+nh)-\frac{n}{1}f(x+\overline{n-1}h)+\frac{n(n-1)}{2!}f(x+\overline{n-2}h)-$$
$$-\cdots+(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}f(x+\overline{n-k}h)+\cdots+(-1)^n f(x)。\qquad (6)$$

以上我們确知这公式当 $n=1,2$ 及 3 时是对的。应用数学归納法可以把它全部証明。注意，为要計算 $\Delta^n y$，須先知道变量 x 取 $x, x+h, x+2h, \cdots, x+nh$ 这些值时，函数 $f(x)$ 的 $(n+1)$ 个值。变量 x 的这些值作成公差为 h 的等差級数，或者說它們是等距离的值。

当 h 的值很小时，Δy 与 dy 也差得很少。像这一样，高阶差分也可以用作同阶微分的近似值，且逆之亦然。例如若只知道一个函数当变量取等距离值时的表，則因为沒有函数的分析表达式，就不能正确的求出它的各阶导数的值。但是替代正确的公式(3)，我們可以把比 $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ 作为导数的近似值。現在作函数 $y=x^3$ 在区間 $[2,3]$ 上的差分及微分表。取

$$\Delta x=h=0.1。$$

为要作这个表，先算出函数 $y=x^3$ 的相繼的值，再由这些值，依照公式(4)算出 Δy 的值，再由这些計算出 $\Delta^2 y$ 等等，如此法繼續用公式(6)計算差分。再用表上所列出的已知的公式（表頂所注）計算微分，并且需要置 $dx=h=0.1$。

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$dy=3x^2\,dx$	$d^2y=6x\,dx^2$	$d^3y=6\,dx^3$	$d^4y=0$
2	8.000	1.261	0.126	0.006	0	1.200	0.120	0.006	0
2.1	9.261	1.387	0.132	0.006	0	1.323	0.126	0.006	0
2.2	10.648	1.519	0.138	0.006	0	1.452	0.132	0.006	0
2.3	12.167	1.657	0.144	0.006	0	1.587	0.138	0.006	0
2.4	13.824	1.801	0.150	0.006	0	1.728	0.144	0.006	0
2.5	15.625	1.951	0.156	0.006	0	1.875	0.150	0.006	0
2.6	17.576	2.107	0.162	0.006	0	2.028	0.156	0.006	0
2.7	19.683	2.269	0.168	0.006	—	2.187	0.162	0.006	—
2.8	21.952	2.437	0.174	—	—	2.352	0.168	—	—
2.9	24.389	2.611	—	—	—	2.523	—	—	—
3	27.000	—	—	—	—	—	—	—	—

比較二阶导数 y'' 当 $x=2$ 时的准确值与近似值。在这情形下 $y''=6x$，且当 $x=2$ 时 $y''=12$。比 $\frac{\Delta^2 y}{h^2}$ 表达它的近似值，当 $x=2$ 时，我們得到

$$\frac{0.126}{(0.1)^2}=12.6。$$

若 $f(x)$ 是 x 的多项式

$$y=f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m,$$

則用公式(4)計算 Δy，得到 Δy 的表达式是一个 $(m-1)$ 次多項式，首項是 ma_0hx^{m-1}。如此在 $y=x^3$ 的情形下，Δy 将是 x 的一个二次多項式，$\Delta^2 y$ 是一个一次多項式，$\Delta^3 y$ 是个常量。而 $\Delta^4 y$ 是零(参看表)。建議讀者作为練習証明：上例中，如表內所录，d^2y 的值比 $\Delta^2 y$ 落后一个阶段。

§5. 应用导数概念研究函数

57. 函数增减性的判别法 有了导数的知識，使我們可以研究函数的种种性質。我們由一个最簡單的但也是最基本的問題开始，就是函数的增减的問題。

若在某一区間上，自变量較大的值对应于函数較大的值，就是：

$$当 h>0 时, f(x+h)-f(x)>0,$$

则把 $f(x)$ 叫做这区間上的增函数。

反之，若

$$当\ h>0\ 时,\ f(x+h)-f(x)<0,$$

则叫做减函数。

若是作出函数的圖形，则函数增加的区間将对应于圖形的这样的一部分，在这一部分曲綫上，較大的横坐标对应于較大的縱坐标。如圖 55 所示，若指定方向，OX 軸向右，OY 軸向上；则函数增加的区間将对应于这样一部分圖形，使得在横坐标增加的方向沿这曲綫向右运动时，就要上升。反之，函数减小的区間对应于这样一部分圖形，使得当如上述沿曲綫动时，就要下降。圖 55 上，圖形的一部分 AB 对应于函数增加的区間，另一部分 BC 对应于一个函数减小的区間。由圖直接看出，第一部分的任意一条切綫与正向 OX 軸作成一个角度 α，由 OX 軸起，算到这切綫；这个角度的正切是正的，而这个角度的正切恰好是一阶导数 $f'(x)$。反之，在另一部分 BC 上，正向切綫与正向 OX 軸所成角度的正切是負的，就是，在这情形下，$f'(x)$ 是負的量。比較这里得到的結果，我們引出下面这个法則：$f'(x)>0$ 的区間，是函数增加的区間，而 $f'(x)<0$ 的区間，是函数减小的区間。

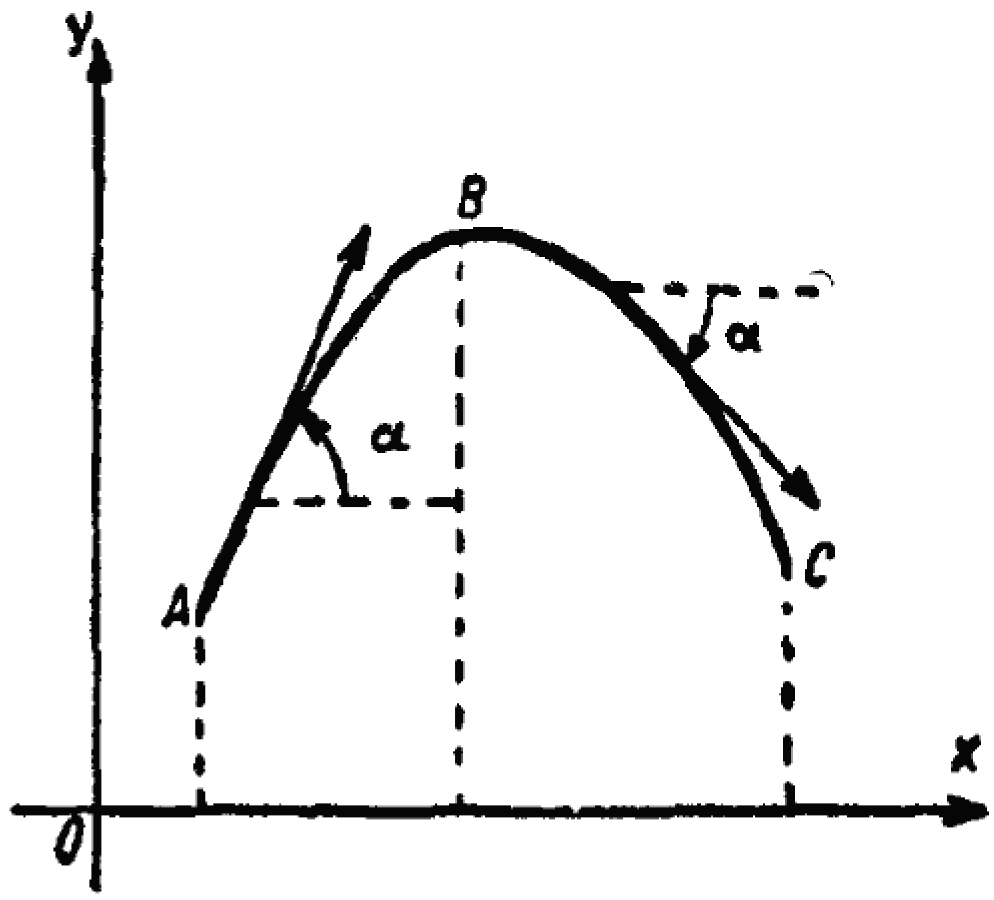


圖 55.

以上我們由圖得到这个法則。以后我們再給它一个严格的分析的証明。現在我們把所得到的法則。应用到一些例子上去。

1. 証明不等式：

$$当\ x>0\ 时,\ \sin x>x-\frac{x^3}{6}。$$

为此作差 $$f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)。$$

求出导数 $f'(x)$：

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}-(1-\cos x)=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=2\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\right]。$$

注意，弧的絕对值大于它的正弦的絕对值；于是可以肯定，在区間 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；就是，在这区間上，$f(x)$ 增加；但是 $f(0)=0$，所以

$$\text{当 } x>0 \text{ 时，} f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)>0,$$

就是， $$\text{当 } x>0 \text{ 时，} \sin x>x-\frac{x^3}{6}。$$

2. 同样可以証明：

$$\text{当 } x>0 \text{ 时，} \quad x>\log(1+x)。$$

作函数：

$$f(x)=x-\log(1+x),$$

于是， $$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}。$$

由这表达式显見，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$ 就是，在区間 $(0,+\infty)$ 上，$f(x)$ 增加，但是 $f(0)=0$，于是推知：

$$\text{当 } x>0 \text{ 时，} \quad f(x)=x-\log(1+x)>0,$$

就是，

$$\text{当 } x>0 \text{ 时，} \quad x>\log(1+x)。$$

3. 考慮在[31]中談过的刻卜勒方程：

$$x=q\sin x+a \qquad (0<q<1)。$$

我們可以先写成：

$$f(x)=x-q\sin x-a=0。$$

求导数 $f'(x)$，得到：

$$f'(x)=1-q\cos x。$$

注意，乘积 $q\cos x$ 的絕对值小于一，因为 q 在零与 1 之間；于是可以肯定，当 x 取任意一个值时，$f'(x)>0$；所以在区間 $(-\infty,+\infty)$ 内，$f(x)$ 增加；于是推知，$f(x)$ 至多有一次等于零，就是，刻卜勒方程至多有一个实根。

若常量 a 是 π 的整数倍，就是，$a=k\pi$，其中 k 是一个整数；則直接代入 $x=k\pi$

之后，得到 $f(k\pi)=0$，于是，$x=k\pi$ 就是这个刻卜勒方程的唯一的根。若 a 不是 π 的整数倍，则可以求出这样一个整数 k，使得

$$k\pi<a<(k+1)\pi。$$

讓 $x=k\pi$ 以及 $(k+1)\pi$，得到：

$$f(k\pi)=k\pi-a<0,$$

$$f(\overline{k+1}\pi)=(k+1)\pi-a>0。$$

但是，若 $f(k\pi)$ 与 $f(\overline{k+1}\pi)$ 异号，在区間 $(k\pi, \overline{k+1}\pi)$ 內至少有一个 x 的値，使得 $f(x)$ 等于零[35]。就是，这个刻卜勒方程的唯一的根要在这区間內。

4．考慮一个方程：

$$f(x)=3x^5-25x^3+60x+15=0。$$

求出导数 $f'(x)$，并且讓它等于零：

$$f'(x)=15x^4-75x^2+60=15(x^4-5x^2+4)=0。$$

解这个四次方程，得到，当

$$x=-2,\ -1,\ +1 \text{ 和 } +2$$

时，$f'(x)$ 等于零。

如此，我們可以把区間 $(-\infty, +\infty)$ 分成五个区間：

$$(-\infty, -2),\ (-2, -1),\ (-1, 1),\ (1, 2),\ (2, +\infty),$$

在每一个区間內，$f'(x)$ 保持定号，所以 $f(x)$ 的变化是單調的，就是，或者增加，或者減小；于是在每一个区間內至多有一个根。若在某一个区間的两端，$f(x)$ 的値异号，則方程 $f(x)=0$ 在这区間內必有一个根；若在两端 $f(x)$ 的値同号，則在对应的区間內沒有根。如此，为要确定这个方程的根的数目；只要在上述五个区間的各端，确定 $f(x)$ 的符号就成了。

为要确定，当 $x\to\pm\infty$ 时，$f(x)$ 的符号；把 $f(x)$ 写成：

$$f(x)=x^5\left(3-\frac{25}{x^2}+\frac{60}{x^4}+\frac{15}{x^5}\right)。$$

当 x 趋向 $-\infty$ 时，x^5 趋向 $-\infty$，而圓括号內这因子趋向 3，于是 $f(x)$ 趋向 $-\infty$。同理，当 x 趋向 $+\infty$ 时，$f(x)$ 趋向 $+\infty$。代入 $x=-2, -1, 1$ 与 2 諸値，得到下表：

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

$f(x)$ 只有在区間 $(-1, +1)$ 的两端异号，于是推知，所考慮的方程只是在这区

間內有一个实根。

以上我們定义了，函数在区間上的增减性。有时我們說一个函数在一点 $x=x_0$ 增加或减小。那是下面的意义：若对于与 x_0 足够近的 x 来講，当 $x<x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$，且当 $x>x_0$ 时，$f(x)>f(x_0)$；則当 $x=x_0$ 时，这个函数增加。类似的可以給出一个函数在一点减小的定义。由导数概念，直接推出，在一点 x_0 增加的与减小的一个充分条件，就是，若 $f'(x_0)>0$，則这函数在点 x_0 上升，若 $f'(x_0)<0$，則在点 x_0 函数减小。实际上，若 $f'(x_0)>0$，則因为比

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

以 $f'(x_0)$ 为極限，所以当 h 的絕对值足够小时，这个比有正值，就是分子与分母同号。換句話說，就是，当 $h>0$ 时，$f(x_0+h)-f(x_0)>0$；当 $h<0$ 时，$f(x_0+h)-f(x_0)<0$；所以 $f(x)$ 在点 x_0 增加。

58. 函数的極大值与極小值 再考虑某一个函数 $f(x)$ 的圖形(圖 56)。在这个圖形上，函数增加的区間与函数减小的区間是依次更替的。弧 AM_1 对应于函数增加的区間。在它后面的弧 M_1M_2 对应于函数减小的区間，再后面的 M_2M_3 又对应于一个增加的区間。每一个增加的区間与减小的区間的接触点对应于曲綫的一个頂点。例如，考虑頂点 M_1。这个頂点的縱坐标大于所有的与它足够近的左右各点的縱坐标。我們說：这样的頂点对应于函数 $f(x)$ 的一个極大值。

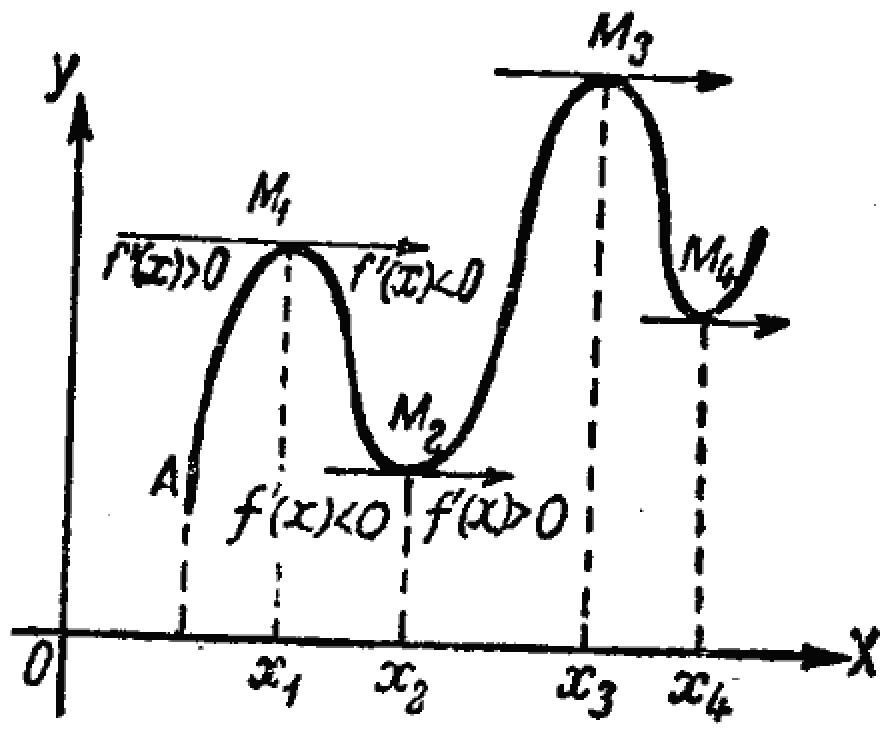


圖 56.

如此引起下面这个一般的分析的定义：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_1$ 的值 $f(x_1)$，大于所有的与它足够近的点的函数值；就是，若当 h 的絕对

值足够小时，无論 h 是正的还是負的，函数的改变量

$$f(x_1+h)-f(x_1)<0,$$

就說是 $f(x)$ 在点 $x=x_1$ 达到一个極大值。

再考虑頂点 M_2。相反的，在这个頂点的縱坐标，小于所有的它左右邻近的縱坐标，我們說这个頂点对应于函数的一个極小值；分析的定义就是：若当 h 的絕对值足够小时，无論 h 是正的还是負的，总满足条件

$$f(x_2+h)-f(x_2)>0$$

就說是 $f(x)$ 在点 $x=x_2$ 达到一个極小值。

由圖我們看到，在对应于函数的極大值的頂点与对应于函数的極小值的頂点，切綫都平行于 OX 軸。就是，它的斜率等于零。但是并不只是在頂点，才会有平行于 OX 軸的切綫。例如，圖 57 上；曲綫上的点 M，并不是一个頂点，而在这点的切綫平行于 OX 軸。

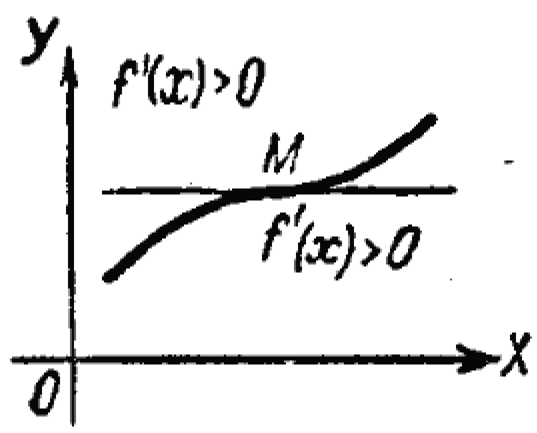


圖 57.

現在設在某一个值 $x=x_0$，$f'(x)$ 等于零，就是，在圖形上对应的位置，切綫平行于 OX 軸。我們討論当 x 的值与 x_0 很近时，$f'(x)$ 的符号。

考虑下面三种情形：

I. 当 x 的值小于 x_0 但与 x_0 充分接近时，$f'(x)$ 是正的；而当 x 的值大于 x_0 但与 x_0 充分接近时，$f'(x)$ 是負的；換句話說，就是，当 x 經过 x_0 时，$f'(x)$ 由正值經过零到負值。在这情形下，在 $x=x_0$ 之左，有一个增加的区間，在 $x=x_0$ 之右有一个減小的区間；就是，$x=x_0$ 对应于曲綫的一个頂点，它給出函数 $f(x)$ 的一个極大值（圖 56）。

II. 当 x 的值小于 x_0 时，$f'(x)$ 是負的；而当 x 的值大于 x_0 时，是正的；就是 $f'(x)$ 由負值經过零到正值。在这情形下，在 $x=x_0$ 之左，有一个減小的区間，在 $x=x_0$ 之右有一个增加的区間；就是，$x=x_0$ 对应于

曲綫的一个頂点，它給出函数的一个極小值(圖 56)。

III. 当 x 的值无論是小于或是大于 x_0 时，$f'(x)$ 有同一的符号。例如；假設总是正号。在这情形下，所对应的圖形上的点，在一个增加的区間之內，于是不是一个頂点(圖 57)。

由以上所述，引出下面一个法則，利用这法則，我們可求那些使 $f(x)$ 达到極大值或極小值的点 x:

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 求使 $f'(x)$ 等于零的 x 的值，就是，解方程 $f'(x)=0$;

(3) 依照下表，討論經过这些值时 $f'(x)$ 的符号的改变情形:

x	x_0-h	x_0	x_0+h	$f(x)$
$f'(x)$	+	0	−	極大值
	−		+	極小值
	+		+	增加
	−		−	减小

在这个表中的記号 x_0-h 与 x_0+h 表示，需要确定出当 x 的值小于 x_0 与大于 x_0 但与它足够近时，$f'(x)$ 的符号；这里 h 算作足够小的正数。

这样討論时，假定 $f'(x_0)=0$，但是，对于所有的 x 的值，与 x_0 足够近而不是 x_0 时，$f'(x)$ 不等于零。

还要提出，在圖 57 中，設点 M 的横坐标是 x_0，过点 M 的切綫通过曲綫的两側。在上述的情形下，$f'(x_0)=0$，并且对于所有的与 x_0 足够近而不是 x_0 的 x 的值，$f'(x)>0$，于是在具有点 x_0 的曲綫段的內部虽然有 $f'(x_0)=0$，但仍然給出函数增加的区間。

有的时候，極大值的定义，与以上所述略有不同：若函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 点的值 $f(x_1)$，不小于所有的与它足够近的点的函数值；就是，当 h 的絕对值足够小时，无論 h 是正的还是負的，函数的改变量 $f(x_1+h)-$ $-f(x_1)\leqslant 0$；就說是 $f(x)$ 在点 x_1 达到一个極大值。类似的可以由不

等式 $f(x_2+h)-f(x_2)\geqslant 0$ 确定在点 x_2 的極小值。用这个定义时，若一个函数在一个有極大值或極小值的点，导数存在，則像以上一样，这个导数应当等于零。

例　求函数

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$$

的極大值与極小值。

求出一阶导数：

$$f'(x)=2(x-1)(x-2)^3+3(x-1)^2(x-2)^2=$$

$$=(x-1)(x-2)^2(5x-7)=5(x-1)(x-2)^2\left(x-\frac{7}{5}\right)。$$

由最后的表达式看出；当自变量取下列各值时：

$$x_1=1,\ x_2=\frac{7}{5},\ x_3=2,$$

$f'(x)$ 等于零。

討論这些情形。当 $x=1$ 时，因子 $(x-2)^2$ 有正号，因子 $\left(x-\frac{7}{5}\right)$ 有負号。当 x 的值与 1 足够近时，无論是大些还是小些，这两个因子的符号总一样；于是推知，当 x 的值与 1 足够近时，这两个因子的乘积一定有負号。再考虑因子 $(x-1)$，当 $x=1$ 时，它等于零，$x<1$ 时，它有負号，而 $x>1$ 时，它有正号。如此，整个乘积，也就是 $f'(x)$，当 $x<1$ 时，有正号，当 $x>1$ 时，有負号。由此推知，$x=1$ 对应于函数 $f(x)$ 的一个極大值。在函数 $f(x)$ 的表达式中，讓 $x=1$，就得到所求的極大值，就是，这个函数的圖形上对应頂点的縱坐标

$$f(1)=0^2\times(-1)^3=0。$$

类似的再考虑其余的值 $x_2=\frac{7}{5}$ 与 $x_3=2$，我們得到下表：

x	$1-h$	1	$1+h$	$\frac{7}{5}-h$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}+h$	$2-h$	2	$2+h$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	增 加	0 極大值	減	小	$-\frac{108}{3125}$ 極小值		增	加	

用上述方法討論函数的極大值与極小值，有些麻煩，特别是在較复

杂的問題中，当 x 取比考察的値較大与較小的値时，确定 $f'(x)$ 的符号，会相当費事。如果在研究中引进二阶导数 $f''(x)$，則在很多情形就可避免这种麻煩。假設考察使 $f'(x_0)=0$ 的値 $x=x_0$。把这个値 $x=x_0$ 代入二阶导数的表达式中，假設得到一个正量，就是，$f''(x_0)>0$，由于 $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数，且在点 $x=x_0$，这个导数有正值，就是說函数 $f'(x)$ 在对应的点增加，就是，当 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 經过零时，应当是由負值到正値。如此，若 $f''(x_0)>0$，則函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 达到一个極小值。同理可証，若 $f''(x_0)<0$，則函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 达到一个極大值。最后，当把 $x=x_0$ 代入二阶导数的表达式时，我們得到零，就是 $f''(x_0)=0$；則不能用二阶导数来討論 $x=x_0$ 的情形，就只好直接討論 $f'(x)$ 的符号了。如此，我們得到下表：

x	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$
		$-$	極大值
x_0	0	$+$	極小值
		0	不一定

由以上所述，直接推知，在二阶导数存在时，不等式 $f''(x)\leqslant 0$ 是極大值的必要条件，$f''(x)\geqslant 0$ 是極小值的必要条件。如果我們用 $f(x_1+h)-f(x_1)\leqslant 0$ 作極大值的条件，$f(x_2+h)-f(x_2)\geqslant 0$ 作極小值的条件，这仍然是对的。

例 求函数

$$f(x)=\sin x+\cos x$$

的極大值与極小值。这个函数以 2π 为周期，就是，当以 $x+2\pi$ 替代 x 时，它不改变。所以只須討論 x 取由 0 到 2π 这个区間上的值就足够了。

求出一阶与二阶导数：

$$f'(x)=\cos x-\sin x;$$

$$f''(x)=-\sin x-\cos x_{\circ}$$

讓一阶导数等于零，得到一个方程：

$$\cos x-\sin x=0 \text{ 或 } \operatorname{tg} x=1。$$

这个方程在区間$(0, 2\pi)$上的根是：

$$x_1=\frac{\pi}{4} \quad 与 \quad x_2=\frac{5\pi}{4}。$$

討論x取这两个值时，$f''(x)$的符号：

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}<0;\ 極大值\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2};$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{4}=\sqrt{2}>0;\ 極小值\ f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}。$$

最后，我們指出当求極大值与極小值时，可能發生的一种情形。可能一个函数的圖形有这样的点，在这些点，切綫或是不存在，或是平行于OY軸(圖58)。在第一种这样的点，导数$f'(x)$不存在；在第二种的点，它成为无穷大，因为平行于OY軸的切綫的斜率是无穷大。但是由圖直接看到，这样的点可以是函数的極大值或極小值。如此，严格来講，以上所述求函数的極大值与極小值的法則，应当补充这样一句話：函数的極大值与極小值，不仅是在使$f'(x)$等于零的点出現，而在$f'(x)$不存在或是成为无穷大的点也会出現。討論后一类的点时，要用上述的第一个办法，就是要看，当x取較大与較小的值时，$f'(x)$的符号。

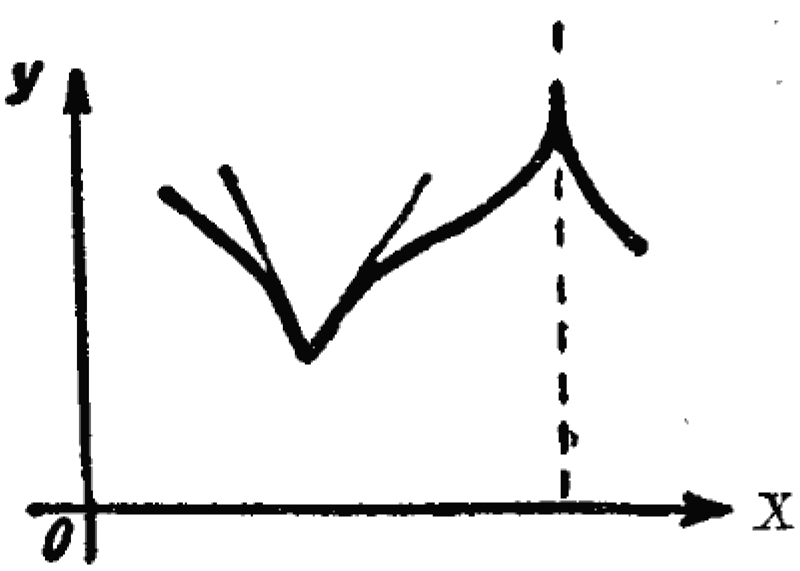


圖 58.

例　求函数

$$f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$$

的極大值与極小值。求出一阶导数：

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}。$$

当$x=\frac{2}{5}$时，它等于零。当$x=0$时，成为无穷大。討論后一个值：当$x=0$时，分子有負号，于是当x取与零足够近的值时，无論大于零还是小于零，分子总有負号。当$x<0$时，分母有負号；而当$x>0$时，分母有正号。于是推知，当$x<0$而与0足够近时，整个分式有正号，而当$x>0$时有負号，就是，当$x=0$时，有一个極大值$f(0)=0$。在点$x=\frac{2}{5}$有一个極小值

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}。$$

59. 作圖 求出函数 $f(x)$ 的極大值与極小值，可使这函数的作圖比較簡單。現在用下面几个例闡明作函数圖形的簡單办法。

1. 設要作函数

$$y=(x-1)^2(x-2)^3$$

的圖形，我們用前一段的討論，得到这曲綫的两个頂点，一个極大值(1, 0)，一个極小值$\left(\frac{7}{5}, -\frac{108}{3125}\right)$。在圖上标記出这两个点。此外，再标記出这曲綫在两軸上的截点。当 $x=0$ 时，$y=-8$，就是 OY 軸上的截距是 $y=-8$。讓 y 等于零，就是

$$(x-1)^2(x-2)^3=0,$$

得到 OX 軸上的截距。一个是 $x=1$，我們已經說过，它是一个頂点；另一个是 $x=2$，如前一段中所說，它不是一个頂点，但是过圖形上对应点的切綫平行于 OX 軸。圖 59 表示这个曲綫的圖形。

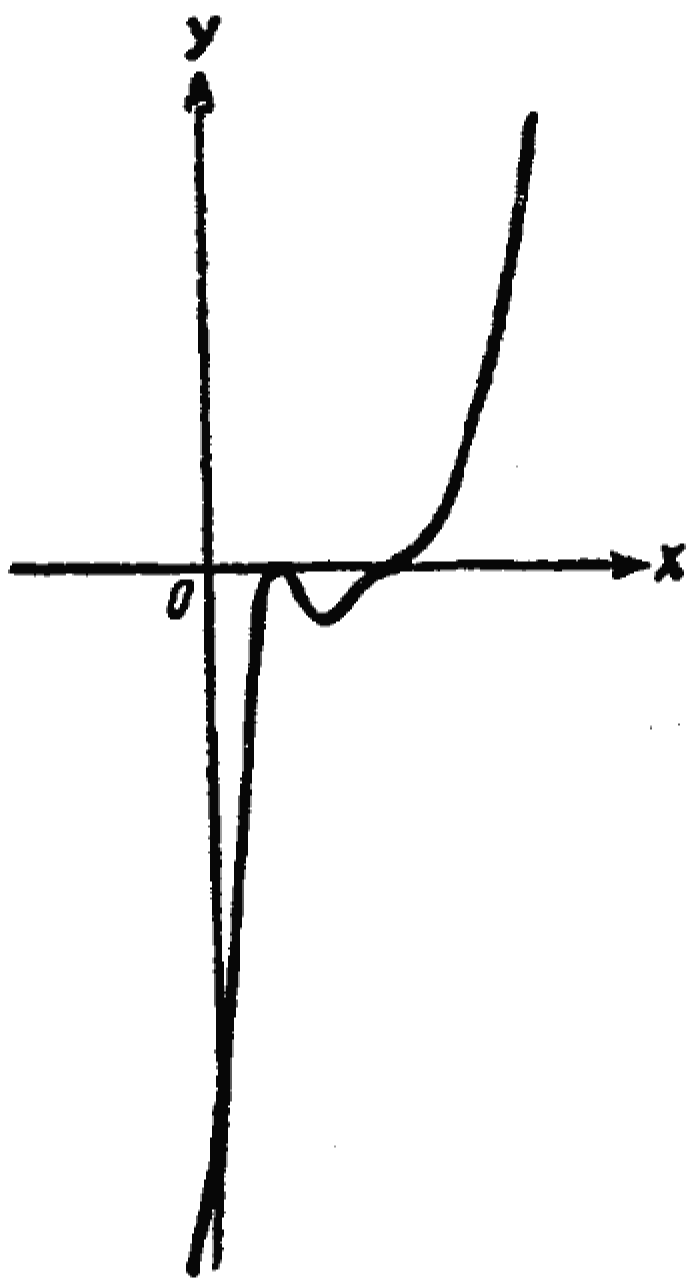


圖 59.

2. 画曲綫

$$y=e^{-x^2}。$$

求出一阶导数

$$y'=-2xe^{-x^2}。$$

讓 y' 等于零，得到 $x=0$，不难看出，它对应于这曲綫的一个頂点(極大值)，縱坐标是 $y=1$。这个点也就是这曲綫在 OY 軸上的截点。再讓 y 等于零，得到一个方程 $e^{-x^2}=0$，它沒有解，就是这曲綫在 OX 軸上沒有截点。此外，还要注意，当 x 趋向 $(+\infty)$ 或 $(-\infty)$ 时，e^{-x^2} 的方幂 $(-x^2)$ 趋向 $(-\infty)$，于是 e^{-x^2} 趋向零；就是，当向左右两方无限远移时，曲綫与 OX 軸无限接近。由以上得到的性質作出这曲綫，如圖 60 所示。

3. 作曲綫

$$y=e^{-ax}\sin bx \quad (a>0)。$$

它的圖形叫做阻尼振动圖形。因子 $\sin bx$ 的絕对值不大于一，所以全部曲綫要在

$$y=e^{-ax} \quad 与 \quad y=-e^{-ax}$$

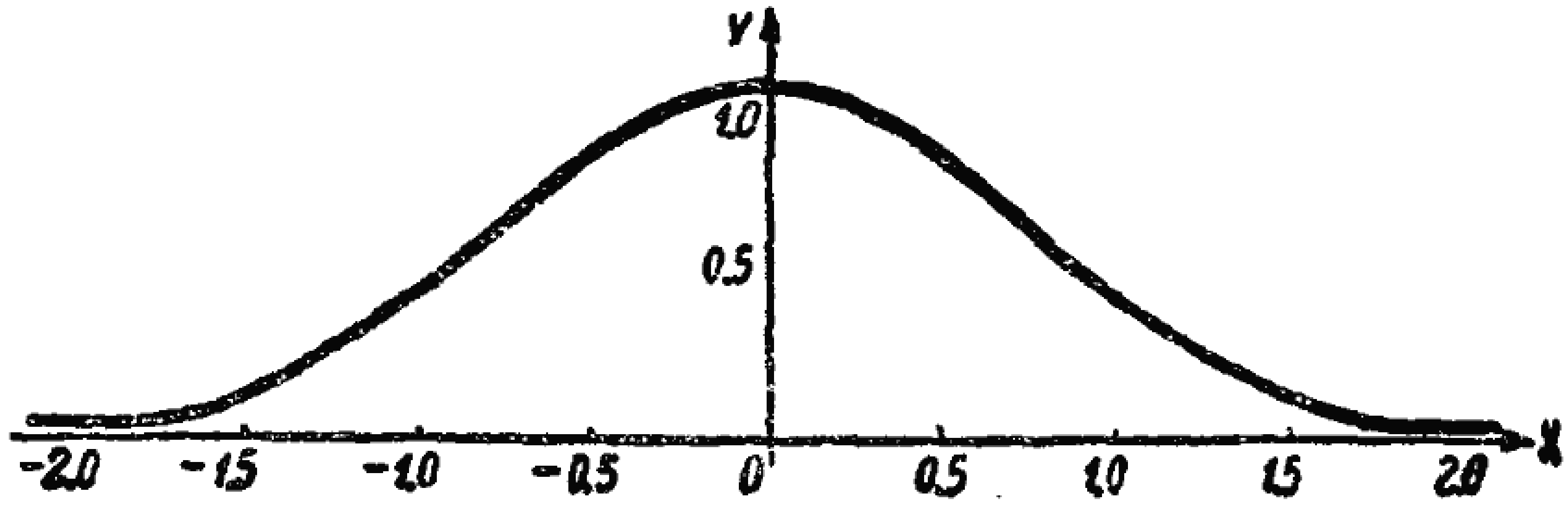


圖 60.

两条曲綫之間。

当 x 趋向 $(+\infty)$ 时，因子 e^{-ax} 趋向零，于是 $e^{-ax}\sin bx$ 亦趋向零；就是，当向右无限远移时，曲綫与 OX 軸无限接近。这曲綫在 OX 軸上的截距由方程

$$\sin bx=0$$

确定，就是
$$x=\frac{k\pi}{b}\quad (k\text{ 是整数})。$$

求出一阶导数：

$$y'=-ae^{-ax}\sin bx+be^{-ax}\cos bx=e^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)。$$

但是我們知道，括号內的表达式，可以表示成下面的样子：

$$b\cos bx-a\sin bx=K\sin(bx+\varphi_0),$$

其中 K 与 φ_0 是常量。讓一阶导数等于零，得到一个方程：

$$\sin(bx+\varphi_0)=0,$$

这方程給出：

$$bx+\varphi_0=k\pi,\ \text{就是},\ x=\frac{k\pi-\varphi_0}{b}\quad (k\text{是整数})。\qquad (1)$$

当 x 經过这样一个值时，$K\sin(bx+\varphi_0)$ 变一次号。因为因子 e^{-ax} 不变号，所以一阶导数

$$y'=Ke^{-ax}\sin(bx+\varphi_0)$$

也同样的变号。于是推知，这些根，依次交替地对应于这函数的極大値与極小値。

若是沒有指数因子 e^{-ax}，就只是一个正弦曲綫：

$$y=\sin bx,$$

它的頂点的横坐标，要由方程

$$\cos bx=0$$

得来，就是

$$x=\frac{(2k-1)\pi}{2b} \quad (k\text{ 是整数})。 \tag{1_1}$$

如此，我們看出，指数因子不仅减小这振动的振幅，而且也使这曲綫各頂点的横坐标移动。比較方程（1）与（1_1），不难看出，頂点横坐标移动一个常量 $\left(-\frac{\pi}{2b}-\frac{\varphi_0}{b}\right)$。圖 61 表示当 $a=1$，$b=2\pi$ 时，一个阻尼振动的圖形。虛綫对应于方程 $y=\pm e^{-ax}$ 的圖形。这曲綫的頂点不在虛綫曲綫上，如上所述，差一个常量。

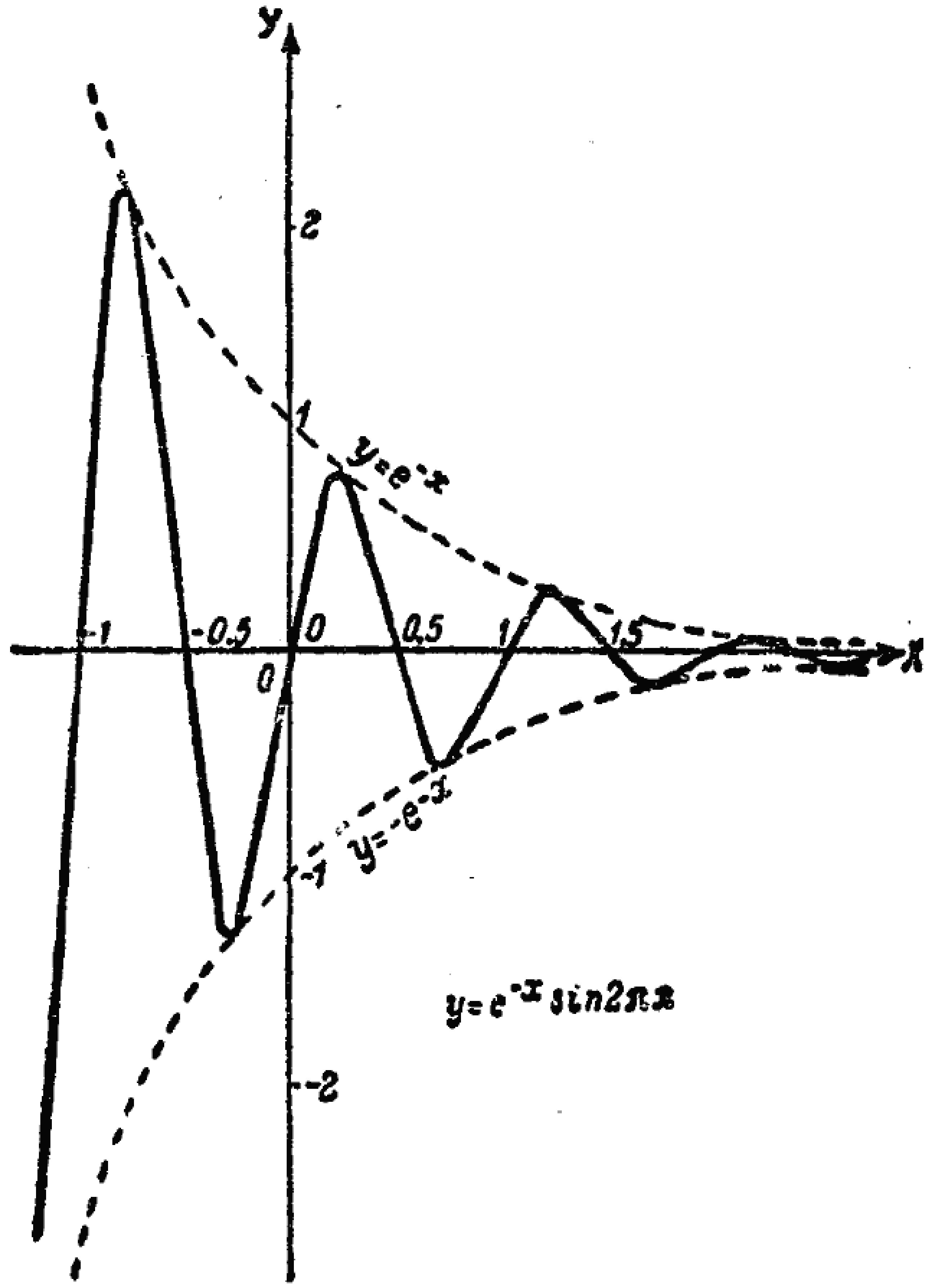


圖 61.

4. 作曲綫
$$y=\frac{x^3-3x}{6}。$$

求出一阶与二阶导数：

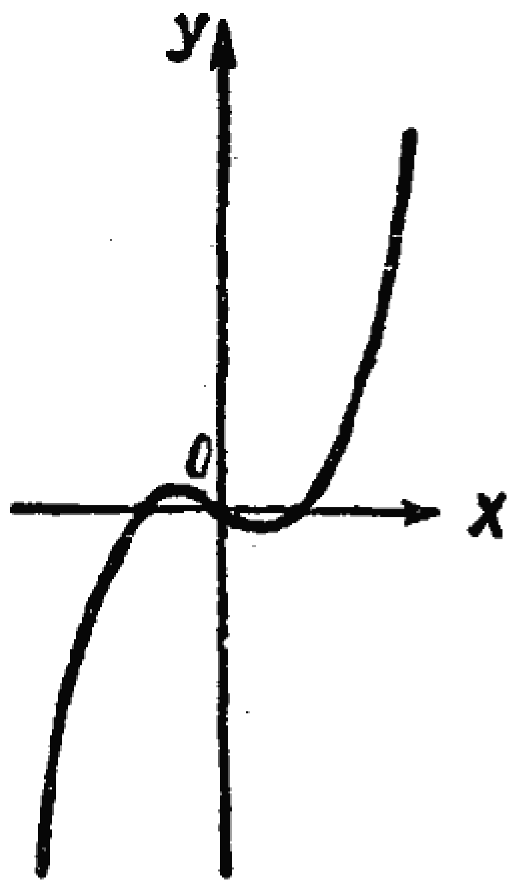


圖 62.

$$y'=\frac{x^2-1}{2};\quad y''=x。$$

讓一阶导数等于零，得到

$$x_1=1 \text{ 与 } x_2=-1。$$

把这些值代入二阶导数中，确知第一个值对应于一个極小值，第二个值对应于一个極大值。把这些值代入 y 的表达式中，确定这曲綫的对应頂点：

$$\left(-1,\ \frac{1}{3}\right),\ \left(1,\ -\frac{1}{3}\right)。$$

讓 $x=0$，得到 $y=0$，就是，坐标原点 $(0, 0)$ 在这曲綫上。最后，讓 y 等于零，除 $x=0$ 外，还得到两个值 $x=\pm\sqrt{3}$，就是这曲綫与坐标軸的交点是 $(0, 0)$，$(\sqrt{3}, 0)$ 与 $(-\sqrt{3}, 0)$。再注意，当用 $(-x)$ 与 $(-y)$ 替代 x 与 y 时，方程的两側都只是变号；就是，坐标原点是这曲綫的对称中心（圖 62）。

60. 函数的最大値与最小値 現在考慮当自变量 x 取区間 $[a, b]$ 上的值时，函数 $f(x)$ 的值，并且我們要求这些值中的最大値与最小値。若函数 $f(x)$ 連續，則如[**35**]所述，它必定达到最大値与最小値；就是，这函数对应的圖形在这区間上必有最大的縱坐标与最小的縱坐标。应用前述法則，我們可以求出函数在这区間 $[a, b]$ 内所有的極大値与極小値。若函数 $f(x)$ 在这区間内有最大値，則这个最大値就是在区間 $[a, b]$ 内函数諸極大値中的最大的。但是有时最大値不在区間内，而在它的一端 $x=a$ 或 $x=b$。所以，求函数的最大値时，不仅要比較区間内所有的極大値，也要注意到在区間两端的函数值。同样，确定函数的最小値时，要求出在区間内的所有的極小値，以及当 $x=a$ 与 $x=b$ 时，函数的值。这里我們指出，極大値与極小値可以都沒有，但是在有界区間 $[a, b]$ 上的連續函数，一定有最大値与最小値。

現在提出几个特殊情形，这时求最大値与最小値特別簡單。例如，若函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上是增函数，則显然当 $x=a$ 时，它取最小値；当 $x=b$ 时，它取最大値。对于减函数恰好相反。

若在这区間内，函数有一个極大值，而沒有極小值；則这个唯一的極大值就是这函数的最大值（圖63），因此，在这情形下，要确定函数的最大值，就不必定出在区間两端的函数值。同理，若函数在区間内有一个極小值，而沒有極大值，則这个極小值就是函数的最小值。在下面前四个問題中，都有这里所說的情形出現。

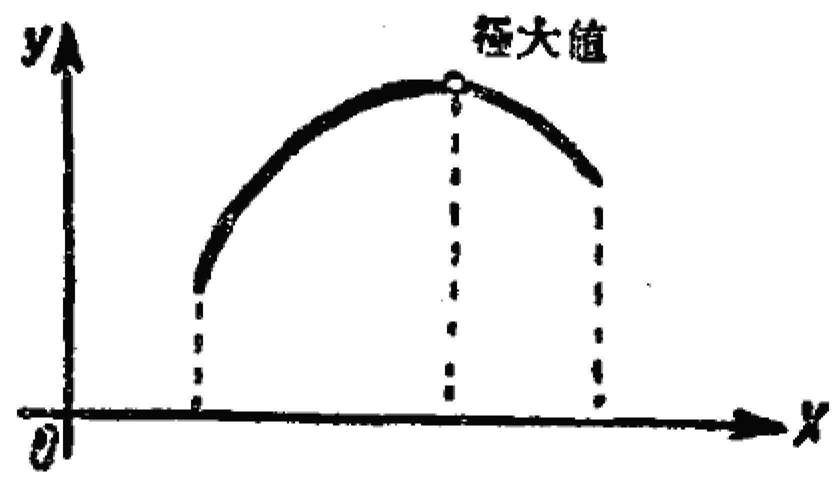


圖 63.

1. 給定一个綫段，長度为 l，試把它分为两段，使得以这两段作边的矩形，面积最大。

設 x 是其中一段的長度，$l-x$ 是另一段的長度。由于矩形的面积等于两邻边的乘积，这个問題就是要求这样一个 x 的值；使得当 x 取这个值时，函数

$$f(x)=x(l-x)$$

在 x 的变化区間 $[0, l]$ 上达到最大值。

求出一阶与二阶导数

$$f'(x)=(l-x)-x=l-2x,\quad f''(x)=-2<0。$$

讓一阶导数等于零，只得到一个值 $x=\frac{l}{2}$，因为 $f''(x)$ 总是負的，所以它对应于一个極大值。如此，求得边長为 $\frac{l}{2}$ 的正方形面积最大。

2. 由半徑为 R 的圓上，割去一个扇形，把剩下的部分圍成一个圓錐，試求割去扇形的这样的角度，它使所作的圓錐体积最大。

我們不用所割去扇形的角度，而用 2π 減掉这个角度作自变量 x，就是說剩下的扇形的角度是 x。当 x 的值逼近 0 或 2π 时，圓錐的体积都逼近零，显然，在区間 $(0, 2\pi)$ 内，有这样一个 x 的值存在，使得这个体积最大。

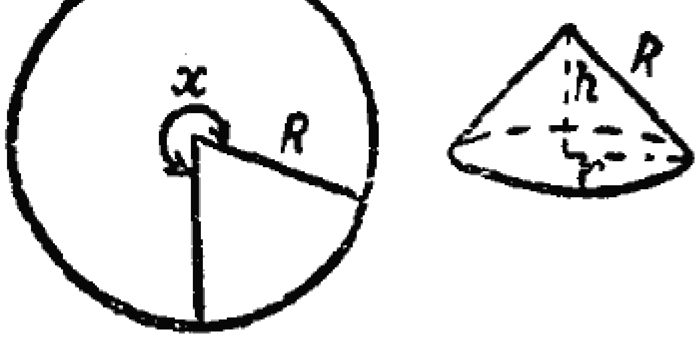


圖 64.

把剩下的部分圍成圓錐时，（圖 64），我們得到一个圓錐，斜高等于 R，底周的長度等于 Rx，底半徑 $r=\frac{Rx}{2\pi}$，高

$$h=\sqrt{R^2-\frac{R^2x^2}{4\pi^2}}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}。$$

这圓錐的体积就是：

$$v(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^3}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}。$$

求这个函数的極大值时，我們可以不管常因子 $\frac{R^3}{24\pi^2}$。剩下的乘积 $x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$ 是正的，于是当它的平方达到最大值时，它也达到最大值。如此，我們可以在区間 $(0,\ 2\pi)$ 內考慮函数

$$f(x)=4\pi^2x^4-x^6。$$

求出一阶导数：

$$f'(x)=16\pi^2x^3-6x^5。$$

对于全部 x 的值，它都存在。讓它等于零，得到三个值：

$$x_1=0,\ x_2=-2\pi\sqrt{\frac{2}{3}},\ x_3=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}。$$

前两个值不在区間 $(0,\ 2\pi)$ 內，在这区間內的，只有一个值 $x_3=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$，但是以上我們知道在这区間內应当有一个極大值，于是不必討論，就可以肯定，x_3 对应于有最大体积的圓錐。

3. 直綫 L 将平面分为两部(介質) I 与 II。一个点在介質 I 中运动的速率是 v_1，在介質 II 中运动的速率是 v_2。試求这个点經过怎样一个路綫时，由介質 I 內点 A 到介質 II 內点 B 能够最快。

設 AA_1 与 BB_1 各为由 A 与 B 到直綫 L 的垂綫。記作

$$\overline{AA_1}=a,\ \overline{BB_1}=b,\ \overline{A_1B_1}=c,$$

并且直綫 L 上的坐标，由 A_1 算起，以 $\overline{A_1B_1}$ 为正向(圖 65)。

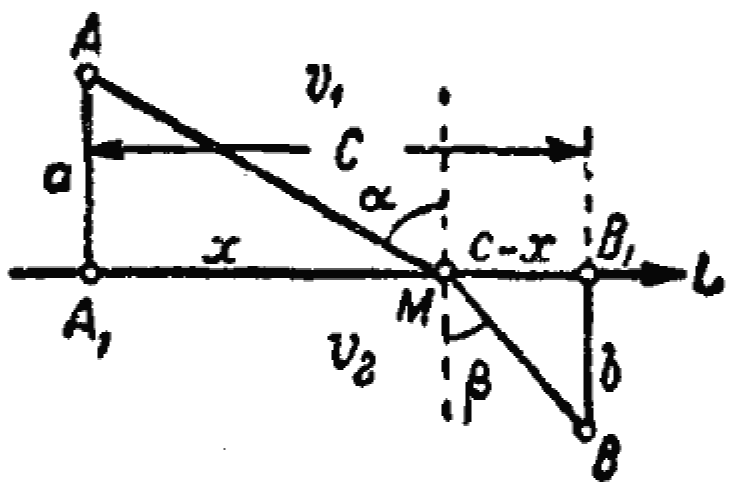


圖 65.

显然，在介質 I 以及介質 II 中这个点的路綫都应当是直綫，但是沿直綫 AB 的路綫不見得就是"最快的路綫"。所以"最快的路綫"应当由两个直綫段 $\overline{AM}$ 与 $\overline{MB}$ 組成，并且点 M 应在直綫 L 上。取点 M 的坐标 x 作自变量：$x=\overline{A_1M}$。走得最快时所需的时間 t 就由下面这公式确定于区間 $(-\infty,+\infty)$ 上：

$$t=f(x)=\frac{\overline{AM}\text{之長}}{v_1}+\frac{\overline{MB}\text{之長}}{v_2}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}。$$

現在要求它的最小值。

求出一阶与二阶导数：

$$f'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

$$f''(x)=\frac{a^2}{v_1(a^2+x^2)^{3/2}}+\frac{b^2}{v_2[b^2+(c-x)^2]^{3/2}}。$$

对于全部 x 的值，这两个导数都存在，并且 $f''(x)$ 总有(+)号。于是 $f'(x)$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数，所以最多有一次等于零。但是

$$f'(0)=-\frac{c}{v_2\sqrt{b^2+c^2}}<0 \quad 而 \quad f'(c)=\frac{c}{v_1\sqrt{a^2+c^2}}>0,$$

所以方程

$$f'(x)=0$$

在 0 与 c 之間，有一个唯一的根，因为 $f''(x)>0$，它对应于函数 $f(x)$ 的極小值。坐标 0 与 c 各对应于点 A_1 与 B_1，所以，所求的点 M 必在点 A_1 与 B_1 之間。这也可由初等几何的理由証明。

现在解釋所求的解的几何意义，过点 M 作直綫 L 的垂綫，綫段 $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ 与这垂綫的交角各記作 α, β。所求的点 M 的坐标 x 应当使得 $f'(x)$ 等于零，就是应当满足方程：

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

这可以写成：

$$\frac{\overline{A_1M}}{v_1\cdot AM}=\frac{\overline{MB_1}}{v_2\cdot BM},$$

或

$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2}, \quad 就是，\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2},$$

所以“最快的路綫”中，α 与 β 的正弦之比等于在介質 I 与 II 中速率的比。把这結果与光的折射定律相比較，就知道光的折射是这样的，光綫由一种介質中一点到另一种介質中一点时，选擇“最快的路綫”。

4. 設在实驗中确定一个量 x，由于仪器的不精确，对同一个量作几次观测，会得到 n 个不同的值

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n,$$

若量 x 的某一个值，与这 n 个值之差的平方和最小，这个値叫做量 x 的“最可能的”值。如此，求这个値就归結为求使得函数

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$

在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上达最小値的 x。

求出一阶与二阶导数：

$$f'(x)=2(x-a_1)+2(x-a_2)+\cdots+2(x-a_n),$$

$$f''(x)=2+2+\cdots+2=2n>0。$$

讓一阶导数等于零，得到唯一的一个解

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

因为二阶导数是正的，所以这个値对应于一个極小値。如此，x 的"最可能的"値，就是由观測得到的値的算术平均値。

5．求一点 M 到一个圓周的最短距离。

取圓心 O 作坐标原点，直綫 OM 作 OX 軸。設 $OM=a$，圓周的半徑是 R，圓周的方程就是：

$$x^2+y^2=R^2,$$

点 M 的坐标是 $(a, 0)$，由点 M 到圓周上任意一点的距离就是：

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}。$$

現在求这个距离平方的最小値。由圓周的方程，得到 y^2 的表达式 R^2-x^2；把它代入距离平方的表达式中，得到一个函数：

$$f(x)=(x-a)^2+(R^2-x^2)=-2ax+a^2+R^2,$$

其中自变量 x 可以在区間 $(-R\leqslant x\leqslant R)$ 上改变。

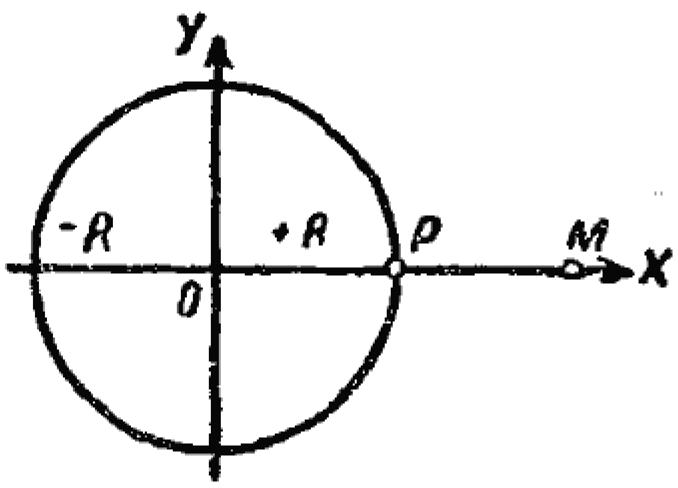


圖 66.

因为一阶导数：

$$f'(x)=-2a$$

无論 x 取什么値，总是負的，所以 $f(x)$ 总是減小的，于是，在区間的右端，当 $x=R$ 时，它达到最小値。最短距离就是綫段 $\overline{PM}$ 的長(圖 66)。

6．在已知正圓錐中，作一个內接正圓柱，使得它的全面积最大。

用 R 与 H 各記圓錐的底半徑与高，r 与 h 各記圓柱的底半徑与高。要求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大値。

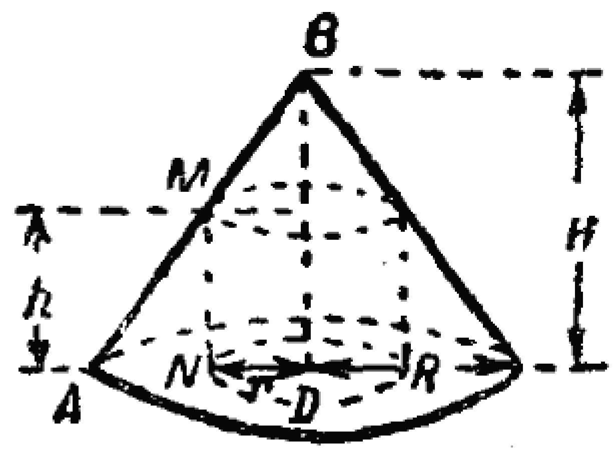


圖 67.

圓柱內接于一个已知圓錐，这是将 r 与 h 連系起来的一个条件。由相似三角形 ABD 与 AMN，得到(圖 67)：

$$\frac{MN}{AN}=\frac{BD}{AD},$$

或

$$\frac{h}{R-r}=\frac{H}{R},$$

由此
$$h=\frac{R-r}{R}H。$$

把这个 h 的值代到 S 的表达式中，得到:
$$S=2\pi\left[r^2+rH\left(1-\frac{r}{R}\right)\right]。$$

如此，S 就是一个自变量 r 的函数，r 可以在区間 $0\leqslant r\leqslant R$ 上改变。求出一阶和二阶导数:
$$\frac{dS}{dr}=2\pi\left(2r+H-\frac{2r}{R}H\right),\quad \frac{d^2S}{dr^2}=4\pi\left(1-\frac{H}{R}\right)。$$

讓 $\frac{dS}{dr}$ 等于零，得到 r 的一个值:
$$r=\frac{HR}{2(H-R)}。\tag{2}$$

为要这个值在区間 $(0, R)$ 內，它必須滿足不等式
$$0<\frac{HR}{2(H-R)} \text{ 与 } \frac{HR}{2(H-R)}<R。\tag{3}$$

第一个不等式相当于說 H 应当大于 R。第二个不等式的两側乘以正量 $2(H-R)$，得到:
$$R<\frac{H}{2}。$$

适合这个条件时，$\frac{d^2S}{dr^2}$ 有(－)号；于是值(2)对应于函数 S 的唯一的極大值，也就是这时这个圓柱有最大的全面积。只要把 r 的值(2)代入 S 的表达式中，就可以确定这个量。

現在假設值(2)不在区間 $(0, R)$ 內，就是不等式(3)中有一个不被滿足。这时有两个可能:或者 $H\leqslant R$；或者 $H>R$，但是 $R\geqslant\frac{H}{2}$。它們都可用下面的不等式表示:
$$H\leqslant 2R。\tag{4}$$

把 $\frac{dS}{dr}$ 的表达式写成:
$$\frac{dS}{dr}=2\pi\left(2r+H-\frac{2r}{R}H\right)=\frac{2\pi}{R}[(2R-H)r+H(R-r)]。$$

由这表达式看出，当 $0<r<R$，而 R 与 H 滿足(4)时，$\frac{dS}{dr}>0$，就是函数 S 在区間 $(0, R)$ 上是增函数，所以当 $r=R$ 时，达到最大值。但是当 r 取这个值时，显然 $h=0$，于是得到的解可以考虑作一个扁平的圓柱，它的两底都与已知圓錐的

底重合，而全面积为 $2\pi R^2$。

61. 費尔馬定理 以前我們应用初等几何，叙述了檢驗函数的增減性，求最大值与最小值，求極大值与極小值的方法。現在我們轉向一些定理与公式的严格的分析的叙述，同时也給出上面所引进的法則的分析証明，并且借此再討論函数的别的性質。下面的叙述中，我們詳細列出，每一个定理或公式成立时，所須要的全部条件。

費尔馬定理 若函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續，在这区間内每一个点导数都存在，并且在区間内某一点 $x=c$ 达到最大（或最小）值；則在点 $x=c$，一阶导数等于零，就是 $f'(c)=0$。

为确定起見，假設值 $f(c)$ 是函数的最大值。至于是最小值的情形，可用类似的方法証明。由所給的条件，点 $x=c$ 在区間内，并且，无論 h 是正的还是負的，差 $f(c+h)-f(c)$ 一定不是正的：

$$f(c+h)-f(c)\leqslant 0。$$

作出比
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}。$$

因为这分式的分子小于或等于零，所以

$$\left.\begin{aligned}&\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqslant 0, \quad \text{当 } h>0 \text{ 时},\\ \text{而}\quad &\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqslant 0, \quad \text{当 } h<0 \text{ 时}。\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

因为点 $x=c$ 在区間内，由所給条件，在这点导数存在，就是上面写的分式，当 h 以任何方式趋向零时，趋向一个确定的極限 $f'(c)$。先設 h 沿正值趋向零，这时由不等式(5)中第一个不等式取極限得到：

$$f'(c)\leqslant 0。$$

同理，若 h 沿負值趋向零，則由(5)的第二个不等式取極限得到：

$$f'(c)\geqslant 0。$$

比較这些不等式，我們得到要証明的結果 $f'(c)=0$。

62. 罗尔定理 若函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續，在这区間內每一点有导数，并且在这区間两端，函数值相等，就是 $f(a)=f(b)$；则在这区間內至少有这样一个值 $x=c$ 存在，使得导数等于零，就是 $f'(c)=0$。

在考虑的区間上，这个連續函数 $f(x)$ 应当达到一个最大值 M 与一个最小值 m。若最大值与最小值相同，就是 $M=m$，则显然由此可以推知，这函数在整个区間上保持一个常值，等于 m (或 M)。但是，我們知道，一个常量的导数等于零；于是推知，在这个簡單情形下，在区間內任意一点，导数等于零。再考虑一般的情形，以下我們算作 $m<M$。由于所給条件，在两端函数值相同，就是，$f(a)=f(b)$，则 m 与 M 中至少有一个数与函数在端点的值不同。例如，設这是 M，就是，在两端这个函数不达到最大值，而是在区間內。設 $x=c$ 是达到最大值的点。应用費尔馬定理，在这个点，$f'(c)=0$。于是罗尔定理得証。

特殊情形：若 $f(a)=f(b)=0$，罗尔定理可以簡述如下：在函数的两个根之間，它的一阶导数至少有一个根。

罗尔定理具有簡單的几何意义。由所給条件，$f(a)=f(b)$，就是，对应于这区間的两端，曲綫 $y=f(x)$ 的縱坐标相等；而在这区間內导数存在，就是这曲綫有确定的切綫。罗尔定理肯定，这时，在这区間內，至少存在这样一个点，使得导数等于零，就是在这点的切綫平行于 OX 軸 (圖 68)。

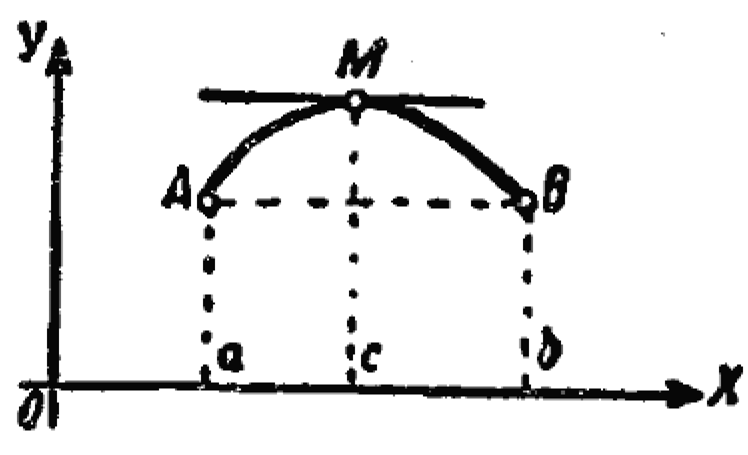


圖 68.

附注 若罗尔定理中，在区間內所有的点导数都存在这条件不成立，则这定理可以不对。

例如：函数

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$$

在区間 $[-1, +1]$ 上連續，并且 $f(-1)=f(1)=0$，但是导数

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

在这区間內不为零。这是由于当 $x=0$ 时，$f'(x)$ 不存在所致（成为 ∞）（圖 69）。圖 70 表示另一个例。在这情形下，曲綫 $y=f(x)$ 具有 $f(a)=f(b)=0$ 这条件。由圖看出，在区間 (a, b) 內，切綫总不平行于 OX 軸，就是 $f'(x)$ 不为零。这是因为在点 $x=\alpha$ 的左右，这曲綫有两条不同的曲綫；于是推知，在这点沒有确定的导数存在，而不满足罗尔定理中在区間內任意一点导数都存在这个条件。

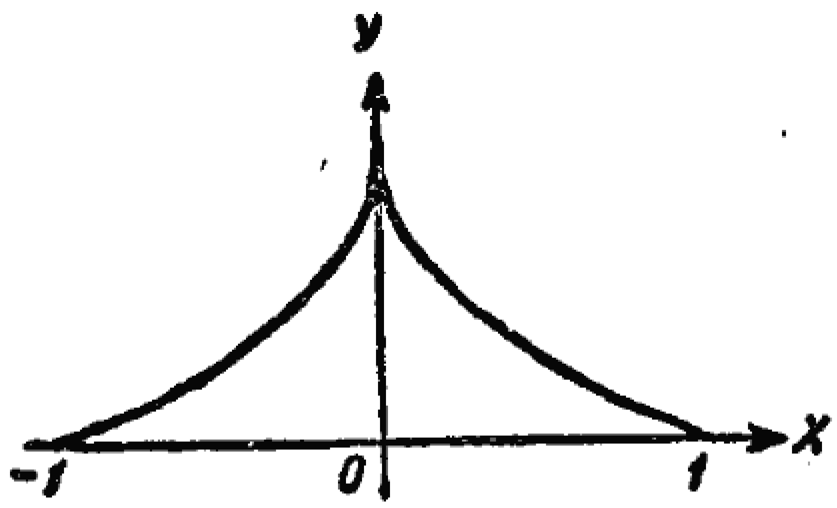


圖 69.

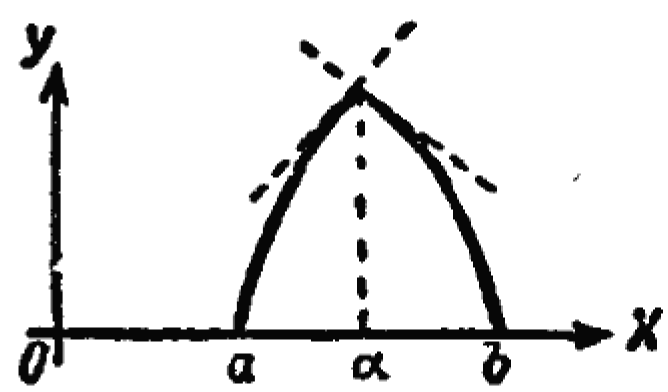


圖 70.

63. 拉格朗日公式 現在假設函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續，在这区間內有导数，但是罗尔定理中 $f(a)=f(b)$ 这条件可以不适合。作一个函数

$$F(x)=f(x)+\lambda x,$$

其中 λ 是一个常量，我們要确定它，使得这个新函数 $F(x)$ 满足罗尔定理中的上述条件，就是須要使得

$$F(a)=F(b),$$

或

$$f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b,$$

由此

$$\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

現在对 $F(x)$，由罗尔定理，可以肯定，在 a 与 b 之間，有这样一个值 $x=c$，使得

$$F'(c)=f'(c)+\lambda=0 \quad (a<c<b),$$

由此，把上面的 λ 的值代入之后，就得到

$$f'(c)=-\lambda \text{ 或 } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

后一个等式可以写成

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)。$$

这个等式叫做拉格朗日公式。值 c 在 a 与 b 之間，所以比 $\frac{c-a}{b-a}=\theta$ 在零与 1 之間，我們可以写成：

$$c=a+\theta(b-a) \quad (0<\theta<1),$$

于是拉格朗日公式可以写成：

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+\theta(b-a)] \quad (0<\theta<1)。$$

設 $b=a+h$，我們还得到下面样子的公式：

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)。$$

拉格朗日公式給函数 $f(x)$ 的改变量 $f(b)-f(a)$ 一个准确的表达式，所以也叫做改变量公式。

我們知道，一个常量的导数等于零；由拉格朗日公式，我們可以作出它的逆命題：若在区間 $[a, b]$ 上任意一点，导数 $f'(x)$ 都等于零，則函数 $f(x)$ 在这区間上是一个常量。

实际上，在区間 $[a, b]$ 上任意取一个值 x，对于区間 (a, x)，应用拉格朗日公式，得到

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi) \quad (a<\xi<x);$$

但是，由所給条件 $f'(\xi)=0$，于是推知

$$f(x)-f(a)=0, \text{ 就是 } f(x)=f(a)=\text{常量}。$$

我們只知道，拉格朗日公式中的量 c 是在 a 与 b 之間，所以拉格朗日公式并不給出通过导数来准确計算函数改变量的可能性，但是它可帮助我們来估計，用函数的微分替代它的改变量时，所生的誤差。

例 設

$$f(x)=\log_{10}x。$$

导数是：

$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log 10}=\frac{M}{x}\quad (M=0.43429\cdots),$$

于是由拉格朗日公式給出：

$$\log_{10}(a+h)-\log_{10}a=h\cdot\frac{M}{a+\theta h}\quad (0<\theta<1)$$

或

$$\log_{10}(a+h)=\log_{10}a+h\frac{M}{a+\theta h}。$$

用微分替代改变量。得到近似公式：

$$\log_{10}(a+h)-\log_{10}a=h\frac{M}{a}$$

或

$$\log_{10}(a+h)=\log_{10}a+h\frac{M}{a}。$$

比較由拉格朗日公式得到的准确等式与这个近似等式，看出差誤就是：

$$h\frac{M}{a}-h\frac{M}{a+\theta h}=\frac{\theta h^2M}{a(a+\theta h)}。$$

設 $a=100$, $h=1$, 得到近似等式：

$$\log_{10}101=\log_{10}100+\frac{M}{100}=2.00434\cdots,$$

具有差誤

$$\frac{\theta M}{100(100+\theta)}\quad (0<\theta<1)。$$

用1替代这分式分子中的 θ，用零替代分母中的 θ，之后，分式增加，因此可以說，这样算出的 $\log_{10}101$ 的値，差誤小于

$$\frac{M}{100^2}=0.00004\cdots。$$

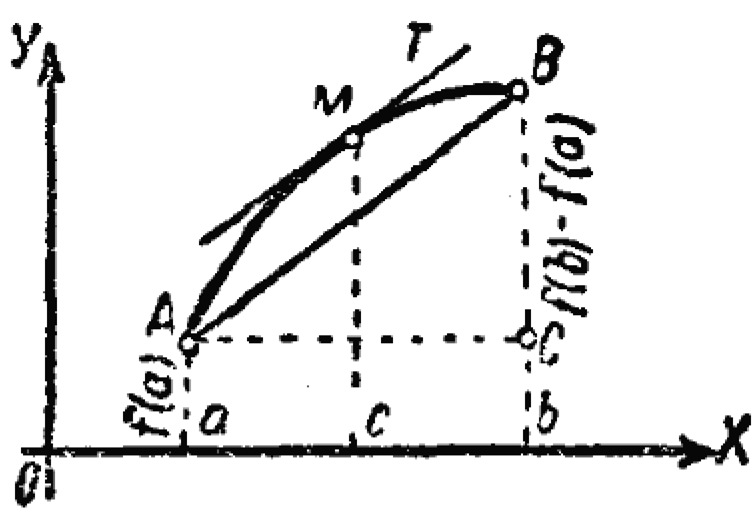


圖　71

把拉格朗日公式写成：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad (a<c<b)。$$

作出函数 $y=f(x)$ 的圖形(圖71)，注意，比：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\operatorname{tg}\angle CAB$$

給出弦 AB 的斜率，而 $f'(c)$ 給出过这曲綫的弧 AB 上一点 M 的切綫

的斜率。如此，拉格朗日公式相当于下面的論断：在这曲綫的弧上有这样一个点，使得过这点的切綫平行于弦。罗尔定理是这論断当弦平行于 OX 軸时，亦就是 $f(a)=f(b)$ 时的特殊情形。

附注 由拉格朗日公式直接可以推出函数的增减判别法。这是以前我們用圖来說明的。实际上，假設在某一个区間內，一阶导数是正的，并設 x 与 $x+h$ 是这区間內两个点。由拉格朗日公式：

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h) \quad (0<\theta<1)$$

看出，当 h 是正的时，因为右边的乘积中两个因子都是正的，左边的差就是一个正量。如此，假設在某一个区間內导数是正的，我們就得到：

$$f(x+h)-f(x)>0,$$

就是，在这区間上，这个函数增加，同理，由上面的公式可以直接推出减函数的判别法。

还要提出，如果在考虑的点，函数并不达到最大值或最小值，而只达到一个極大值或極小值，証明費尔馬定理时引用的理由仍然成立。由这个理由告訴我們，在这样的点，若一阶导数存在，它应当等于零。

64. 勾犀公式 假設函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都在区間 $[a, b]$ 上連續，在这区間內每一点都有导数，并且 $\varphi'(x)$ 在这区間內任何一点都不等于零。把拉格朗日公式应用于函数 $\varphi(x)$，得到：

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(c_1) \quad (a<c_1<b);$$

但是由所給条件，$\varphi'(c_1)\neq 0$，因此：

$$\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0。$$

作函数：

$$F(x)=f(x)+\lambda\varphi(x),$$

其中 λ 是一个常量；我們这样确定它，使得：

$$F(a)=F(b) \text{ 就是 } f(a)+\lambda\varphi(a)=f(b)+\lambda\varphi(b),$$

由此

$$\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}。$$

当这样选定 λ 后，对 $F(x)$ 应用罗尔定理，于是推知，有这样一个

值 $x=c$ 存在，使得

$$F'(c)=f'(c)+\lambda\varphi'(c)=0 \quad (a<c<b)。$$

这个方程給出：

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=-\lambda \quad (\varphi'(c)\neq 0),$$

由此，把上面所求的 λ 的值代入之后，得到：

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (a<c<b)$$

或

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'[a+\theta(b-a)]}{\varphi'[a+\theta(b-a)]} \quad (0<\theta<1), \tag{6}$$

或

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}。$$

这是勾犀公式。在这公式中，設 $\varphi(x)=x$，就有 $\varphi'(x)=1$，于是公式的形式为：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{1}$$

或

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),$$

就是說：我們得到，拉格朗日公式是勾犀公式的一个特殊情形。

65. 定未定式　若当 $x=a$ 时，两个函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都等于零，則当 $x=a$ 时，商 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 是这样的一个未定式 $\frac{0}{0}$。現在講定这样的未定式的方法。我們假設当 x 的値逼近于 a 时，函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 連續，而有一阶导数，并且当 x 的値逼近于 a（但不等于 a）时，导数 $\psi'(x)$ 不等于零。

先証明以下的定理：若上面的假設成立，并且当 x 趋向 a 时，比 $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ 趋向一个極限 b，則比 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 也趋向这个極限。

注意，

$$\psi(a)=\varphi(a)=0,$$

并应用勾犀公式[**64**]，得到：

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\quad(\xi \text{ 在 } a \text{ 与 } x \text{ 之間})。\tag{7}$$

由于所給的关于 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的假設，我們可以用勾犀公式。

若 x 趋向 a，則 ξ 也趋向 a，因为它在 a 与 x 之間。这时，由所給的条件，等式(7)的右边趋向 b，于是推知，这等式左边的比 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 也趋向这个極限。

由这里証的定理推出定 $\frac{0}{0}$ 型未定式的法則：当求商 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 的極限时，若是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，可以用导数的比替代函数的比，而求这个新比的極限。

这个法則是法国数学家，洛畢达首先給的，所以平常叫做洛畢达法則。

若导数的比也是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，則可以对它再用这个法則，并且可以类推。

应用这个法則作几个例题：

1. $$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{n(1+x)^{n-1}}{1}=n。$$

2. $$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6},$$

就是，差 $x-\sin x$ 与 x 比較是个三級无穷小。

3. $$\lim_{x\to0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=3。$$

由这个例的結果。引出一个实用上較方便的伸直圓弧的方法。

考慮一个圓周，半徑等于 1。取这圓周的一个直徑作 OX 軸，过这直徑一端的切綫作 OY 軸(圖 72)。

取某一个弧 OM，設 OY 軸上綫段 $\overline{ON}$ 之長等于弧 OM 之長，連直綫 NM，設 NM 交 OX 軸于点 P。

弧 OM 的長度記作 u (半徑取作 1)，直綫 NM 的方程就是：

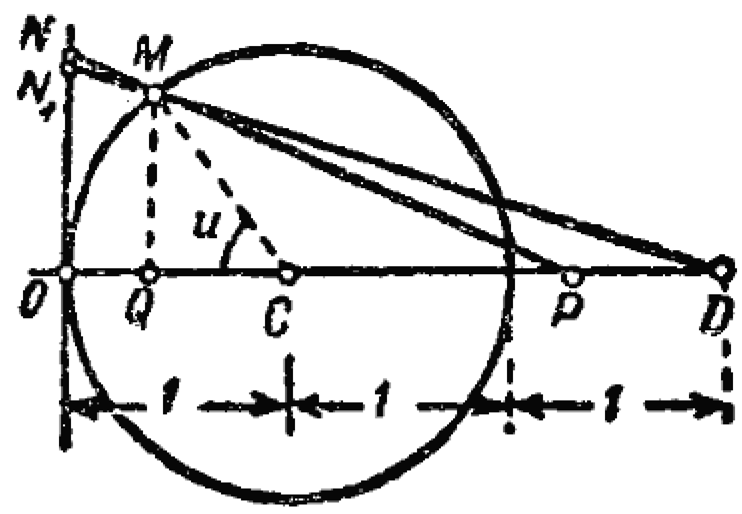


圖　72.

$$\frac{x}{\overline{OP}}+\frac{y}{u}=1。$$

为要計算 $\overline{OP}$ 的長度，注意直綫 NM 上点 M 的坐标

$$x=\overline{OQ}=1-\cos u,\ y=\overline{QM}=\sin u。$$

这个坐标应当滿足上面的方程：

$$\frac{1-\cos u}{\overline{OP}}+\frac{\sin u}{u}=1,$$

由此
$$\overline{OP}=\frac{u-u\cos u}{u-\sin u}。$$

例3的結果說明，当 $u\to 0$ 时，$\overline{OP}\to 3$，就是，設点 D 在 OX 軸上，距离坐标原点等于这个圓的半徑的三倍。則点 P 趋向点 D。由此得到一个近似的伸直圓弧的簡單方法。为要伸直一个弧 OM，只要先作 $\overline{OD}$ 等于圓半徑的三倍，再引直綫 DM。这直綫在 OY 軸上截下一个綫段 ON_1，这个綫段給出弧 OM 的近似長度。当弧不太大时，这个方法可以得到很好的結果，縱然弧是 $\frac{\pi}{2}$，差誤也不过在5%左右。

66. 未定式的各种类型　前一段中証明的定理，对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式也对。設

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty, \tag{8}$$

而

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=b。\tag{9}$$

并且当 x 的值逼近于 a 时，$\psi'(x)$ 不等于零。現在我們証明比 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 也趋向極限 b。

考慮自变量的两个逼近于 a 的值 x 与 x_0，其中 x 在 x_0 与 a 之間，由勾犀公式得到：

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\quad(\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }x_0\text{ 之間}),$$

但是从另一方面看：

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}。$$

注意，由（8）直接推出，当 x 逼近于 a 时，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都异于零。

比较这两个表达式，得到：

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

或

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\cdot\frac{1-\dfrac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}},\tag{10}$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之間，于是它在 a 与 x_0 之間。先取定一个与 a 足够近的値 x_0；无論在 x_0 与 a 之間怎样取 x，根据条件（9），等式(10)右边第一个因子与 b 之差可以任意小。如此，取定了值 x_0 之后，再讓 x 趋向 a，根据条件（8），等式(10)右边第二个因子趋向一，所以我們可以肯定，当 x 逼近于 a 时，等式 (10) 左边的比 $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 与 b 之差可以任意小，就是

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=b。$$

由这里証的定理，我們就可以应用洛畢达法則来定 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式了。

我們再指出几种未定式。考虑乘积 $\varphi(x)\psi(x)$，設

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty。$$

这是 $0\cdot\infty$ 型未定式。不难把它化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型：

$$\varphi(x)\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}=\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}。$$

最后考虑表达式 $\varphi(x)^{\psi(x)}$，設

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=1,\quad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty。$$

这是 1^∞ 型未定式。考虑所給表达式的对数：

$$\log[\varphi(x)^{\psi(x)}]=\psi(x)\log\varphi(x),$$

就化成 $0\cdot\infty$ 型未定式。定这种未定式，就要先求这表达式的对数的極限，由它的对数的極限就知道这表达式的極限。用同样方法可以定 ∞^0 与 0^0 型未定式。

現在考虑几个例題：

1.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty。$$

同样可以証明，若 n 是任何一个正值，当 $x\to+\infty$ 时，比 $\frac{e^x}{x^n}$ 趋向无穷大，就是，当 x 无限增加时，指数函数 e^x 比 x 的任何正冪都增加得快。

2.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0\quad(n>0),$$

就是，$\log x$ 比 x 的任何正冪都增加得慢。

3.
$$\lim_{x\to+0}x^n\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-n}{x^{n+1}}}=$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{x^n}{n}=0\quad(n>0)。$$

4. 求当 x 趋向 $+0$ 时，x^x 的極限。求出这个表达式的对数，得到一个 $0\cdot\infty$ 型未定式。根据例 3，这个未定式的極限是 0，于是推知

$$\lim_{x\to+0}x^x=1。$$

5. 求
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}。$$

这个比的分子与分母都趋向无穷大，由洛畢达法则，用导数的比替代函数的比，得到：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}。$$

但是，当 x 无限上升时，$1+\cos x$ 不趋向一个極限。因为 $\cos x$ 在 $(+1)$ 与 (-1) 之間摆动；不过很容易看出，所給的比趋向一个極限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1。$$

所以，在这情形下，这未定式还是可定的，但是洛畢达法則并不适用。这个結果并不違反我們所証的定理，因为在这定理中，只是肯定，若导数的比趋向一个極限，則函数的比也趋向同一个極限，但是并不可逆。

6. 最后我們提出 $(\infty\pm\infty)$ 型的未定式。这常常先化为 $\frac{0}{0}$ 型的未定式，再来計算，例如：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x}。$$

后一个表达式是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式，用上述方法，得到

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right)=1。$$

§6. 二元函数

67. 基本概念 到現在为止，我們只考慮过一元函数。現在我們考慮二元函数

$$u=f(x,\ y)。$$

为要确定这样函数的特殊值，应当給出自变量的值：$x=x_0$，$y=y_0$，每一对这样的 x 与 y 的值，对应于坐标平面上一个以 $(x_0,\ y_0)$ 为坐标的点 M_0，有时説到，当 $x=x_0$，$y=y_0$ 时，函数的值，也可以說是在平面上点 $M_0(x_0,\ y_0)$ 的函数值。函数可以确定在整个平面上，或是只确定在平面的一部分上，就是在某一区域上。若 $f(x,\ y)$ 是一个多項式，例如：

$$u=f(x,\ y)=x^2+xy+y^2-2x+3y+7,$$

则它是一个确定在整个平面上的函数。下面的式子

$$u=\sqrt{1-(x^2+y^2)},$$

表示一个确定在圆周 $x^2+y^2=1$ 以内的函数，这个圆以坐标原点为圆心，以1为半徑，并且在这圆周上，$u=0$。与区間相类似，平面上一个区域可以由不等式 $a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$ 确定。这是一个矩形，它的边平行于坐标軸，并且这矩形的周界也算在这区域上。不等式 $a<x<b$，$c<y<d$ 就只确定矩形的内点。若周界算作屬于区域，则这个区域叫做闭的。若周界算作不屬于区域，则这区域叫做开的[比較 4]。現在我們講二元函数的極限的定义[比較 32]。假設函数在点 $M_0(x_0, y_0)$ 以及与 M_0 足够近的点 $M(x, y)$ 是有定义的。

定义 若当点 $M(x, y)$ 以任何方式趋向 $M_0(x_0, y_0)$，但不与 M_0 重合时，变量 $f(x, y)$ 有同一的極限 A；则写成

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A,$$

或

$$\lim_{M\to M_0} f(x, y)=A。$$

这个定义相当于說：当任意給定一个正数 ε 时，有这样一个正数 η 存在，使得除去 $x=x_0$，$y=y_0$ 一对値外，当

$$|x-x_0|<\eta \text{ 而且 } |y-y_0|<\eta \text{ 时 } |f(x, y)-A|<\varepsilon。$$

这里 $x=x_0$，$y\neq y_0$ 或 $x\neq x_0$，$y=y_0$ 的値还是可以取的。若点 M_0 在确定 $f(x, y)$ 的区域的周界上，则点 M 应当只在确定这函数的区域内趋向 M_0。

很自然的可以給出連續函数的定义[比較 32]。

定义 若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0) \text{ 或 } \lim_{M\to M_0} f(x, y)=f(x_0, y_0),$$

则叫做函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 連續。

若一个函数在某个区域上任何一点都連續，就叫做这个函数在这

区域上連續。

例如：函数 $w=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在确定它的圓內連續。若是把这圓的边界亦即圓周算上，它仍然是連續的；在其上 $w=0$。

与在一个区間上一元連續函数的性質相类似 [35]，在一个閉区域上連續的函数具有下列两个性質：

1. 在这区域內或边界上，至少有这样一个点，使得这函数在这点达到最大(最小)值。就是这个函数值不小(大)于在区域內以及边界上其余点的函数值。

2. 它在这区域上(包括周界)一致連續，就是，当任意給定一个正数 ε 时，对于整个区域，有这样一个正数 η 存在，使得，

当 $|x_2-x_1|$ 与 $|y_2-y_1|<\eta$ 时，$|f(x_2, y_2)-f(x_1, y_1)|<\varepsilon$，
[(x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 是区域上的点]。

由函数連續性的定义可得出下面一个推論。若 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 連續，我們讓 $y=b$，則一元函数 $f(x, b)$ 当 $x=a$ 时連續。类似的，函数 $f(a, y)$ 当 $y=b$ 时連續。

68. 二元函数的偏导数与全微分 設在函数 $u=f(x, y)$ 中，变量 y 保持一个常值，只是 x 改变：u 可以看成一个 x 的函数，于是可以計算 u 的改变量与导数。当 y 保持一个常值，而 x 改变一个量 Δx 时，这函数 u 得到的改变量記作 $\Delta_x u$：

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x, y)-f(x, y)。$$

求極限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}$$

就得到导数。

在 y 保持常值的假定下，这样算出的导数，叫做函数 u 对 x 的偏导数，記作

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ 或 } f'_x(x, y) \text{ 或 } \frac{\partial u}{\partial x}。$$

注意，$\frac{\partial u}{\partial x}$不能解释作一个分式，它只是記偏导数的一个記号。若$f(x, y)$对$x$有偏导数，则当固定了$y$时，它是$x$的一个連續函数。

在x不变的假定下，同样确定改变量$\Delta_y u$，以及u对y的偏导数：

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \text{ 或 } f'_y(x, y) \text{ 或 } \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}。$$

例如：若

$$u = x^2 + y^2 \text{ 则 } \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y。$$

考虑克拉波朗方程

$$pv = RT。$$

借助于这个方程量p，v与T中任何一个可由另外两个确定，并且这两个变量应当算作自变量。我們得到下表：

自变量	T, p	T, v	p, v
函　数	$v = \frac{RT}{p}$	$p = \frac{RT}{v}$	$T = \frac{pv}{R}$
偏导数	$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}$; $\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}$	$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}$; $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$	$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}$

由此得到下面这关系式：

$$\frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial v} = -1。$$

若是我們把这等式左边相消，得到$(+1)$，而不是(-1)。但是，在这等式中的几个偏导数是在不同的假定下計算的：$\frac{\partial v}{\partial T}$是在$p$是常量的假定下，$\frac{\partial T}{\partial p}$是在当$v$是常量时，$\frac{\partial p}{\partial v}$是在当$T$是常量时，所以上面所說的相消是不允許的。

当x与y一齐改变时，函数得到的全部改变量記作Δu：

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)。$$

加减一项$f(x, y+\Delta y)$可以写成：

$$\Delta u=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]+ \\ +[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]。$$

第一个方括号内，是当变量 y 保持一个值 $y+\Delta y$ 不变时，函数 u 的改变量，第二个方括号内，是当 x 的值不变时，函数的改变量。設在点 (x, y) 的某个邻域内，$f(x, y)$ 有偏导数，因为在每个情形下都只有一个自变量在变，应用拉格朗日公式得到：

$$\Delta u=f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y,$$

其中 θ 与 θ_1，都在 0 与 1 之間。假設偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 都連續，我們可以肯定；当 Δx 与 Δy 趋向零时，Δx 的系数趋向 $f'_x(x, y)$，Δy 的系数趋向 $f'_y(x, y)$，所以：

$$\Delta u=[f'_x(x, y)+\varepsilon]\Delta x+[f'_y(x, y)+\varepsilon_1]\Delta y,$$

或

$$\Delta u=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y+\varepsilon\Delta x+\varepsilon_1\Delta y, \tag{1}$$

其中 ε 与 ε_1，以及 Δx 与 Δy 一齐都是无穷小量，这个公式与在一元函数时我們証明的公式[**50**]

$$\Delta y=y'\Delta x+\varepsilon\Delta x$$

类似。乘积 $\varepsilon\Delta x$，$\varepsilon_1\Delta y$ 与 Δx，Δy 比較起来，都是較高級的无穷小。

我們要注意，在上面的討論中，是根据在包含点 (x, y) 的某个区域内偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 不仅存在而且連續的假定。

等式（1）右边前两項的和叫做函数 u 的全微分 du。改变量 Δx，Δy 是自由改变的，像在一元的情形一样，它們与微分 dx，dy 全同，于是

$$du=f'_x(x, y)dx+f'_y(x, y)dy,$$

或

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy。 \tag{2}$$

由于乘积 $\varepsilon\Delta x$ 与 $\varepsilon_1\Delta y$ 的上述性質，我們可以說，当 Δx 与 Δy 的值很小时，全微分 du 給出函数的全改变量 Δu 的一个近似量。从另一

方面看，显然，乘积 $\frac{\partial u}{\partial x}dx$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}dy$ 各給出改变量 $\Delta_x u$ 与 $\Delta_y u$ 的近似量，如此，当自变量的改变量很小时，函数的部分改变量的和是全改变量的一个近似量

$$\Delta u \sim du \sim \Delta_x u + \Delta_y u。$$

等式(2)表达多元函数的一个重要的性質，可以叫做“小作用量的分离性”，它的实質是：用每个小作用量在个别情形所产生的效果之和来代替那些小作用量的联合效果，可达到相当的精确性。

69. 复合函数与隐函数的导数　現在設函数 $u=f(x, y)$ 通过 x 与 y 依賴于 t。就是，設 x 与 y 不是自变量，而是自变量 t 的函数，我們确定 u 对 t 的导数 $\frac{du}{dt}$。

若自变量 t 得到一个改变量 Δt，則函数 x 与 y 有相应的改变量 Δx 与 Δy，而 u 得到一个改变量 Δu：

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)。$$

在[68]中，我們看到，这个改变量可以写成：

$$\Delta u=f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y。$$

用 Δt 除这等式的两边：

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}。$$

这里我們假定 x 与 y 对 t 有导数，于是它們是 t 的連續函数。所以当 Δt 趋向零时，Δx 与 Δy 也趋向零，根据假定 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 是連續的，取这等式的極限，得到：

$$\frac{du}{dt}=f'_x(x, y)\frac{dx}{dt}+f'_y(x, y)\frac{dy}{dt}。\qquad (3)$$

这等式表示，在多元函数的情形下，复合函数微分法則。

特別是，假定变量 x 起自变量 t 的作用，亦就是，函数 $u=f(x, y)$ 一方面既直接依賴于 x，一方面又通过中間变量 y 而依賴于 x。注意

$\frac{dx}{dx}=1$，等式（3）就成为：

$$\frac{du}{dx}=f'_x(x, y)+f'_y(x, y)\frac{dy}{dx}。 \quad (4)$$

导数 $\frac{du}{dx}$ 叫做 u 对 x 的全导数，它与偏导数 $f'_x(x, y)$ 不同。

应用上述复合函数微分法则来求隐函数的导数。假定方程

$$F(x, y)=0 \quad (5)$$

确定 y 是 x 的一个具有导数 $y'=\varphi'(x)$ 的隐函数。把 $y=\varphi(x)$ 代入方程（5）中，应当得到一个恒等式 $0=0$，因为 $y=\varphi(x)$ 是方程（5）的一个解。如此我們可以把 0 看作是 x 的一个复合函数，它一方面直接依賴于 x，一方面要通过中間变量 $y=\varphi(x)$。

这个常量对 x 的导数应当等于零，应用法則（4），得到：

$$F'_x(x, y)+F'_y(x, y)y'=0,$$

由此

$$y'=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}。$$

如此得到的 y' 的表达式中有 x 也有 y，若是須要只通过自变量 x 的 y' 的表达式，則把方程（5）中解出的 y 代入就可以了。

§7. 导数概念的几何应用

70. 弧的微分 在积分学中，将說明弧長的求法，引出弧長的微分表达式，以及說明当弧長趋向于一点时，弦長与它所張的弦長之比趋向于一。

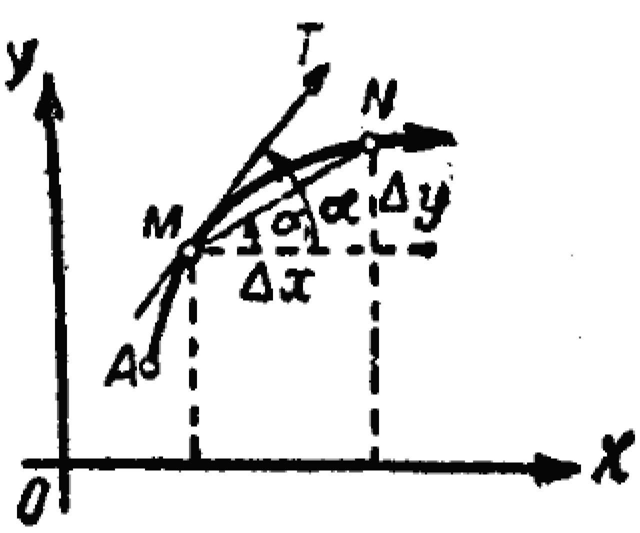


圖 73.

設某曲綫 $y=f(x)$ 是給定的，在它上面計算由定点 A 到确定方向的弧長（圖73）。設 s 是点 A 到变点 M 的弧 AM 的長度。量 s 像縱坐标 y 一样，也是点 M 的横坐标 x 的函数。如果方向 AM 与曲綫所

取的方向一致，则 $s>0$，在相反的場合 $s<0$。設 $M(x, y)$ 与 $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 是曲綫上的点且 Δs 是弧 AN 与 AM 的長度之差，亦就是当 M 变到 N 时弧長的改变量。弧 MN 取正号的長度是 Δs 的絕对值。由直角三角形有：

$$(\overline{MN})^2=\Delta x^2+\Delta y^2,$$

由此

$$\frac{(\overline{MN})^2}{\Delta x^2}=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

或

$$\left(\frac{\overline{MN}}{\Delta s}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2。$$

取極限，并注意，由上述 $\left(\frac{\overline{MN}}{\Delta s}\right)^2\to 1$，得到

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

或

$$\frac{ds}{dx}=\pm\sqrt{1+y'^2}。\tag{1}$$

如果当 x 增加时 s 增加，我們应取 $(+)$ 号，如果当 x 增加时 s 减小則应取 $(-)$ 号。为确定起見，我們認为有第一种情形。由公式(1)推出

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

或

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}。\tag{2}$$

当确定点 M 在曲綫上的位置时，弧 AM 的長度是自然参数。可以取量 s 作为自变量，于是点 M 的坐标 (x, y) 将是 s 的函数：

$$x=\varphi(s);\quad y=\psi(s)。$$

在[74]中，我們再詳細地說“曲綫的参变式”。現在来闡明 x 与 y 对 s 的导数的几何意义。

假定，点 N 的位置，使得弧 MN 的方向与曲綫所取的方向一致，亦卽 $\Delta s>0$。当点 N 趋向 M 时，割綫 $\overline{MN}$ 的方向的極限給出曲綫在点 M 的切綫的一个确定方向。切綫的这个方向称为切綫的正向。它

与曲綫所取的方向有关。

設 α_1 是方向 $\overline{MN}$ 与 OX 軸的正向所成的角度。横坐标 x 是綫段 $\overline{MN}$ 在 OX 軸上的投影，因此：

$$\Delta x=\overline{MN}\cdot\cos\alpha_1$$
$$(\overline{MN}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})\ ,$$

并且在等式中把 $\overline{MN}$ 算作正的，用弧 MN 的長度（等于 Δs）去除这等式的两端得：

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta s}\cos\alpha_1。$$

由条件 $\Delta s>0$，因此当 N 趋向 M 时，比 $\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta s}$ 趋向 $(+1)$，而角度 α_1 趋向由切綫 $\overline{MT}$ 的正向与 OX 軸的正向作成的角度 α。在上面的不等式中取極限：

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds} \tag{3}$$

同样地，作 $\overline{MN}$ 在 OY 軸上的投影，得到：

$$\sin\alpha=\frac{dy}{ds} \tag{4}$$

71. 凸性，凹性与曲率 圖 74 与 75 各表示曲綫的凸与凹的情形。

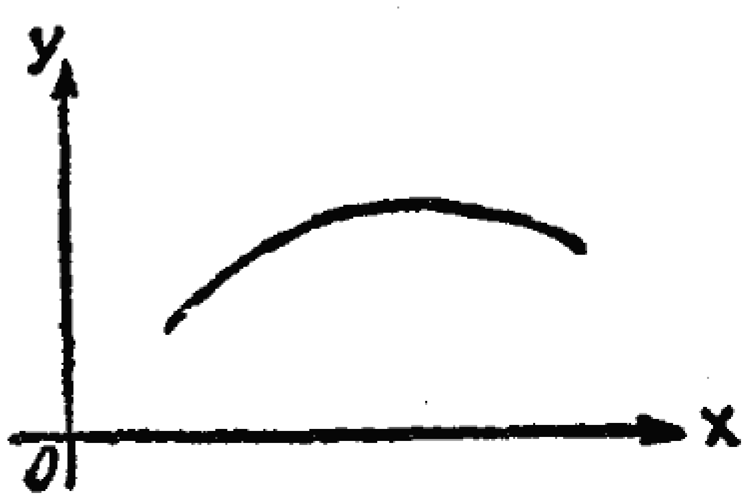


圖 74.



圖 75.

有时一个曲綫 $y=f(x)$ 也有凸的部分，也有凹的部分（圖 76）。曲綫凸的部分与凹的部分的分界点叫做扭轉点。

若在 x 增加的方向沿曲綫动。切綫与 OX 軸的正向作成的角度 α

就在变，由圖 76 看出，在凸的部分上，这角度減小；在凹的部分上，它增加。于是推知 $\operatorname{tg}\alpha$，就是导数 $f'(x)$，也这样变，因为角度 α 增加（減小）时，$\operatorname{tg}\alpha$ 也增加（減小）。但是，$f'(x)$ 的減小区間，就是它的导数是負的区間，也就是 $f''(x)<0$ 的区間，同理，$f'(x)$ 的增加区間就是 $f''(x)>0$ 的区間。如此，我們得到一个定理：

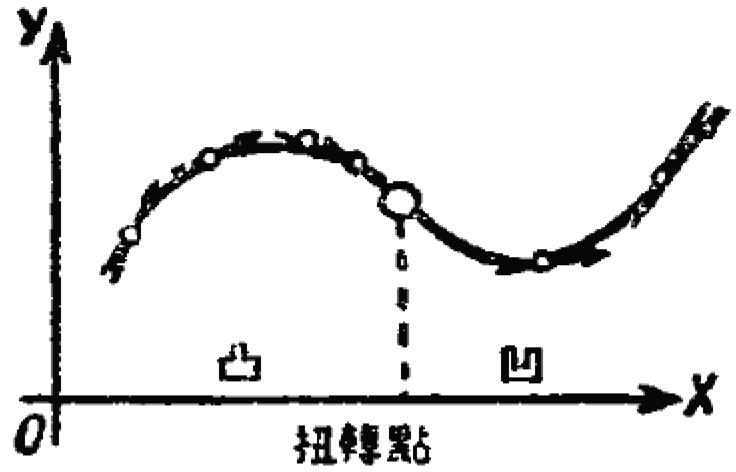


圖 76.

在 $f''(x)<0$ 的部分，曲綫成凸状，在 $f''(x)>0$ 的部分曲綫成凹状。經过扭轉点时，$f''(x)$ 变号。

由这定理，用与以前类似的討論方法[58]，得到求一个曲綫的扭轉点的法則：为要求一个曲綫的扭轉点，先要求出使 $f''(x)$ 等于零或使它不存在的点，再討論当 x 經过这些値时，$f''(x)$ 的符号改变情形，应用下表：

	扭	轉		点	非	扭	轉	点
$f''(x)$	+	−	−	+	−	−	+	+
	凹	凸	凸	凹	凸		凹	

若是注意去看，沿曲綫动时，切綫与 OX 軸作成的角度 α 的改变情形，我們就很自然地認識到这曲綫的弯曲程度。两个有等長 Δs 的弧，切綫轉得較大的，就是改变量 $\Delta\alpha$ 較大的，弯得比較深。这样考虑就引起 Δs 的平均曲率以及在一点的曲率两个概念：一个弧两端的切綫的夹角 $\Delta\alpha$ 与这弧長 Δs 之比叫做这段弧的平均曲率。当 Δs 趋向零时，这个比的極限叫做在所給点的曲率（圖 77）。

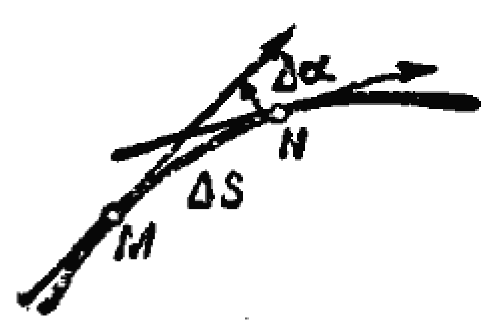


圖 77.

如此，我們得到曲率 C 的表达式

$$C=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|。$$

但是 $\operatorname{tg}\alpha$ 是一阶导数 y'，就是

$$\alpha=\operatorname{arc}\operatorname{tg}y',$$

由此，求出复合函数 $\operatorname{arc}\operatorname{tg}y'$ 对 x 的微分：

$$d\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}dx。$$

我們知道：

$$ds=\pm\sqrt{1+y'^2}\,dx。$$

用 ds 除 $d\alpha$，得到曲率的表达式

$$C=\pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}。\qquad (5)$$

为使 C 得到正値，在凸的部分取（－）号，在凹的部分取（＋）号。

在 y'' 等于零的点，曲率也等于零，在这种点附近曲綫与直綫相近。例如，在一个扭轉点附近就是这样。

設曲綫上点的坐标由弧長 s 来表达，在这情形下我們講过：

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\ \sin\alpha=\frac{dy}{ds}。$$

角度 α 也是 s 的一个函数，求上面的等式对 s 的导数，得到：

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2},\ \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d^2y}{ds^2}。$$

把这两个等式平方再相加，就得到

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 \text{ 或 } C^2=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2。$$

由此

$$C=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}。$$

量 $\frac{1}{C}$ 叫做曲率半徑，根据（5），我們得到曲率半徑 R 的表达式：

$$R=\left|\frac{ds}{d\alpha}\right|=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}。$$

或

$$R=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}},\qquad (6)$$

并且，平方根取正号。

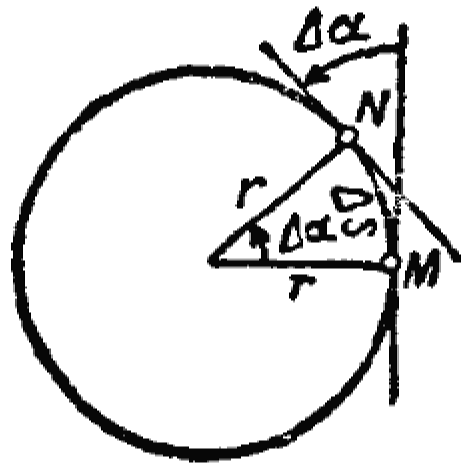


圖 78.

在直綫的情形，y 是 x 的一次多項式，所以 y'' 恒等于零，就是，沿整个直綫，曲率等于零；而曲率半徑成为无穷大。

在半徑为 r 的圓周的情形，則显然(圖 78)：

$$\Delta s=r\Delta\alpha,\ R=\lim\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}=r,$$

就是，沿整个圓周，曲率半徑是一个常量。以后我們会看到，只有圓周才有这个性質。

注意，曲率半徑的改变并不完全像切綫的改变那样明显。考慮由綫段 AB 与圓周的弧 BC 所組成的曲綫，AB 恰好是这圓周过点 B 的切綫(圖 79)。在 AB 这一部分上，曲率半徑成为无穷大；在 BC 这一部分上，它等于这圓周的半徑 r；如此，在点 B 它不連續，虽然切綫的正向的改变是連續的。这个情形可以解釋一个車在拐弯时的冲动。設一个車以常速率 v 运动，由力学知道，沿軌道的法綫方向的力等于 $m\frac{v^2}{R}$，其中 m 是运动物体的質量，R 是軌道的曲率半徑。由此看出，在曲率半徑不連續的点，这个力也不連續，于是引起一个冲动。

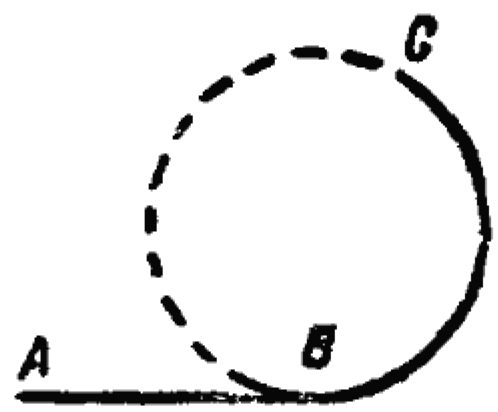


圖 79.

72. 漸近綫 現在我們来研究曲綫的无穷支綫，就是在它上面坐标 x 与 y 中有一个或是两个可无限增加的。双曲綫与拋物綫都是有无穷支綫的曲綫的例子。

若有一条直綫适合以下条件，当曲綫上的点沿一个无穷支綫无限远移时，这点与这直綫的距离趋向零，則这条直綫叫做这曲綫的漸近綫。

先講曲綫的平行于 OY 軸的漸近綫。这样的漸近綫的方程应当有

下面的形式：

$$x=c,$$

其中 c 是一个常量，在这情形下，当沿对应的无穷支綫动时，x 应当趋向 c，而 y 趋向无穷大(圖 80)。如此，我們得到下面的法則：

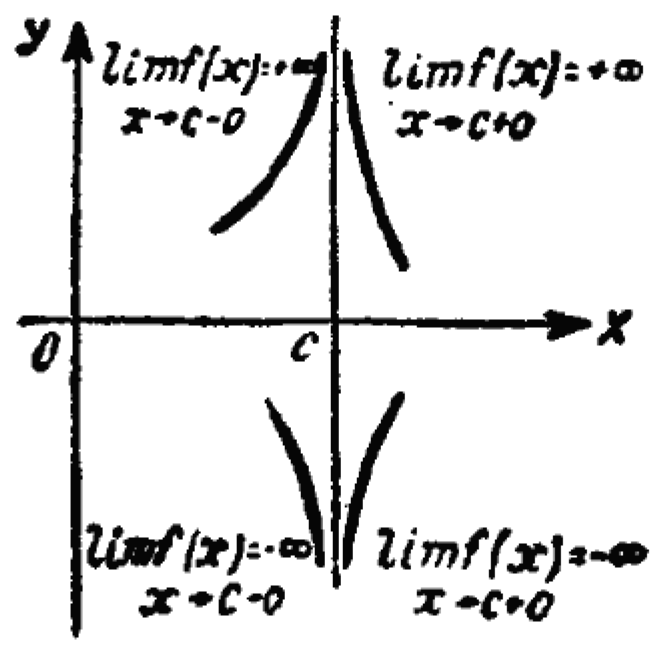


圖 80.

曲綫

$$y=f(x)$$

所有的平行于 OY 軸的漸近綫可以这样得到，就是求这样的值 $x=c$，使得当 x 趋向 c 时，$f(x)$ 趋向无穷大。

为要討論曲綫与漸近綫的相关位置，須要确定当 x 自左与自右趋向 c 时，$f(x)$ 的符号。

現在講求不平行于 OY 軸的漸近綫。这时，漸近綫的方程应当有下面的形式：

$$\eta=a\xi+b,$$

其中，为与曲綫的流动坐标 x 与 y 区别起見，用 ξ 与 η 作漸近綫的流动坐标。

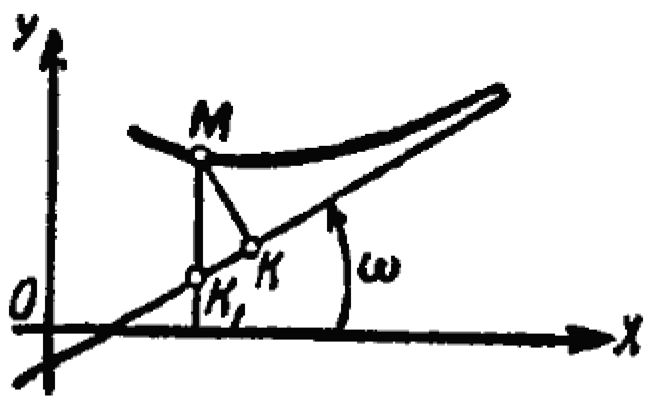


圖 81.

設 ω 是这漸近綫与正向 OX 軸作成的角度。$\overline{MK}$ 是曲綫上的点到这漸近綫的距离，$\overline{MK_1}$ 是当横坐标 x 相同时，曲綫上点的縱坐标与漸近綫上点的縱坐标之差(圖 81)。由直角三角形得到：

$$|\overline{MK_1}|=\frac{\overline{MK}}{|\cos\omega|}\quad\left(\omega\neq\frac{\pi}{2}\right),$$

于是条件：

$$\lim\overline{MK}=0$$

可用以下的条件代替

$$\lim\overline{MK_1}=0。\tag{7}$$

若漸近綫不平行于 OY 軸，当沿对应的无穷支綫远移时，x 趋向无穷大。注意，$\overline{MK_1}$ 是当横坐标相同时，曲綫与漸近綫上的点的縱坐标之差，条件（7）就可以写成：

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0, \tag{8}$$

我們应当由此得到 a 与 b 的值。

条件（8）可以写成：

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0,$$

但是第一个因子趋向无穷大，所以方括号内的表达式应当趋向零：

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-a=0,$$

就是

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}。$$

求出 a 以后，再由条件（8）确定 b：

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]。$$

所以，曲綫

$$y=f(x)$$

有不平行于 OY 軸的漸近綫存在的必要且充分条件是：当沿无穷支綫远移时，x 趋向无穷大，且下面两个極限存在：

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax],$$

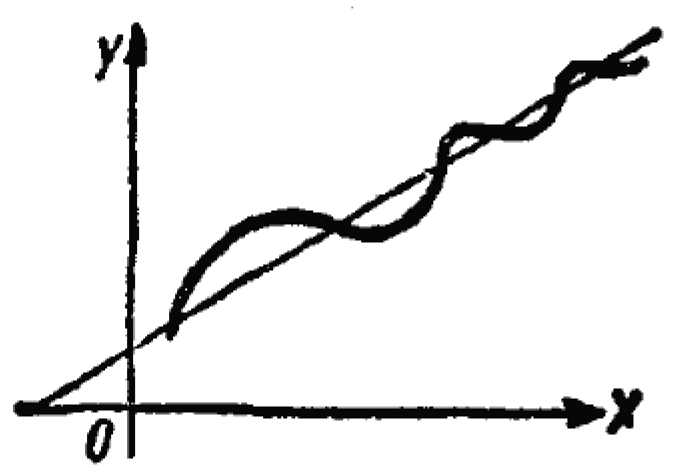


圖 82.

这时，漸近綫的方程就是：

$$\eta=a\xi+b。$$

为要討論曲綫与漸近綫的相关位置，須要分别考慮 x 趋向 $(+\infty)$ 与 $(-\infty)$ 时，差

$$f(x)-(ax+b)$$

的符号。

若它是（+），则曲綫在漸近綫之上；若是（−），则在漸近綫之下。若当 x 无限增加时，这个差不保持一个不变的符号，则曲綫在漸近綫上下摆动(圖 82)。

73. 作圖 現在講作曲綫

$$y=f(x)$$

时，应当討論的步驟。这里比在[**59**]中所作的完全些。

作圖时要討論下列几点：

（a）确定自变量 x 的变化区間。

（b）确定曲綫与坐标軸的交点。

（c）确定曲綫的頂点。

（d）确定曲綫的凸部，凹部与扭轉点。

（e）确定曲綫的漸近綫。

（f）闡明曲綫关于坐标軸的对称性(如果有的話)。

为使所作的曲綫比較正确，还要取出曲綫上一列的点。这些点的坐标由曲綫的方程計算出来。

1. 画曲綫：

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}。$$

（a）x 可以在区間$(-\infty, +\infty)$上改变。

（b）讓 $x=0$，得到 $y=-\frac{9}{4}$；讓 $y=0$，得到 $x=3$；就是，曲綫与坐标軸在点$\left(0, -\frac{9}{4}\right)$与$(3, 0)$相交。

（c）求出一阶与二阶导数：

$$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}。$$

应用以前法則，得到頂点$(3, 0)$——極小值，$(-1, -2)$——極大值。

（d）由二阶导数的表达式看出，当 $x>1$ 时，它是正的；当 $x<1$ 时，它是負的；就是，在区間$(1, \infty)$內，曲綫是凹的；在区間$(-\infty, 1)$內，是凸的。因为 $f''(x)$ 只当 $x=1$ 时变号，而 x 的这个值对应于一条平行于 OY 軸的漸近綫，所以沒有扭轉

点。

(e)当 $x=1$ 时，y 成为无穷大，于是这曲綫有一条漸近綫

$$x=1。$$

再求不平行于 OY 軸的漸近綫：

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}{4\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{4},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{x}{4}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{9}{x}}{4\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-\frac{5}{4},$$

就是

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$$

是一条不平行于 OY 軸的漸近綫。請讀者自己討論曲綫与漸近綫的相关位置。

(f)不对称。

由得到的这些性質作出曲綫(圖 83)。

2．討論曲綫：

$$y=c(a^2-x^2)(5a^2-x^2)\quad(c<0)\quad y_1=c(a^2-x^2)^2,$$

这曲綫給出在自身重量的影响下弯曲的重梁的形状。并且第一个曲綫是梁的两端可以自由改变的情形，第二个曲綫是两端釘死的情形。梁两端的距离是 $2a$，这距离的中点是坐标原点，过这中点的鉛直綫是 OY 軸，方向向上。

(a)显然，我們只注意 x 在区間 $(-a,\ +a)$ 上的变化。

(b)讓 $x=0$，得到 $y=5ca^4$，$y_1=ca^4$，就是在第一种情形下，梁的中点下降距离是第二种情形的五倍。当 $x=\pm a$ 时，$y=y_1=0$，这对应于梁的两端。

(c)求出导数：

$$y'=-4cx(3a^2-x^2),\quad y''=-12c(a^2-x^2),$$

$$y_1'=-4cx(a^2-x^2),\quad y_1''=-4c(a^2-3x^2)。$$

在两种情形下，当 $x=0$ 时，都有極小值，这就是上面談到的梁弛垂的中点。

(d)在第一种情形下，在区間 $(-a,\ +a)$ 内，$y''>0$，就是整个梁是向上凹的。在第二种情形下，当 $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ 时，y_1'' 等于零，并且这时变号，就是对应点是这梁的扭轉点。

(e)沒有无穷支綫。

(f)在两种情形下，用$(-x)$替代x时，方程都不变；就是两条曲綫都是关于OY軸对称的。

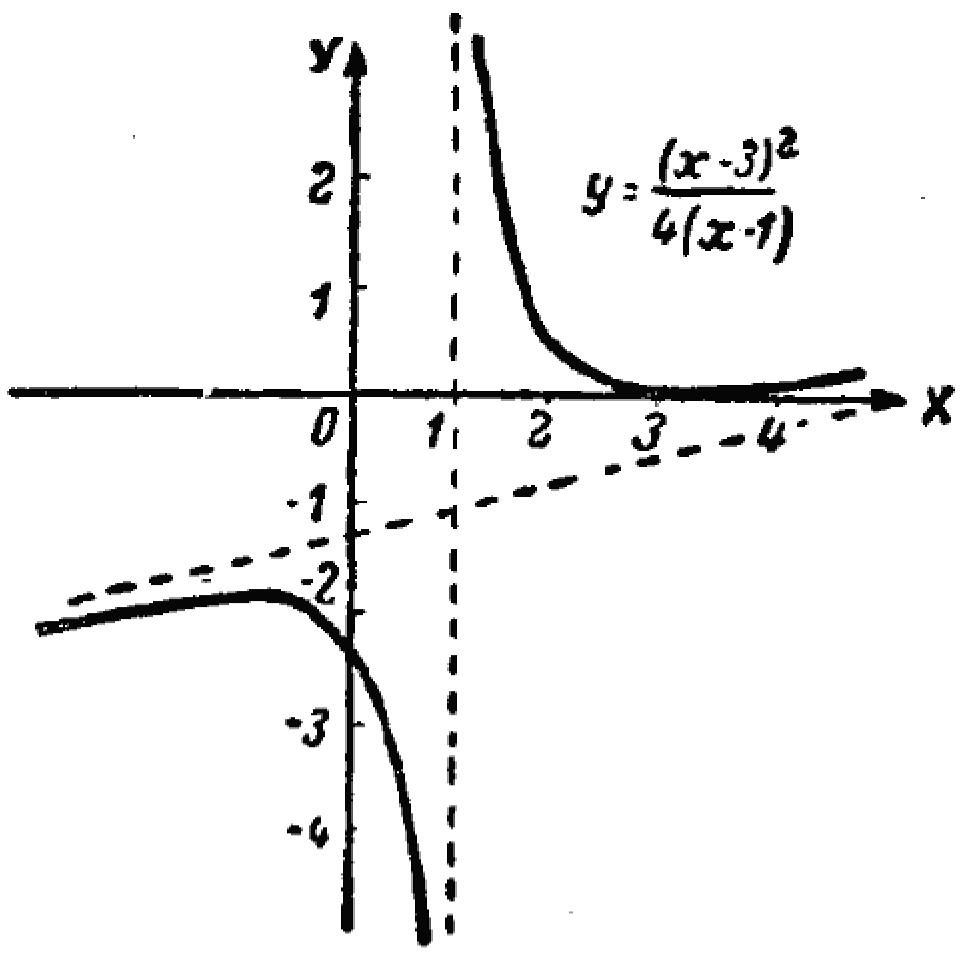


圖 83.

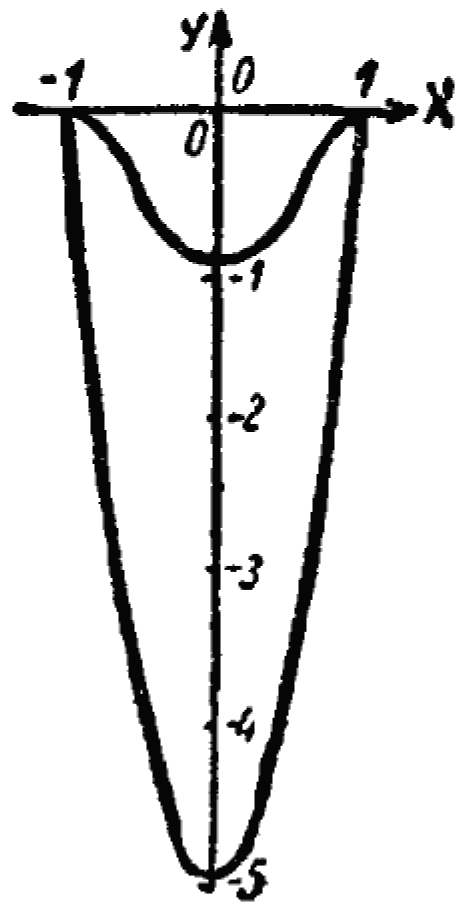


圖 84.

圖84表示这两条曲綫。为簡單起見，我們取$a=1$，$c=-1$。实际上，梁两端的距离比弛垂度大得多，就是a比c大得多；于是，从外表看曲綫就有些不同了(怎样不同？)。

請讀者求曲綫

$$y=e^{-x^2}$$

的扭轉点，并与表示它的圖形的圖60相比較。

74. 曲綫的参变式 按几何圖形的性質，求它的方程时常很不方便，甚至有时就不可能用坐标x与y的关系式来表达这性質。在这种情形下，有时可以引用一个輔助变量，再分别由这个圖形上的点的横坐标x与縱坐标y对于这第三个变量的关系式来表达。

用这方法得到两个方程：

$$\left.\begin{array}{l}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)。\end{array}\right\}\qquad(9)$$

这两个方程联合起来，也可以定出曲綫，并且可以討論它的性質；因为

每一个 t 的值，确定曲綫上一个对应点的坐标。

这种处理曲綫的方法叫做参变法，輔助变量 t 叫做参变量。为要得到曲綫的普通的方程，就是找 x 与 y 的关系式，須要由这两个方程(9)中消去参变量 t，这可以由其中一个方程解出 t，再把得到的結果代入到另一个方程中就成了。

曲綫的参变式特别是在力学中常遇到；当研究一个点运动的軌道时，它的位置依賴于时間 t，所以坐标是 t 的函数。确定这两个函数，就得到这軌道的参变方程。

例如，圓心在点 (x_0, y_0)，半徑为 r 的圓周的参变方程是：

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+r\cos t,\\ y&=y_0+r\sin t。\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

写成

$$x-x_0=r\cos t,\quad y-y_0=r\sin t。$$

平方再相加，就消去参变量 t，得到圓周的普通的方程：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2。$$

同理

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t,\\ y&=b\sin t\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

是橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的参变方程。

設 y 是 x 的一个函数，由参变式(9)确定。参变量的改变量 Δt 对应于改变量 Δx 与 Δy，用 Δt 除分式 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的分子与分母，就得到 y 对 x 的导数的表达式：

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

或

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}。\tag{12}$$

求出 y 对 x 的二阶导数：

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}。$$

应用求商式的微分法则，得到[**50**]：

$$y''=\frac{d^2y\,dx-d^2x\,dy}{(dx)^3}。\tag{13}$$

但是，根据(9)

$$dx=\varphi'(t)dt,\quad d^2x=\varphi''(t)dt^2,$$

$$dy=\psi'(t)dt,\quad d^2y=\psi''(t)dt^2。$$

把这代入(13)中，消去 $(dt)^3$，最后得到：

$$y''=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}。\tag{14}$$

注意由公式(13)所給的 y'' 的表达式，与[**55**]中公式(3)所給的同一个导数的表达式(当 $n=2$ 时)

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}\tag{15}$$

不同，因为(15)是在 x 是自变量的假定下引出的，而在参变式(9)中，自变量是 t。若 x 是自变量，则 dx 算作一个常量[**50**]，就是它不依賴于 x，于是 $d^2x=d(dx)=0$，因为常量的微分是零。这时公式(13)化为公式(15)。

如果能确定 y' 与 y''，我們也同样可以討論曲綫的切綫方向，凸部，凹部等等問題。

例 已知方程

$$x^3+y^3-3axy=0\quad(a>0)\tag{16}$$

作它的曲綫，这个曲綫叫做"笛卡儿叶形綫"。引用参变量 t，設

$$y=tx,\tag{17}$$

考虑具有变动的斜率 t 的直綫(17)与曲綫(16)的交点。把方程(17)中 y 的表达式代入方程(16)，消去 x^2，得到:

$$x=\frac{3at}{1+t^3},$$

再由方程(17):

$$y=\frac{3at^2}{1+t^3}。$$

这两个方程是笛卡儿叶形綫的参变方程。求出 x 与 y 对 t 的导数:

$$\left.\begin{aligned} x'_t&=3a\frac{(1+t^3)-3t^2\cdot t}{(1+t^3)^2}=\frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2},\\ y'_t&=3a\frac{2t(1+t^3)-3t^2\cdot t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}。\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

为要討論当 t 在区間 $(-\infty,+\infty)$ 上改变时，x 与 y 的改变情形；把这区間分作几部分，使得在每一个部分区間內，导数 x'_t 与 y'_t 都不变号并且不成为无穷大。为此我們先求出些个值:

$$t=-1,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\ 与\ \sqrt[3]{2},$$

在这些个值，导数成为零或是无穷大。由公式(18)确定在每一个区間內 x'_t 与 y'_t 的符号，并算出在这些区間端点，x 与 y 的值，如此，我們得到下面的表。

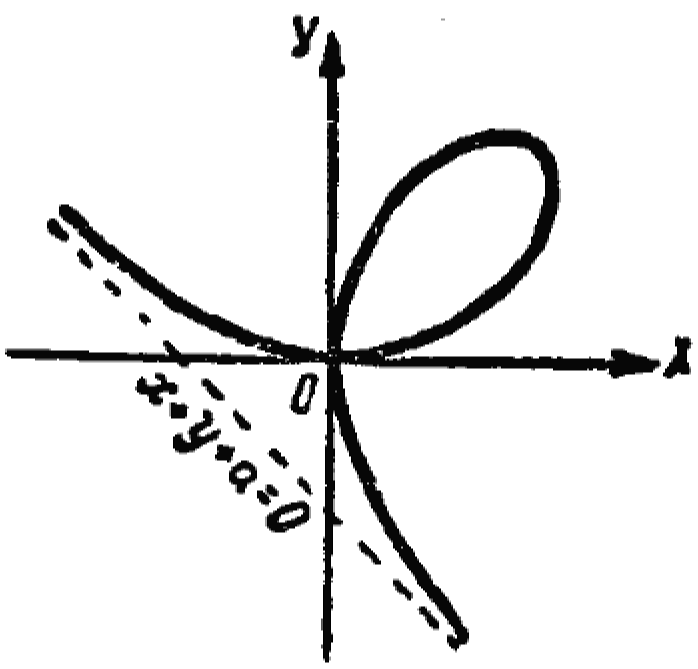


圖 85.

根据这个表，我們得到曲綫的圖形，如圖 85 所示。

t 的区間	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 0 增加到 $+\infty$	由 0 减小到 $-\infty$
$(-1,0)$	+	−	由 $-\infty$ 增加到 0	由 $+\infty$ 减小到 0
$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	+	+	由 0 增加到 $\sqrt[3]{4}a$	由 0 增加到 $\sqrt[3]{2}a$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\sqrt[3]{2}\right)$	−	+	由 $\sqrt[3]{4}a$ 减小到 $\sqrt[3]{2}a$	由 $\sqrt[3]{2}a$ 增加到 $\sqrt[3]{4}a$
$(\sqrt[3]{2},+\infty)$	−	−	由 $\sqrt[3]{2}a$ 减小到 0	由 $\sqrt[3]{4}a$ 减小到 0

为要計算切綫的斜率，有公式：

$$y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}。\tag{19}$$

注意，当 $t=0$ 与 $t=\infty$ 时，x 与 y 都成为零，由圖上看出，曲綫自交于坐标原点。由公式(19)：

当 $t=0$ 时，$y'_x=0$，

当 $t=\infty$ 时，$y'_x=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t\left(\frac{2}{t^3}-1\right)}{2\left(\frac{1}{2t^3}-1\right)}=\infty$，

就是，这曲綫的两支交于原点，一支与 OX 軸相切，一支与 OY 軸相切。

当 t 趋向 (-1) 时，x 与 y 都趋向无穷大，于是曲綫有无穷支綫，現在来确定它的漸近綫：

$$漸近綫的斜率=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{t\to-1}(y+x)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2+3at}{1+t^3}=\lim_{t\to-1}\frac{6at+3a}{3t^2}=-a,$$

就是，漸近綫的方程是：

$$y=-x-a \text{ 或 } x+y+a=0。$$

75. **范·德·瓦尔方程** 若是算作气体准确地适合波义耳—馬瑞特与盖魯撒克定律，则得到压力 p，容积 v 与絕对溫度 T 的关系式：

$$pv=RT,$$

其中 R 是一个常量，若是考慮一“克分子量”的气体，就是所考慮气体重量的克数，等于它的分子量时，则对于任何气体，这个常量是一样的。

但实际上，一般的气体并不严格地遵守上述关系，范·德·瓦尔給了另一个公式，表达的比較准确些。这个公式是：

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT,$$

其中 a 与 b 是两个正的常量，对于不同的气体，这两个常量也不同。

由这方程解 p，得到：

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}。\tag{20}$$

如果把 T 算作常量，研究 p 与 v 的关系，亦就是考慮气体的状态为等溫变化的情形。求 p 对 v 的一阶导数：

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}=\frac{1}{(v-b)^2}\left[\frac{2a(v-b)^2}{v^3}-RT\right]。\tag{21}$$

我們只考虑 $v>b$ 的值。至于这个条件以及将要得到的曲綫的物理意义，我們介紹讀者到物理教程中去找。

讓这一阶导数等于零，得到方程：

$$\frac{2a(v-b)^2}{v^3}-RT=0。\tag{22}$$

为要討論当 v 由 b 变到 $+\infty$ 时，这个方程左边的改变情形，先确定它对 v 的导数；根据所給条件，RT 是一个常量，于是

$$\left[\frac{2a(v-b)^2}{v^3}\right]'=2a\frac{2(v-b)v^3-3v^2(v-b)^2}{v^6}=-\frac{2a(v-b)(v-3b)}{v^4},$$

由此看出，当 $b<v<3b$ 时，这个导数是正的；当 $v>3b$ 时，它是負的；就是方程(22)的左边，在区間$[b, 3b]$上增加，以后 v 再增加时，它下降；所以当 $v=3b$ 时，它达到一个極大值，等于

$$\frac{8a}{27b}-RT。$$

直接代入，不难算出，当 $v=b$ 以及 $v=+\infty$ 时，方程(22)的左边成为$(-RT)$，因而有$(-)$号。若求出的極大値也是負的，就是，若

$$RT>\frac{8a}{27b}$$

則方程(22)的左边总是負的，于是由表达式(21)，导数$\frac{dp}{dv}$ 总是負的，就是 v 增加时 p 减小。

反之，若

$$RT<\frac{8a}{27b},$$

則当 $v=3b$ 时，方程(22)的左边达到一个正的極大値。于是方程(22)有一个根 v_1 在区間$(b, 3b)$内，还有一个根 v_2 在区間$(3b, +\infty)$內。当 v 的值經过 v_1 时，方程(22)的左边由$(-)$号变到$(+)$号；于是推知，$\frac{dp}{dv}$，也在这时，由$(-)$号变到$(+)$号，就是 v 的这个值对应于 p 的一个極小値。同理，値 $v=v_2$ 对应于一个 p 的極大值。

最后，若

$$RT=\frac{8a}{27b},\tag{23}$$

則方程(22)左边的極大値等于零。于是値 $v=v_1$ 与 $v=v_2$ 并为一个値 $v=3b$，当經

过这个值时，方程(22)的左边以及 $\frac{dp}{dv}$ 保持(−)号不变；就是，v 增加时，p 总减小，而值 $v=3b$ 对应于曲綫的扭轉点 K。对应于这个扭轉点的值 $v=v_k$，$p=p_k$ 以及由条件(23)确定的 $T=T_k$，叫做气体的临界容积，临界压力以及临界溫度。圖 86 上表示对应于这三种情形的曲綫。

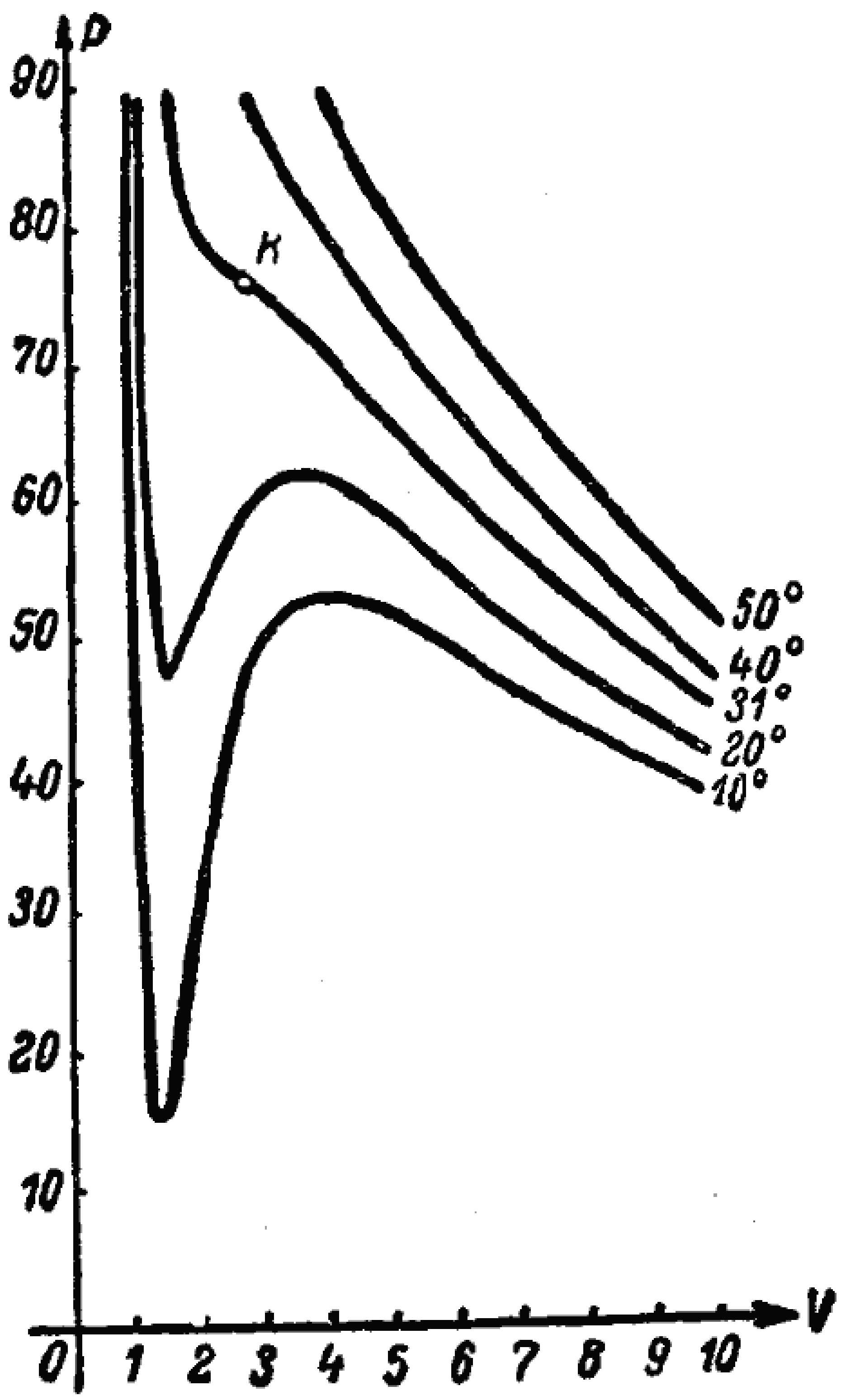


圖 86.

76. 曲綫的奇点 考虑一个曲綫的隐式方程

$$F(x, y)=0。\qquad (24)$$

公式

$$y'=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (25)$$

确定这曲綫的切綫的斜率，其中 (x,y) 是切点的坐标。

考虑 $F(x, y)$ 是 x 与 y 的多項式这种特殊情形。在这情形下，曲綫(24)叫做代数曲綫。如果把曲綫上任意一点 M 的坐标代入偏导数 $F'_x(x, y)$ 与 $F'_y(x, y)$ 中，則就得到完全确定的值，并且在任何情形下，方程(25)給出切綫的确定的斜率，但是当点的坐标使得偏导数 $F'_x(x, y)$ 与 $F'_y(x, y)$ 都等于零时应除外。这样的点 M 叫做曲綫(24)的奇点。

坐标滿足方程(24)与方程

$$F'_x(x,y)=0, \quad F'_y(x, y)=0 \qquad (26)$$

的点叫做代数曲綫(24)的奇点。

对于橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

由条件(26)得到 $x=y=0$，但是点 $(0, 0)$ 不在这橢圓上，所以橢圓沒有奇点。同样可以肯定，双曲綫与抛物綫也沒有奇点。

若是笛卡儿叶形綫

$$x^3+y^3-3axy=0$$

条件(26)就是：

$$3x^2-3ay=0,\quad 3y^2-3ax=0,$$

于是直接看出，坐标原点 (0,0) 是这曲綫的一个奇点。討論笛卡儿叶形綫时，我們說过，这曲綫在坐标原点自交，并且曲綫的两支在这交点有不同的切綫：一支的切綫是 OX 軸，另一支的切綫是 OY 軸。

若曲綫的两支交于一点，并且每一支各有它自己的切綫，这样的奇点叫做曲綫的叉点。

如此，坐标原点是笛卡儿叶形綫的叉点。

下面几个例中我們还要指出代数曲綫的奇点的几种类型。

1．考慮曲綫

$$y^2-ax^3=0\quad (a>0),$$

这曲綫叫做半立方抛物綫。不难驗証，坐标原点使这方程的左边以及它对 x 与 y 的偏导数都等于零，于是，坐标原点是这曲綫的一个奇点。为要討論曲綫在这个奇点附近的形状，我們作这曲綫的圖形。这方程的显式是：

$$y=\pm\sqrt{ax^3}。$$

为要作这曲綫，只要討論对应于(+)号的一部分就够了，因为对应于負号的一部分与第一部分关于 OX 軸对称。由这方程看出，x 只可以 $\geqslant 0$，并且当 x 由 0 增加到 $+\infty$ 时，y 也由 0 增加到 $+\infty$。

求出一阶与二阶导数：

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{ax},\quad y''=\frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{x}}。$$

当 $x=0$ 时，$y'=0$；并且注意 x 可以只取正値趋向零，我們可以肯定 OX 軸是曲綫的这一支在坐标原点的右切綫。此外，还看出对于这一支，y'' 在区間 $(0,+\infty)$ 上保持(+)号，就是这一支是凹的。

圖 87 表示討論的曲綫的圖形($a=1$)。这曲綫的两支在坐标原点相遇，都止于此点，并且这两支在这点有共同的切綫，在这奇点附近曲綫的两支位于切綫两側。(在这个例中两支整个在切綫两側)。这样的奇点叫做第一类歧点。

2．考慮曲綫

$$(y-x^2)^2-x^5=0。$$

不难証实，坐标原点是这曲綫的一个奇点。这曲綫方程的显式是：

$$y=x^2\pm\sqrt{x^5}。$$

由这方程看出，x 可以由 0 变到$(+\infty)$。求出一阶与二阶导数：

$$y'=2x\pm\frac{5}{2}\sqrt{x^3},\quad y''=2\pm\frac{15}{4}\sqrt{x}。$$

分别討論对应于(+)号与(−)号的两支。

注意，在两种情形下，当 $x=0$ 时，都有 $y'=0$；于是，像例 1 一样，在坐标原点，这两支的右切綫都是 OX 軸。

用以前的方法討論这两支，得到下面的結果：第一支，当 x 由 0 增加到$(+\infty)$时，y 由 0 增加到$(+\infty)$，并且是凹的曲綫；第二支，当 $x=\frac{16}{25}$ 时，有一个頂点(極大値)，当 $x=\frac{64}{225}$ 时，有一个扭轉点，并且当 $x=1$ 时，与 OX 軸相交。

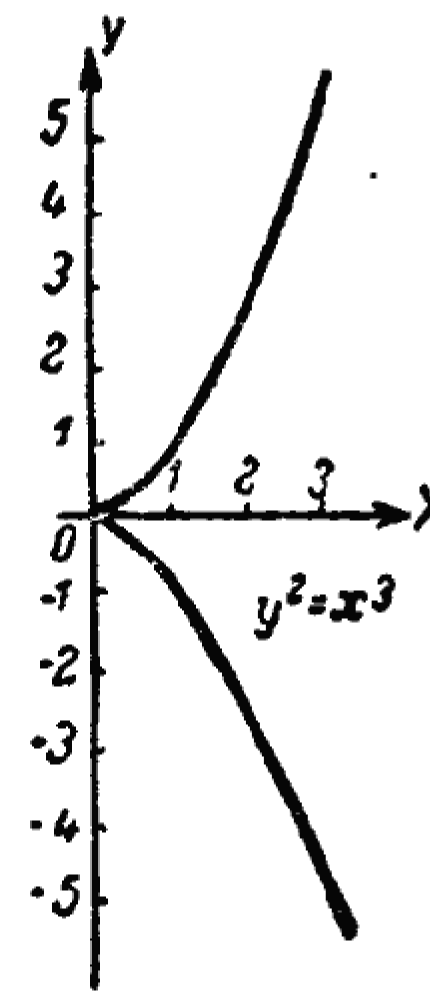


圖 87.

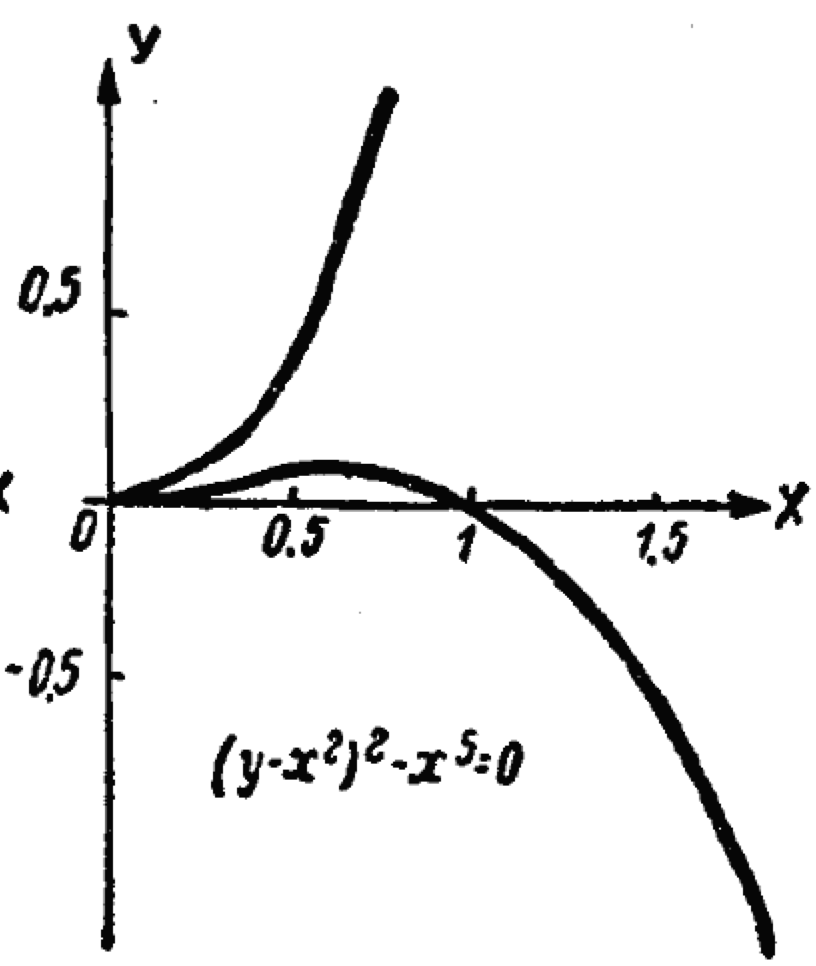


圖 88.

由这些性質，得到曲綫的圖形，如圖 88 所示。

曲綫的两支在坐标原点相遇，都止于此，并且这两支在这点有共同的切綫，在这奇点附近，曲綫的两支位于切綫的同側。这样的奇点叫做第二类蛟点。

3. 討論曲綫：

$$y^2-x^4+x^6=0。$$

坐标原点是这曲綫的一个奇点。曲綫方程的显式是：

$$y=\pm x^2\sqrt{1-x^2}。$$

曲綫的隐式中，只有 x 与 y 的偶次幂，所以，两个坐标軸都是曲綫的对称軸，于是只討論对应于 x 与 y 都是正値的那部分曲綫就够了。由曲綫的显式看出，x 可

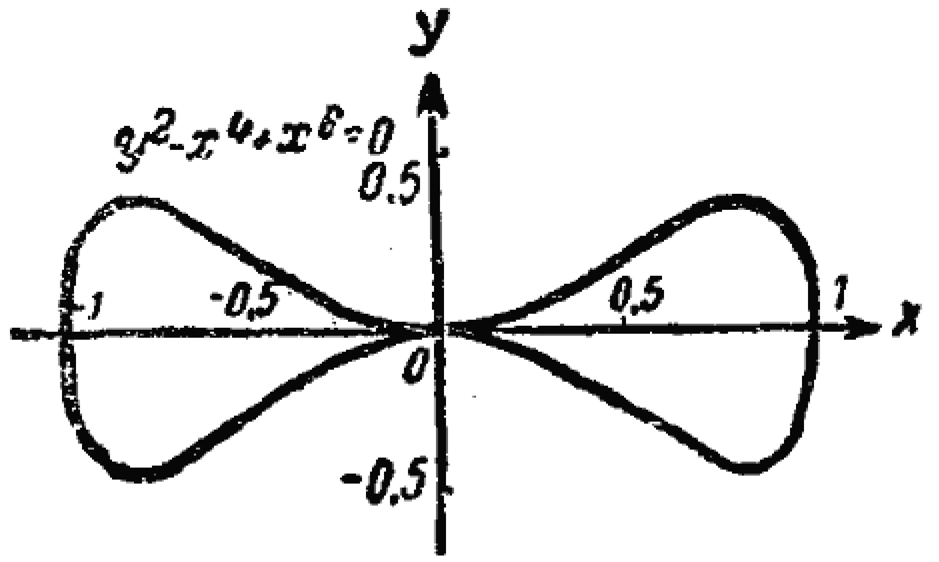


圖　89.

以由(-1)变到1。

限于計算一阶导数：

$$y'=\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}。$$

当 $x=0$ 时，$y=y'=0$；就是，在坐标原点，切綫与 OX 軸重合。而当 $x=1$ 时，$y=0$，$y'=\infty$，就是，在$(1, 0)$点，切綫平行于 OY 軸。用以前的法則求出，当 $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 时，曲綫有一个頂点。

由这些性質以及曲綫的对称性，得到曲綫如圖 89 所示。

对应于$(+)$号与$(-)$号的两支曲綫，在坐标原点，彼此相切。这样的奇点叫做切触点。

4．討論曲綫：

$$y^2-x^2(x-1)=0。$$

坐标原点是这曲綫的一个奇点。这曲綫的显式是：

$$y=\pm\sqrt{x^2(x-1)}。$$

注意，根号下的表达式不能是負的，所以可以肯定，x 应当，或者 $=0$，或者 $\geqslant 1$。

当 $x=0$ 时，$y=0$。現在討論这曲綫对应于$(+)$号的一支。当 x 由 1 增加到 $(+\infty)$ 时，y 由 0 增加到$(+\infty)$。

由一阶导数的表达式：

$$y'=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

看出，当 $x=1$ 时，y' 成为 ∞，就是在点$(1, 0)$，切綫平行于 OY 軸。这曲綫的两支关于 OX 軸对称。由这些性質，得到如圖 90 所示的曲綫。在这情形下，点 O 的坐标 $(0, 0)$ 滿足曲綫的方程，但是在它附近沒有曲綫上別的点。这样的奇点叫做孤立点。

代数曲綫的奇点只能有上述的几种，但是有时，一个代数曲綫上有这样的点，它是同一类的或是不同类的几个奇点的重合点。不是代数曲綫的曲綫叫做超越曲綫。

請讀者自己討論，方程

$$y=x\log x$$

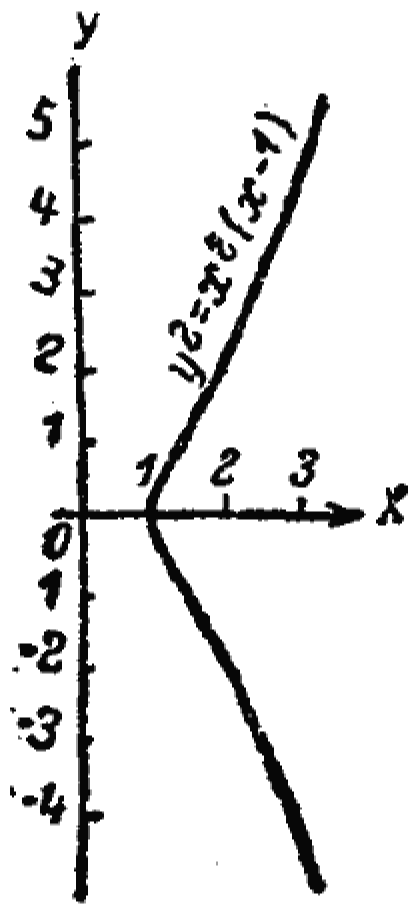


圖 90.

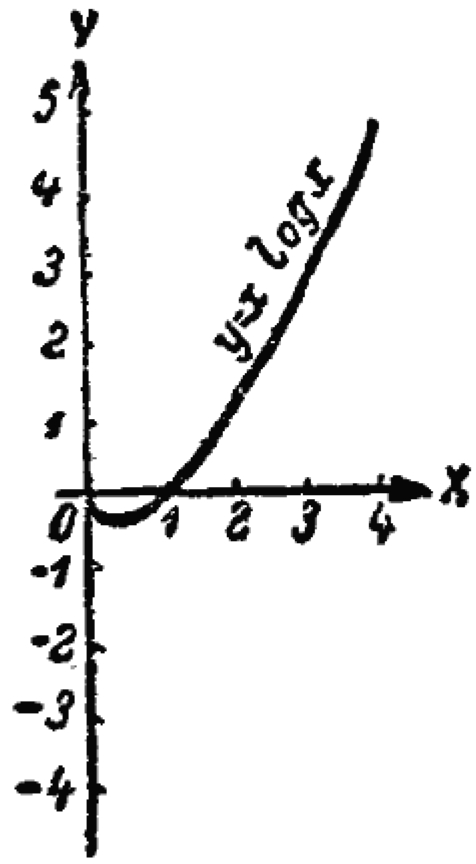


圖 91.

对应的曲綫，如圖 91 所示。坐标原点是这曲綫的一个終止点。

77. 曲綫的綫素 我們引进与曲綫的切綫及曲綫的曲率有关的基本公式，并还引进了与切綫概念有关的一些新概念。

若曲綫的方程是

$$y=f(x), \tag{27}$$

則切綫的斜率是 y 对 x 的导数 $f'(x)$，切綫的方程就可以写成：

$$Y-y=y'(X-x) \qquad (y'=f'(x)), \tag{28}$$

其中 (x, y) 是切点的坐标，(X, Y) 是切綫的流动坐标。經过点 (x, y)，垂直于在这点的切綫的直綫，叫做曲綫在这点的法綫。由解析几何学知道，互相垂直的两条直綫的斜率，互为負倒数，就是法綫的斜率是 $\left(-\frac{1}{y'}\right)$；于是，法綫的方程可以写成：

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

或

$$(X-x)+y'(Y-y)=0。 \tag{29}$$

設 M 是曲綫上一点，T 与 N 是过点 M 的曲綫的切綫及法綫与 OX 軸的交点，Q 是点 M 在 OX 軸上的垂直投影(圖 92)。在 OX 軸上

的綫段$\overline{QT}$与$\overline{QN}$,各叫做曲綫在点M的次切距与次法距。这两个綫段对应的数,是正的还是負的,視它們在OX軸上的方向而定。綫段$\overline{MT}$与$\overline{MN}$的長度各叫做曲綫在点M的切綫長与法綫長。这两个長度总算作是正的。OX軸上点Q的横坐标等于点M的横坐标x。T与N两个点是切綫及法綫与OX軸的交点,所以要

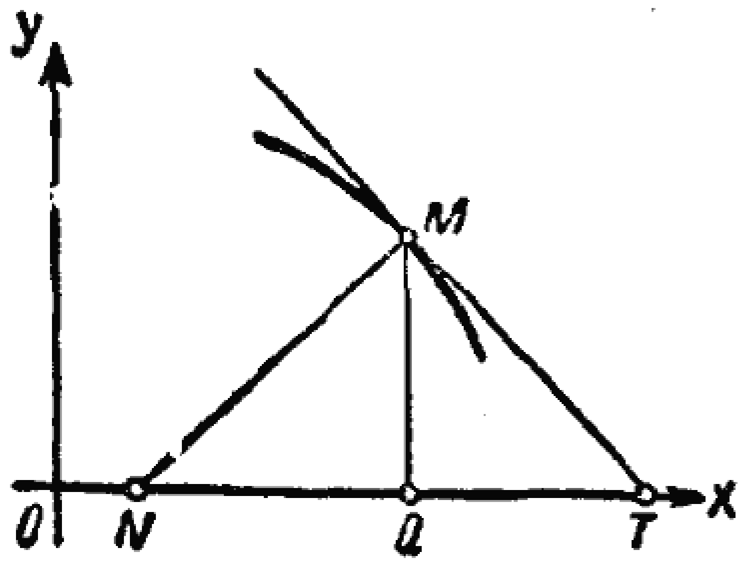


圖 92.

确定这两个点的横坐标,須要在切綫与法綫的方程中,讓$Y=0$,再解出X。如此,我們得到,点T的横坐标的表达式$\left(x-\frac{y}{y'}\right)$,与点$N$的横坐标的表达式$(x+yy')$。現在不难确定次切距与次法距这两个量:

$$\left.\begin{aligned}\overline{QT}&=\overline{OT}-\overline{OQ}=x-\frac{y}{y'}-x=-\frac{y}{y'},\\ \overline{QN}&=\overline{ON}-\overline{OQ}=x+yy'-x=yy'。\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

再由直角三角形MQT与MQN可以确定切綫長与法綫長:

$$\left.\begin{aligned}|\overline{MT}|&=\sqrt{\overline{MQ}^2+\overline{QT}^2}=\sqrt{y^2+\frac{y^2}{y'^2}}=\pm\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2},\\ |\overline{MN}|&=\sqrt{\overline{MQ}^2+\overline{QN}^2}=\sqrt{y^2+y^2y'^2}=\pm y\sqrt{1+y'^2},\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

其中(±)須要这样取,使得右边的表达式是正的。

回忆曲綫的曲率半徑的公式[**71**]:

$$R=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}。\tag{32}$$

把法綫長記作n,由(31)第二个公式得到:

$$\sqrt{1+y'^2}=\pm\frac{n}{y},$$

把$\sqrt{1+y'^2}$的这个值代入公式(32)中,得到曲率半徑的表达式:

$$R=\pm\frac{n^3}{y^3y''}。\tag{32_1}$$

若曲綫的参变方程是:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

则 y 对 x 的一阶导数 y' 与二阶导数 y'' 的公式是[74]:

$$\left.\begin{aligned} y'&=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\\ y''&=\frac{d^2y\,dx-d^2x\,dy}{dx^3}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}。\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

特别是若把这两个表达式代入公式(32)中，则得到在这情形下曲率半徑的表达式:

$$R=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx-d^2x\,dy}=\pm\frac{\{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=\pm\frac{ds}{d\alpha},\tag{34}$$

其中 α 是切綫与 OX 軸作成的角度。

若曲綫的隐式是

$$F(x,y)=0,$$

则由公式(25)得到切綫的方程是:

$$F'_x(x,y)(X-x)+F'_y(x,y)(Y-y)=0。\tag{35}$$

78. **悬鏈綫** 在适当的选擇坐标軸下具有方程

$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\quad(a>0)$$

的曲綫叫做悬鏈綫。

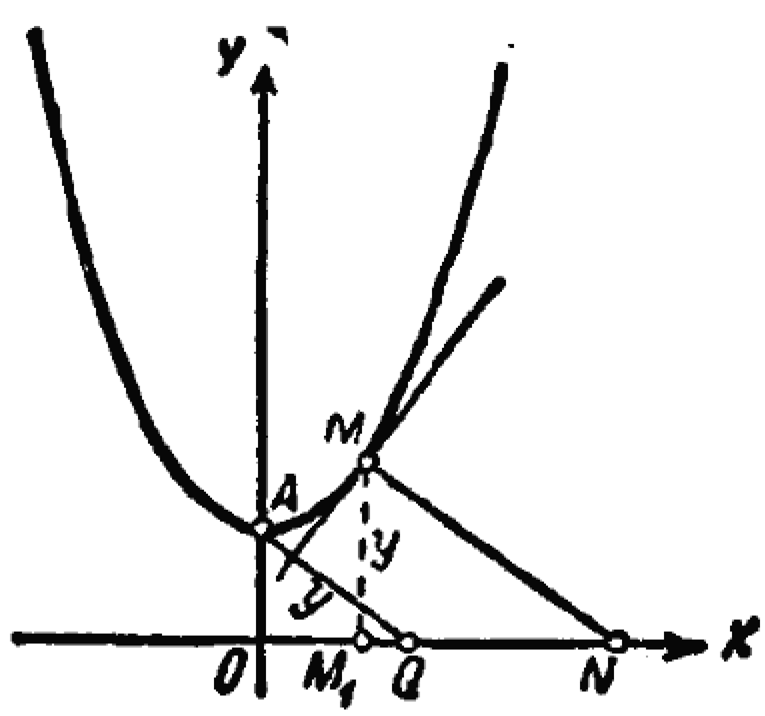


圖 93.

这曲綫所表示的是，一条有重量的鏈子，两端悬起时，平衡的形状。依照[73]所述法则，不难作出它的圖形，如圖93。求出 y 的一阶与二阶导数:

$$y'=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}),$$

$$y''=\frac{1}{2a}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})=\frac{y}{a^2},$$

由此

$$1+y'^2=1+\frac{(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}{4}=$$

$$=\frac{4+e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}}{4}=\frac{(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2}{4}=\frac{y^2}{a^2}。$$

把$(1+y'^2)$的这个表达式代入(31)的第二个公式中，得到这曲綫的法綫長：

$$n=\frac{y^2}{a},$$

把n与y''的表达式代入公式(32_1)中，得到：

$$R=\frac{y^6a^2}{a^3y^3\cdot y}=\frac{y^2}{a}=n,$$

就是悬鏈綫的曲率半徑之長等于法綫MN之長。当$x=0$时，悬鏈綫的縱坐标取最小值$y=a$，曲綫上对应的点A叫做頂点。

圖上所画的一些輔助綫是我們以后要用的。用$(-x)$替代x时，悬鏈綫的方程不变，就是OY軸是悬鏈綫的对称軸。

79. **旋輪綫** 設一个圓，半徑是a，在一条不动的直綫上滾，沒有滑动。当这样滾时，这个圓的圓周上一点M所画出的几何軌迹叫做旋輪綫。

将圓滾动时所沿的直綫取作OX軸，点M开始时的位置，就是开始时圓周与OX軸的切点，取作坐标原点。圓周轉的角度記作t。圓心記作C；在某一位置，圓周与OX軸的切点記作N，点M在OX軸上的垂直投影記作Q，过点N的直徑記作NN_1，点M在NN_1上的垂直投影記作R（圖 94）。

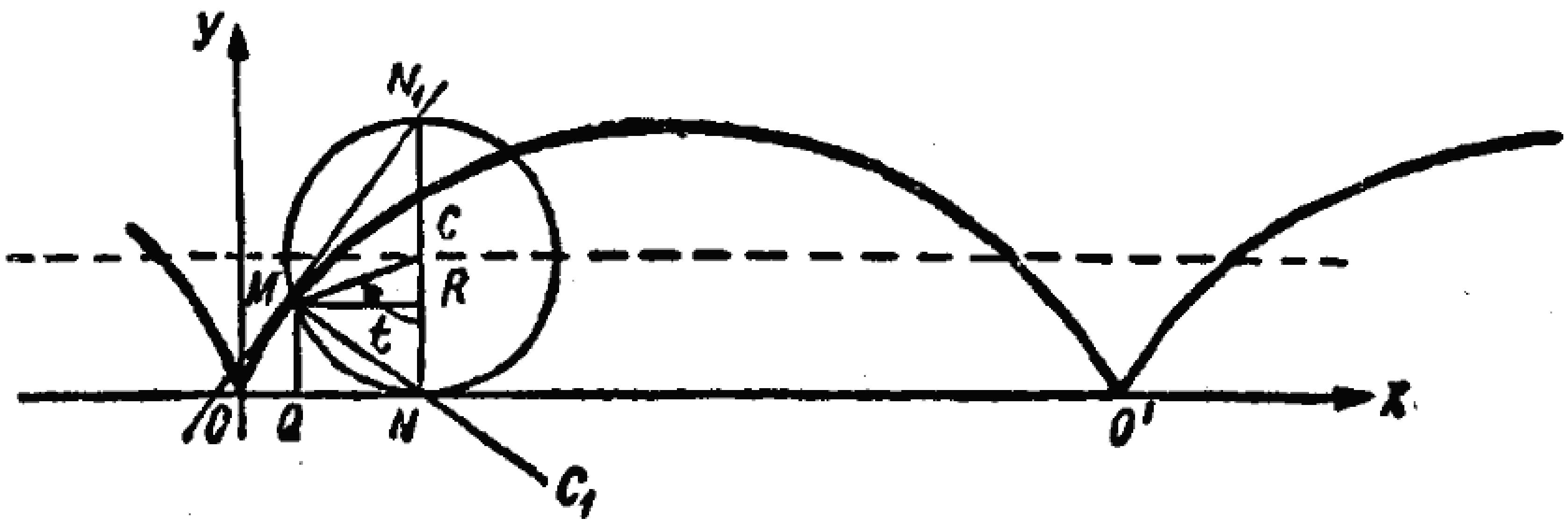


圖 94.

由于沒有滑动

$$\overline{ON}=弧\,NM=at,$$

利用参变量$t=\angle NCM$，这旋輪綫上点M的坐标可以表达成：

$$x=\overline{OQ}=\overline{ON}-\overline{QN}=at-a\sin t=a(t-\sin t),$$

$$y=\overline{QM}=\overline{NC}-\overline{RC}=a-a\cos t=a(1-\cos t)。$$

这是旋輪綫的参变方程。

首先要注意，只考虑 t 在区間 $[0, 2\pi]$ 上变的情形就够了，这对应于圓周旋轉一圈。旋轉一圈后，点 M 与点 O' 重合，点 O' 又是圓周与直綫的切点，但是平移了一段 $\overline{OO'}=2\pi a$。再轉时，得到的圖形就与弧 OO' 全同，于是把这弧向右平移一段 $2\pi a$ 就得到所要的一部分曲綫，以下类推。現在計算 x 与 y 对 t 的一阶与二阶导数：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\varphi'(t)=a(1-\cos t), & \frac{dy}{dt}&=\psi'(t)=a\sin t,\\ \frac{d^2x}{dt^2}&=\varphi''(t)=a\sin t, & \frac{d^2y}{dt^2}&=\psi''(t)=a\cos t。\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

根据(33)第一个公式，得到切綫的斜率：

$$y'=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}。$$

由这公式得到作旋輪綫的切綫的簡單方法。連点 N_1 与点 M。角 MN_1N 是一个圓周角，由弧 $NM=t$ 确定，于是它等于 $\frac{t}{2}$。由直角三角形 RMN_1 得到（圖94）：

$$\angle RMN_1=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2},\quad \operatorname{tg}\angle RMN_1=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}。$$

比較这表达式与 y' 的表达式，看出 MN_1 就是这旋輪綫的切綫，就是：

为要作旋輪綫在一点 M 的切綫，先作出滚动的圓周与 OX 軸的切点 N，再作过点 N 的直徑 NN_1，連点 M 与点 N_1 就是所要的切綫。

直綫 MN 垂直于直綫 MN_1，所以直綫 MN 是旋輪綫的法綫。法綫長 $n=\overline{MN}$ 直接由直角三角形 N_1MN 确定：

$$n=2a\sin\frac{t}{2}。$$

应用公式(34)与表达式(36)，得到旋輪綫的曲率半徑：

$$\begin{aligned}R&=\pm\frac{[a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}{a\cos t\cdot a(1-\cos t)-a\sin t\cdot a\sin t}=\\&=\pm\frac{a(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{\cos t-1}=a\cdot 2^{\frac{3}{2}}(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}=4a\sin\frac{t}{2}。\end{aligned}$$

在最后的表达式中，我們只留下(+)号，因为对于旋輪綫的第一支，t 在区間 $(0, 2\pi)$ 上，于是 $\sin\frac{t}{2}$ 不可能是負的。

比較这个表达式与法綫長 n 的表达式，得到 $R=2n$，就是，旋輪綫的曲率半徑等于法綫長的两倍(圖 94 上 MC_1)。

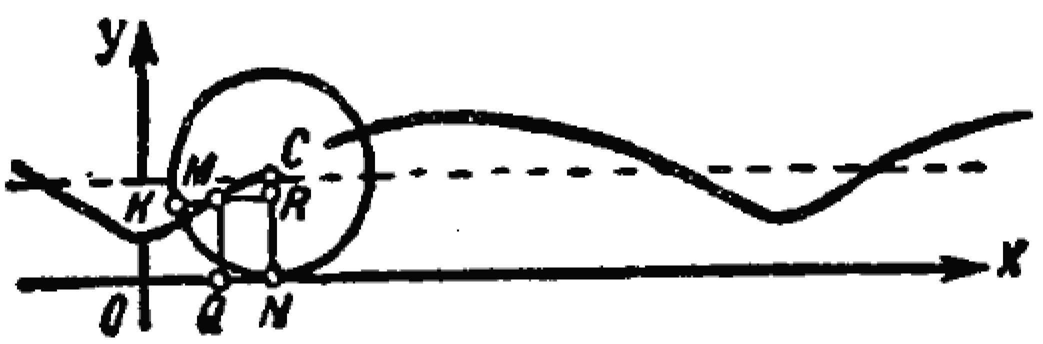


圖 95.

若画出旋輪綫的点，不在圓周上，而在圓內或圓外；則当圓滚时，它画出的曲綫，分別叫做短輻旋輪綫或長輻旋輪綫(有时統称为余擺綫)。

点 M 到圓心的距离 CM 記作 h，其余照上面的記法。先考慮 $h<a$ 的情形，就是点 M 在圓內的情形(圖 95)。直接由圖得到：

$$\left.\begin{aligned} x&=\overline{OQ}=\overline{ON}-\overline{QN}=at-h\sin t,\\ y&=\overline{QM}=\overline{NC}-\overline{RC}=a-h\cos t。\end{aligned}\right\}$$

至于 $h>a$ 的情形，方程是一样的，但是曲綫的圖形如圖 96 所示。

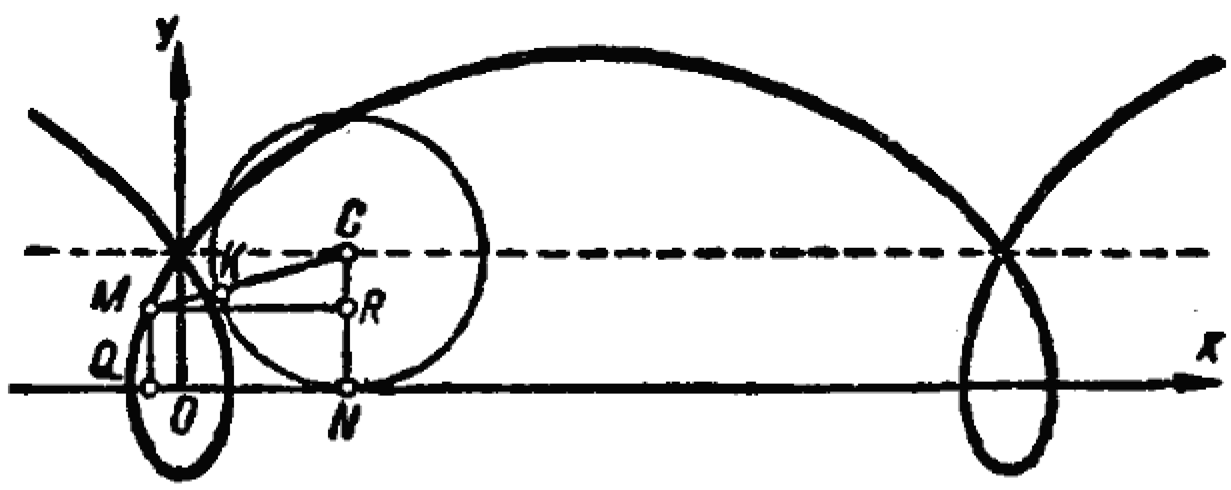


圖 96.

80. 圓外旋輪綫与圓內旋輪綫　若是一个圓，不在一条直綫上滚，而是沿另外一个不动的圓滚，則由圓周上一定点 M 可以画出两类曲綫：若滚的圓在不动的圓外叫做圓外旋輪綫；若滚的圓在不动的圓內，叫做圓內旋輪綫。

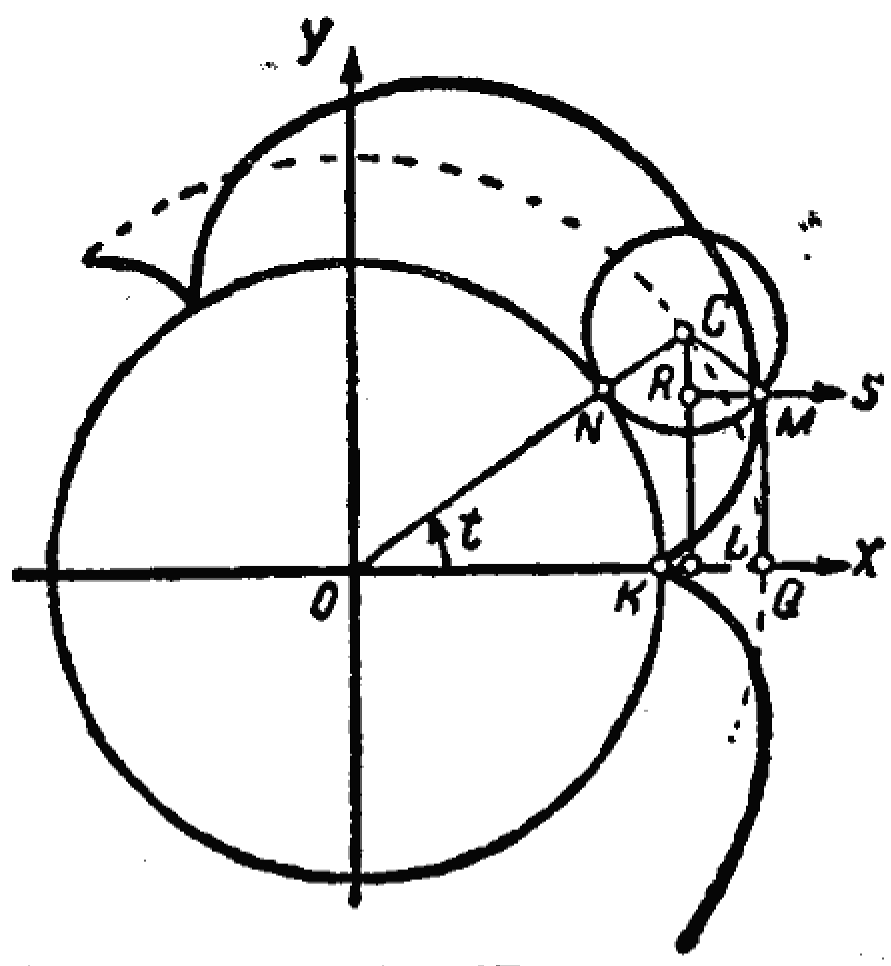


圖 97.

求圓外旋輪綫的方程。取不动圓的圓心作坐标原点，連接圓心 O 到点 K 的直綫作 OX 軸，点 K 是开始时点 M 的位置，就是开始时两圓的切点。滚动圓周的半徑記作 a，不动圓周的半徑記作 b，当滚动圓周轉一个角度 $\varphi=\angle NCM$

时，两圓周的切点記作 N，不动圓的半徑 ON 与 OX 軸的交角記作 t，取 t 作参变量（圖 97）。

根据滚动的圓沒有滑动，可以写成：

$$弧\ KN = 弧\ NM,$$

就是

$$bt = a\varphi,\quad \varphi = \frac{bt}{a}。$$

由圖直接求出：

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{OQ} = \overline{OL} + \overline{LQ} = \overline{OC}\quad \cos\angle KOC - \overline{CM}\cos\angle SMC = \\ &= (a+b)\cos t - a\cos(t+\varphi) = (a+b)\cos t - a\cos\frac{a+b}{a}t, \\ y &= \overline{QM} = \overline{LC} - \overline{RC} = \overline{OC}\quad \sin\angle KOC - \overline{CM}\sin\angle SMC = \\ &= (a+b)\sin t - a\sin(t+\varphi) = (a+b)\sin t - a\sin\frac{a+b}{a}t。 \end{aligned}\right\}\quad (37)$$

这曲綫是由一串全同的弧組成的，每一个弧对应于动的圓旋轉一圈，就是，角度 φ 增加 2π，而角度 t 增加 $\frac{2a\pi}{b}$。

如此，这些弧的端点对应于值：

$$t = 0,\ \frac{2a\pi}{b},\ \frac{4a\pi}{b},\ \cdots,\ \frac{2pa\pi}{b},\ \cdots。$$

若要回到原来的点 K，必須且仅須这些端点中有一个与 K 重合，就是有整数 p 与 q 存在，滿足条件

$$\frac{2pa\pi}{b} = 2q\pi,$$

因为点 K 对应于繞 O 轉整数圈。上面这条件可以写成：

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{p}。$$

这样的数 q 与 p 存在，必須且仅須 a 与 b 两个綫段是可以通約的量；若比 $\frac{a}{b}$ 是个无理数，就不可能等于两个整数的比。

由此推知，一个圓外旋輪綫是封閉曲綫，必須且仅須两个圓的半徑可以通約；否則这曲綫不封閉，离开点 K 以后，无論如何不会再回到它。

这件事对于圓內旋輪綫也是一样（圖 98）。圓內旋輪綫的方程可以由圓外旋輪綫的方程得到，只要用 $(-a)$ 替代 a 就成了：

$$\left.\begin{aligned} x&=(b-a)\cos t+a\cos\frac{b-a}{a}t,\\ y&=(b-a)\sin t-a\sin\frac{b-a}{a}t。\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

指出一个特殊情形。設对于一个圓外旋輪綫，$b=a$，就是，动的圓与不动的圓半徑相等。这时，得到的曲綫只有一支(圖 99)。把 $b=a$ 代入方程(37)中，得到这曲綫的方程：

$$x=2a\cos t-a\cos 2t,$$
$$y=2a\sin t-a\sin 2t。$$

这个曲綫叫做心臟綫。

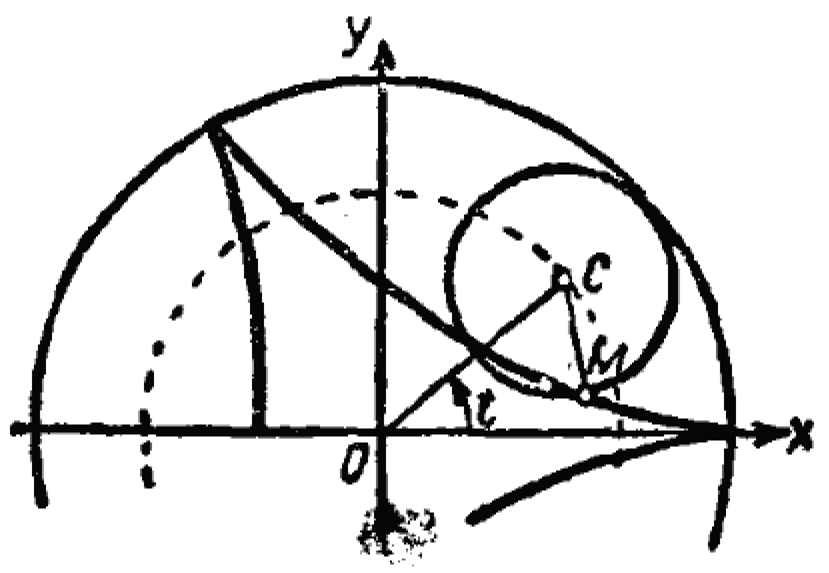


圖 98.

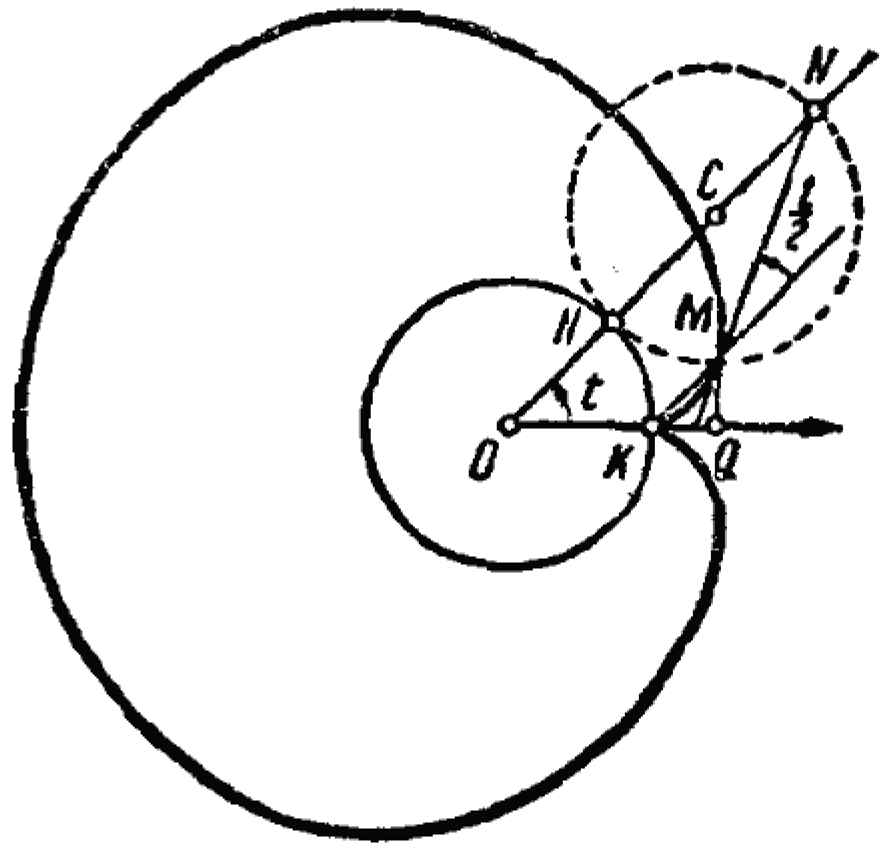


圖 99.

我們确定曲綫上的点 M 到具有坐标 $(a, 0)$ 的点 K 的距离 r；为此，先求出 $(x-a)$ 与 y 的表达式：

$$\begin{aligned} x-a&=2a\cos t-a(\cos^2 t-\sin^2 t)-a=\\ &=2a\cos t-2a\cos^2 t=2a\cos t(1-\cos t),\\ y&=2a\sin t-2a\sin t\cos t=2a\sin t(1-\cos t), \end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned} r&=|\overline{KM}|=\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\\ &=\sqrt{4a^2\cos^2 t(1-\cos t)^2+4a^2\sin^2 t(1-\cos t)^2}=2a(1-\cos t)。\end{aligned}$$

差 $(x-a)$ 与 y 各为 $\overline{KM}$ 在 OX 与 OY 軸上的投影，但是由上面的表达式看出 $(x-a)$ 与 y 各等于綫段 $\overline{KM}$ 的長度乘上 $\cos t$ 与 $\sin t$，所以我們可以肯定，綫段 $\overline{KM}$ 与 OX 軸的正向作成的角度是 t，就是綫段 $\overline{KM}$ 平行于半徑 ON。这个結果，对我們以后作心臟綫的切綫时；是很重要的。引用角度 $\theta=\pi-t$，就是綫段 $\overline{KM}$ 与 OX 軸負向的交角。这时我們得到

$$r=2a(1+\cos\theta)。$$

这个方程是心臟綫的極坐标方程，談到極坐标时，我們再仔細討論这曲綫。

現在指出一个圓內旋輪綫的一个特殊情形。在方程 (38) 中，假定 $b=2a$，得到：

$$x=2a\cos t=b\cos t,\quad y=0。$$

就是，若不动圓的半徑是滚动圓的半徑的二倍，則点 M 在不动圓的一个直徑上移动。

現在假設 $b=4a$。在这情形下，圓內旋輪綫由四支組成（圖 100）。这时它叫做星形綫，方程 (38) 当 $b=4a$ 时，成为：

$$x=3a\cos t+a\cos 3t=$$
$$=3a\cos t+a(4\cos^3 t-3\cos t)=$$
$$=4a\cos^3 t=b\cos^3 t,$$
$$y=3a\sin t-a\sin 3t=$$
$$=3a\sin t-a(3\sin t-4\sin^3 t)=$$
$$=4a\sin^3 t=b\sin^3 t。$$

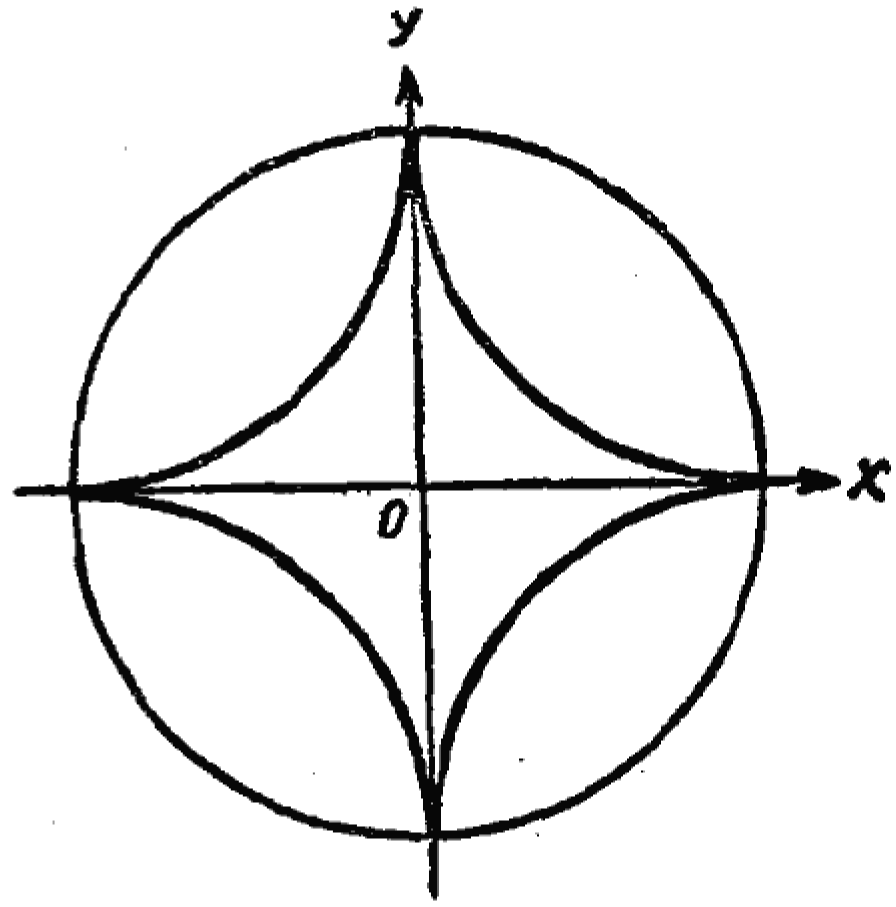


圖 100.

把这两个方程两边都乘 $\frac{2}{3}$ 次方，再相加，于是消去参变量 t，得到星形綫的隐式方程：

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{2}{3}}。$$

81. 圓的漸伸綫 把一个繞在半徑为 a 的圓周上的繩子伸开，保持繩子与圓周在将要离开的点 K 相切，这时繩端 M 画出的曲綫叫做圓的漸伸綫（圖 101）。

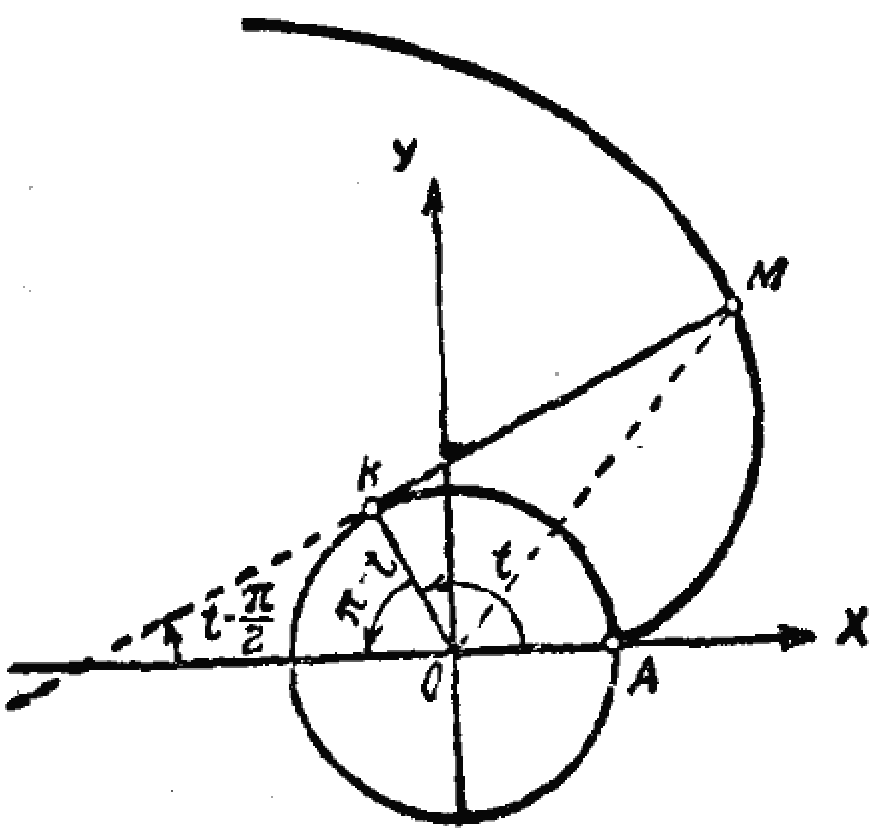


圖 101.

取半徑 OK 与正向 OX 軸作成的角度 t 作参变量，注意：

$$\overline{KM}=\text{弧 } AK=at,$$

得到圓的漸伸綫的参变方程：

$$x=\overline{OM}\text{ 在 }OX\text{ 軸上的投影}=$$
$$=\overline{OK}\text{ 在 }OX\text{ 軸上的投影}+$$
$$+\overline{KM}\text{ 在 }\overline{OX}\text{ 軸上的投影}=$$
$$=a\cos t+at\sin t,$$

$y = \overline{OM}$ 在 OY 軸上的投影 $=$

$= \overline{OK}$ 在 OY 軸上的投影 $+\overline{KM}$ 在 OY 軸上的投影 $=$

$= a\sin t - at\cos t$。

应用(33)第一个公式，确定切綫的斜率：

$$y' = \frac{a\cos t - a\cos t + at\sin t}{-a\sin t + a\sin t + at\cos t} = \operatorname{tg} t。$$

于是它的法綫的斜率就等于

$$-\operatorname{ctg} t = \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

由此看出，直綫 MK 是圓的漸伸綫的法綫。以后我們会看到，任何曲綫的漸伸綫都有这个性質。

82. 極坐标曲綫　設平面上的点 M 由極坐标确定：(1)由一个給定的点 O（極点）到点 M 的距离是 r，(2) $\overline{OM}$ 的方向与給定的方向 (L)（極軸）作成的角是 θ（圖 102）。通常，r 叫做矢徑，θ 叫做極角。若取極軸作 OX 軸，極点作坐标原点，則显然（圖 103）：

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta。\tag{39}$$

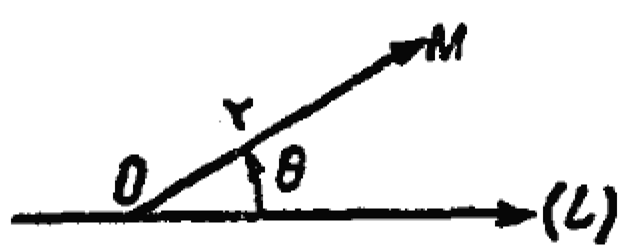


圖　102.

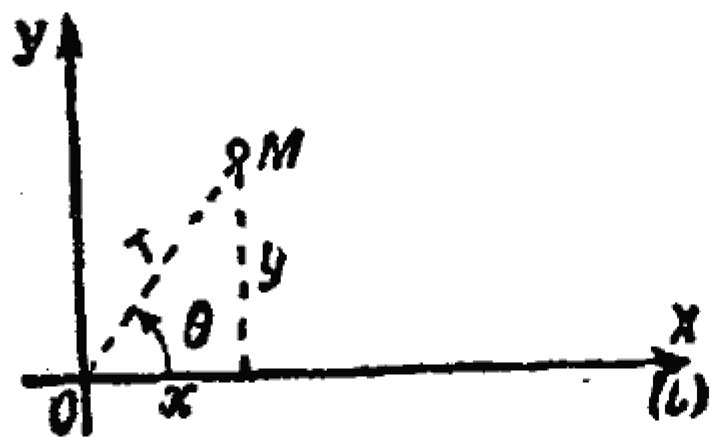


圖　103.

給定点 M 一个位置，对应的有一个确定的正值 r，与无数个值 θ，这些个 θ 的值，彼此之差是 2π 的一个倍数。若 M 与 O 重合，則 $r=0$，而 θ 就完全不确定了。

任何一个如 $r=f(\theta)$（显式）或 $F(r,\theta)=0$（隐式）的函数关系，在極坐标系下都有它自己的圖形。常用的是显式方程：

$$r = f(\theta)。\tag{40}$$

以后我們考虑 r 不仅取正值，它也取負值，并且若与某一个 θ 的值相对应的是負的 r 的值，則規定仍在 θ 的值所确定的直綫上取这个 r

的值，只是取在相反的方向。

对于一个給定的曲綫，r 是 θ 的一个函数；于是方程(39)就是这曲綫的参变方程，这时 x 与 y 一方面直接依賴于 θ，一方面間接通过 r 依賴于 θ。所以，在这情形下，我們可以应用公式(33)与(34)[77]。切綫与 OX 軸交角記作 α，用(33)第一个公式，得到：

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta},$$

其中 r' 記 r 对 θ 的导数。

再引用矢徑与曲綫的切綫作成的角 μ (圖 104)。就有：

$$\mu=\alpha-\theta,$$

于是：

$$\cos\mu=\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta,$$

$$\sin\mu=\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta。$$

由等式(39)对 s 求导数，注意 $\frac{dx}{ds}$ 与 $\frac{dy}{ds}$ 各等于 $\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha$，得到：

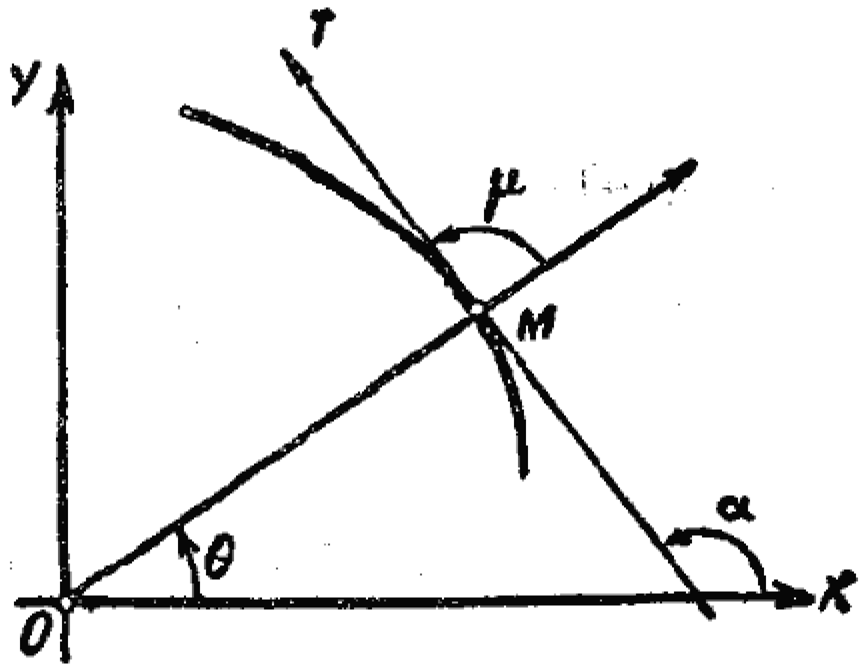


圖 104.

$$\cos\alpha=\cos\theta\frac{dr}{ds}-r\sin\theta\frac{d\theta}{ds},$$

$$\sin\alpha=\sin\theta\frac{dr}{ds}+r\cos\theta\frac{d\theta}{ds}。$$

把 $\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha$ 的表达式代入上面 $\cos\mu$ 与 $\sin\mu$ 的表达式中，得到：

$$\cos\mu=\frac{dr}{ds},\ \sin\mu=\frac{r\,d\theta}{ds}, \tag{41}$$

于是，

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{r\,d\theta}{dr}=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{r}{r'}。 \tag{41$_1$}$$

由(39)推知：

$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta,$$

$$dy=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta,$$

所以

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\theta)^2}, \tag{42}$$

再由等式 $\alpha=\mu+\theta$，就有：

$$R=\pm\frac{ds}{d\alpha}=\pm\frac{[(dr)^2+r^2(d\theta)^2]^{\frac{1}{2}}}{d\mu+d\theta},$$

分子，分母都用 $d\theta$ 除，得到：

$$R=\pm\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{1}{2}}}{1+\dfrac{d\mu}{d\theta}}。$$

由公式(41_1)：

$$\mu=\text{arc tg}\frac{r}{r'},\quad \frac{d\mu}{d\theta}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{r}{r'}\right)^2}\cdot\frac{r'^2-rr''}{r'^2}=\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2},$$

其中 r' 与 r'' 各为 r 对 θ 的一阶与二阶导数。代入 $\dfrac{d\mu}{d\theta}$ 的表达式代入上面 R 的表达式中，最后得到：

$$R=\pm\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}。 \tag{43}$$

83．螺綫　我們考慮三种螺綫：

阿基米德螺綫　$r=a\theta$

双曲螺綫　$r\theta=a$　　$(a>0,\ b>0)$

对数螺綫　$r=be^{a\theta}$。

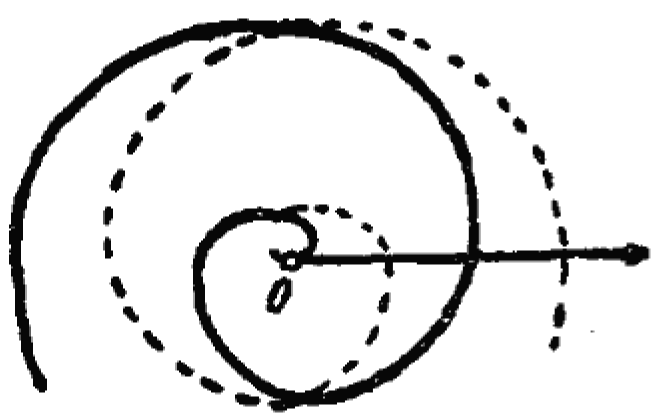


圖 105.

圖 105 表示阿基米德螺綫的形状，其中虛綫对应于 $\theta<0$ 时的一部分曲綫。θ 的負值对应于 r 的負值，于是这些値取在 θ 的値所确定的直綫上，但在相反方向。

任意一个矢徑与曲綫相交无数次，其中每两个相邻交点的距离是一个等于 $2a\pi$ 的常量。这是由于，某一个給定的値 θ 所对应的矢徑，当 θ 改变

2π, 4π, …时，它的位置不变；而 r 的長度由方程 $r=a\theta$ 确定，所以要得到改变量 $2a\pi$, $4a\pi$, …。

圖 106 表示双曲螺綫的形状。假設 $\theta>0$，討論当 θ 趋向零时，曲綫的变化，由方程

$$r=\frac{a}{\theta}$$

說明，这时 r 要趋向无穷大。在曲綫上，对应于足够小的 θ 的值，取一点 M，并作垂直于極軸的綫段 $\overline{MQ}$，由直角三角形 MOQ 得到：

$$\overline{QM}=r\sin\theta=\frac{a\sin\theta}{\theta},$$

于是当 θ 趋向零时，

$$\lim_{\theta\to0}\overline{QM}=\lim_{\theta\to0}a\frac{\sin\theta}{\theta}=a。$$

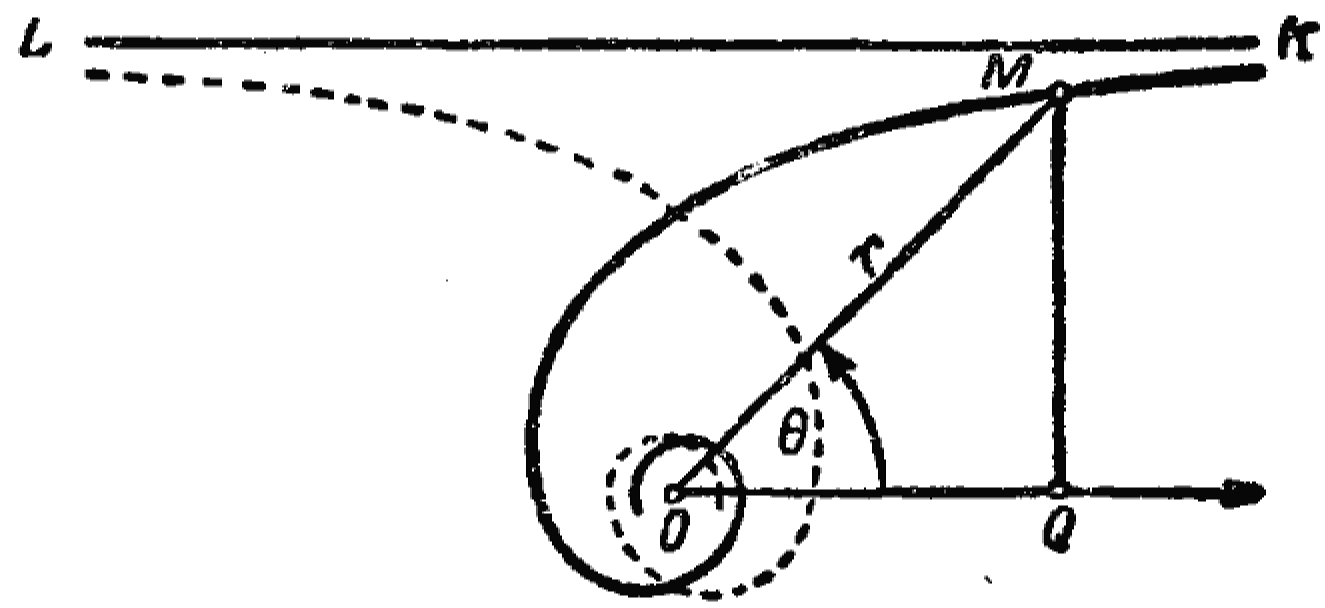


圖 106.

所以，当 θ 趋向零时，曲綫上点 M 到極軸的距离趋向 a，并且曲綫将有平行于極軸，且与極軸的距离为 a 的漸近綫 LK。

其次，我們看出，对于 θ 的任何有限值 r 不为零，只是当 θ 趋向无穷大时，r 才趋向零。所以，这曲綫繞極点 O 旋轉并无限逼近于它，但与阿基米德螺綫相反，它不經过 O。这样的点叫做曲綫的漸近点。

圖 107 表示对数螺綫的形状。当 $\theta=0$ 时，$r=b$；当 θ 趋向 $(+\infty)$ 时，r 趋向 $(+\infty)$，而当 θ 趋向 $(-\infty)$ 时，r 趋向零。在考虑的情形下：

$$r'=abe^{a\theta},\ \operatorname{tg}\mu=\frac{r}{r'}=\frac{1}{a},$$

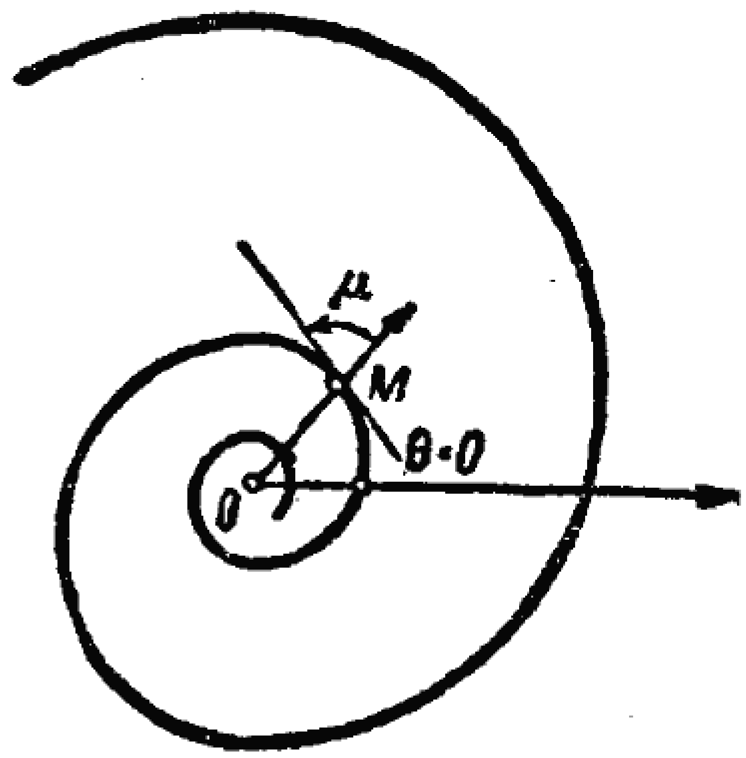


圖 107.

就是，矢徑与对数螺綫的切綫作成的角 μ 是个常量。

84. 蚶綫与心臟綫 以 $OA=2a$ 为直徑作一个圓（圖 108）；由圓周上点 O 作所有的矢徑，在每一个矢徑上，由它与圓周的交点 D，截一段 $\overline{DM}$，讓 $\overline{DM}$ 的長度等于定量 h。这样的点 M 的几何軌迹叫做蚶綫。

注意，
$$\overline{OD}=2a\cos\theta,\quad \overline{OM}=r,$$
就求出蚶綫的方程：
$$r=2a\cos\theta+h.$$

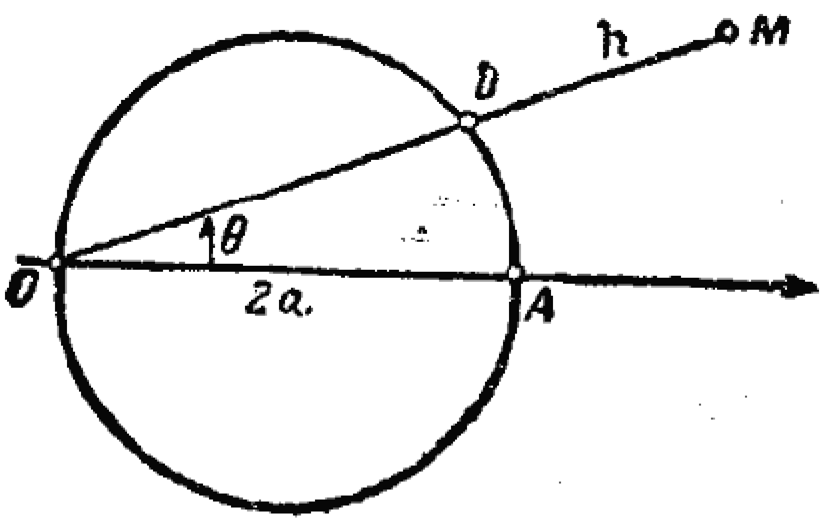


圖 108.

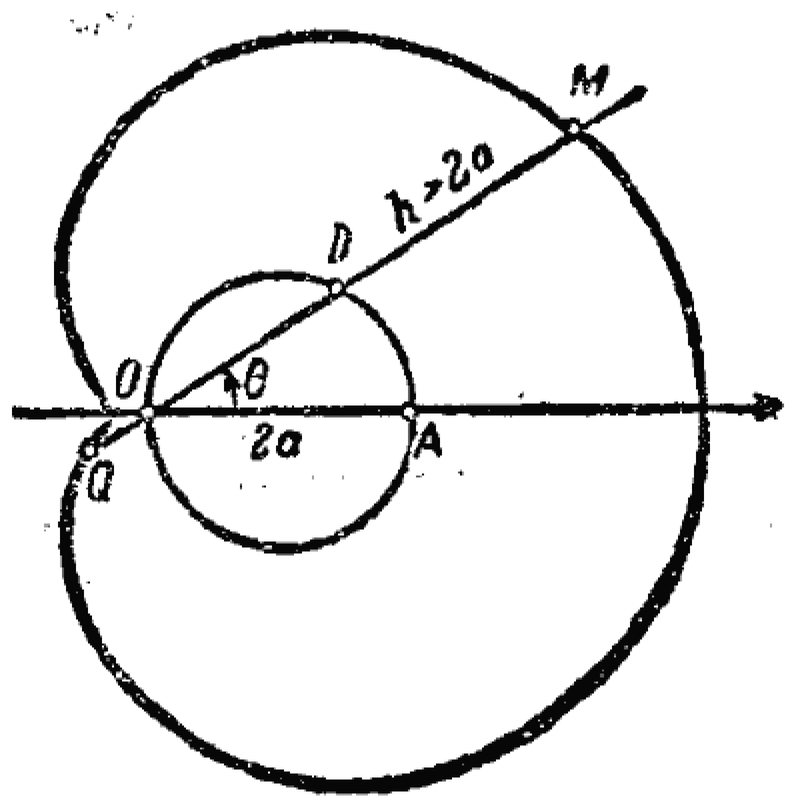


圖 109.

若 $h>2a$，則方程給出的 r 只有正値，对应的曲綫如圖 109 所示。若 $h<2a$，則 r 会取負値，曲綫的圖形如圖 110 所示。这曲綫在点 O 自交。最后，若 $h=2a$ 蚶綫的方程是：
$$r=2a(1+\cos\theta),$$
就是，在这情形下的蚶綫成为 [80] 中的心臟綫，只是位置不同（圖 111）。这时値 $\theta=\pi$ 对应于 $r=0$，就是，这曲綫經过点 O。

求出 r 对 θ 的一阶与二阶导数：
$$r'=-2a\sin\theta,\quad r''=-2a\cos\theta.$$

算出 $\operatorname{tg}\mu$：
$$\operatorname{tg}\mu=\frac{r}{r'}=\frac{2a(1+\cos\theta)}{-2a\sin\theta}=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right),$$
就是
$$\mu=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}. \tag{44}$$

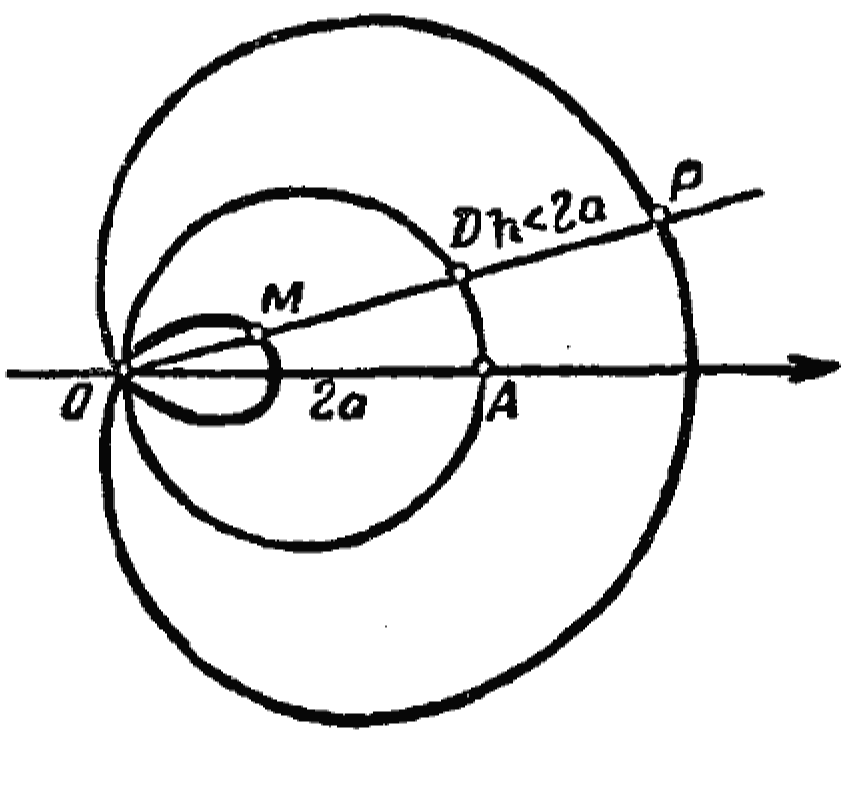


圖 110.

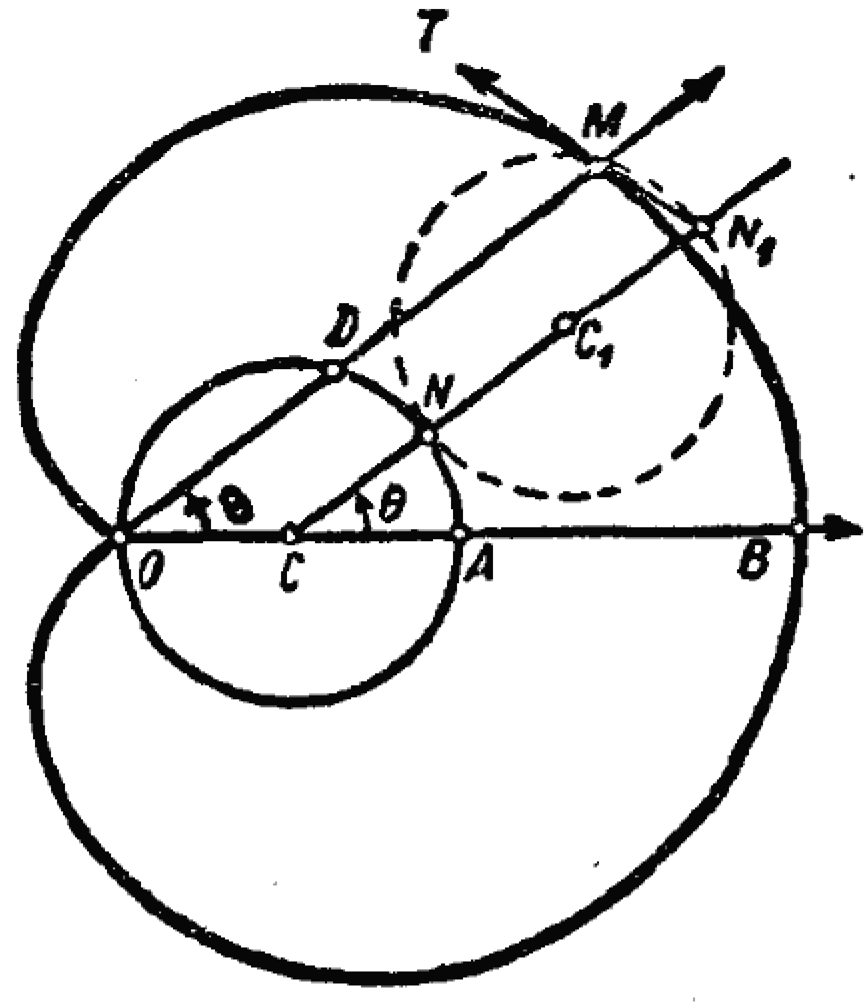


圖 111.

如前 [**80**] 所述，心臟綫可以表示成圓上的点沿上述以 $OA=2a$ 为直徑的圓滾动所成的曲綫，并且滾的圓与不动的圓半徑相等。設 C 是不动圓的圓心，M 是心臟綫上一点，对应于点 M 的位置，滾的圓与不动圓的切点是 N，NN_1 是动圓的直徑(圖 111)。以前我們講过，直綫 OM 与 CN_1 平行①，就是 $\angle ACN=\theta$，于是推知:

$$弧\, NM = 弧\, ON=\pi-\theta。$$

角 MN_1N 是对弧 NM 的圓周角，于是等于 $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$，最后得到 OM 与 N_1M 的交角等于:

$$\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}=\mu,$$

由此看出，N_1M 是这心臟綫在点 M 的切綫。如此我們得到下面的法則:

为要作心臟綫在点 M 的切綫，先找出滾的圓与不动圓在这时的切点 N，再作动圓的直徑 NN_1，連 MN_1 就是所要的切綫，于是直綫 MN 就是法綫。

上面求出的作心臟綫的切綫的法則，也可根据运动学得出。我們知道，普通平面上一个不变系的运动，在每个給定的瞬时，如同繞一个不动的点（瞬时中心）轉动，并且一般說来这个瞬时中心的位置随时在变。在圖 111 所示的情形中，滾动圓与不动圓的切点 N 是瞬时中心，于是点 M 运动的速度在沿这心臟綫的切綫方向，

① 在[80]中，这两条直綫是 KM 与 ON_1 (圖 99)。

这个切綫垂直于 MN，就是 MN 是这心臟綫的法綫，而它的垂綫 MN_1 是这心臟綫的切綫。由这观点来看，上述作切綫的法则，适用于較普遍的曲綫，只要这曲綫是当一个圓周在任何一条曲綫上滾时，圓周上一点画成的軌迹就成。

85. **卡西尼卵形綫与双紐綫** 設点 M 到两个定点 F_1 与 F_2 的距离的乘积是个常量：

$$\overline{F_1M}\cdot\overline{F_2M}=b^2,$$

这样的点 M 的几何軌迹叫做卡西尼卵形綫。

$\overline{F_1F_2}$ 的長度記作 $2a$，取 $\overline{F_1F}$ 所在直綫作極軸，綫段 $\overline{F_1F_2}$ 的中点作極点。

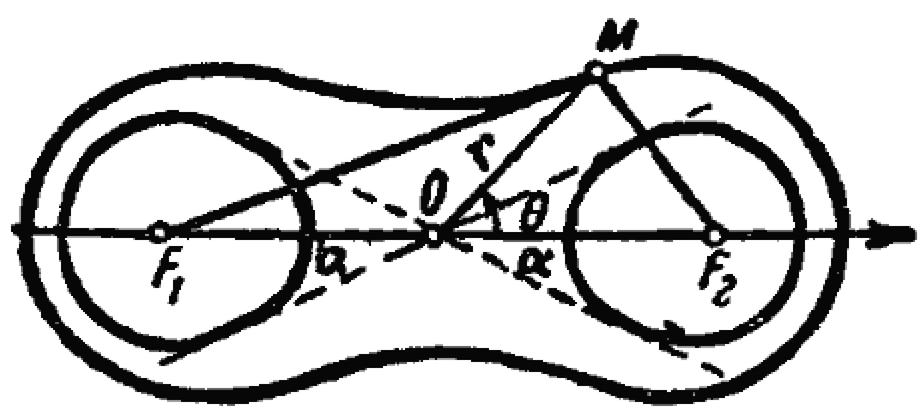


圖 112.

由三角形 OMF_1 与 OMF_2（圖 112）得到：

$$\overline{F_1M}^2=r^2+a^2+2ar\cos\theta,$$

$$\overline{F_2M}^2=r^2+a^2-2ar\cos\theta。$$

把这两个表达式代入上面的公式中，两边乘方，再經过初等变换，得到：

$$r^4-2a^2r^2\cos 2\theta+a^4-b^4=0,$$

由此：

$$r^2=a^2\cos 2\theta\pm\sqrt{a^4\cos^2 2\theta-(a^4-b^4)}。$$

圖 112 表示对应于 $a^2<b^2$ 与 $a^2>b^2$ 两种情形的圖形，并且第二个情形对应的曲綫是两个分开的封閉曲綫。我們只比較詳細地考虑一种最重要的情形，就是 $a^2=b^2$ 时；这时所对应的曲綫叫做双紐綫，它的方程是：

$$r^2=2a^2\cos 2\theta。$$

由这方程，只有当 $\cos 2\theta\geqslant 0$ 时，就是 θ 在

$$\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right],\ \left[\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right],\ \left[\frac{7}{4}\pi,\ 2\pi\right],$$

这些区間中的一个区間上时，r 才有实数值，并且当 $\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$ 时，r 等于零。

根据这些討論，不难作出曲綫（圖 113）。

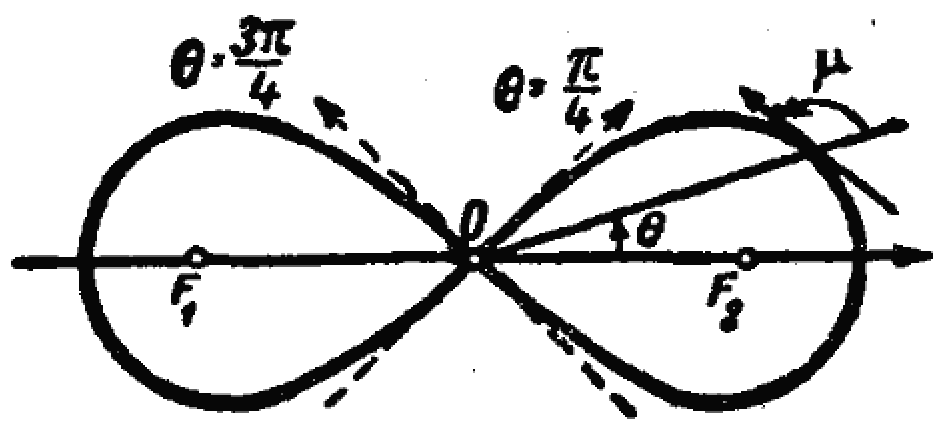


圖 113.

这曲綫在点 O 自交，虛綫表示曲綫的两支在交点 O 的切綫。求双紐綫的方程的两边对 θ 的导数，得到：

$$2rr' = -4a^2 \sin 2\theta$$

或
$$r' = -\frac{2a^2 \sin 2\theta}{r},$$

由此

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'} = -\frac{r^2}{2a^2 \sin 2\theta} = -\frac{2a^2 \cos 2\theta}{2a^2 \sin 2\theta} = -\operatorname{ctg} 2\theta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right),$$

$$\mu = \frac{\pi}{2} + 2\theta。$$

根据公式(39)，由極坐标化为直角坐标，就有：

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}。$$

双紐綫的方程可以写成：

$$r^2 = 2a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta);$$

把上面的表达式代入这表达式中，得到双紐綫在直角坐标的方程：

$$x^2 + y^2 = 2a^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

或

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

由此看出，双紐綫是一个四次代数曲綫。

第三章　积分概念及其应用

§8. 积分学的基本問題与不定积分

86. 不定积分概念　微分学的基本問題之一，是求給定函数的导数或微分。

积分学的第一个基本問題是一个相反的問題，就是求一个函数，使它有給定的导数或微分。

設給定一个未知函数 y 的导数

$$y'=f(x)$$

或微分
$$dy=f(x)dx。$$

若函数 $F(x)$ 以給定的函数 $f(x)$ 为导数，或以 $f(x)dx$ 为微分，則 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函数。

例如，若
$$f(x)=x^2,$$

則显然，$F(x)=\frac{1}{3}x^3$ 是一个原函数。

实际上，

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2。$$

設我們求出給定的函数 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$，它以 $f(x)$ 为导数，就是滿足关系式

$$F'(x)=f(x)。$$

因为任意一个常量 C 的导数等于零，我們也有：

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x),$$

就是，除了 $F(x)$ 之外，$F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数。

由此推知，若是一个求原函数的問題有一个解，則它就有无穷多个另外的解，这些解与所說的解只差一个任意常数項。还可以証明，这些解就是这个問題所有的解，就是：

若 $F(x)$ 是給定的函数 $f(x)$ 的任何一个原函数，則任何別的原函数具有形式：

$$F(x)+C,$$

其中 C 是一个任意常量。

实际上，設 $F_1(x)$ 是任意一个函数，以 $f(x)$ 为导数，于是：

$$F_1'(x)=f(x)。$$

另外，再考虑一个函数 $F(x)$，也以 $f(x)$ 为导数，于是：

$$F'(x)=f(x)。$$

由前一个等式减去这个等式，得到：

$$F_1'(x)-F'(x)=[F_1(x)-F(x)]'=0,$$

因此，根据已知的定理[**63**]：

$$F_1(x)-F(x)=C,$$

其中 C 是一个常量；于是証完。

这里得到的結果还可以写成：若两个函数的导数(或微分)恒等，則这两个函数只差一个常数項。

原函数的最一般表达式也叫做給定的函数 $f(x)$ 或給定的微分 $f(x)dx$ 的不定积分，記作

$$\int f(x)dx,$$

并且，函数 $f(x)$ 叫做被积函数，而 $f(x)dx$ 叫做被积表达式。

求出任何一个原函数 $F(x)$，根据以上所述，可以写成：

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

其中 C 是任意常量。

現在我們講不定积分的力学与几何的解釋。設有速度对于时間的

分析关系式:

$$v=f(t),$$

要求路程 s 对于时間的表达式。因为沿給定軌道运动的点的速度是路程对时間的导数 $\frac{ds}{dt}$，于是問題归結为求 $f(t)$ 的原函数，就是

$$s=\int f(t)\,dt。$$

我們得到，彼此相差一个常数項的无穷多个解。这个答案的不定性是由于我們沒有規定路程 s 由什么地方算起。例如：若 $v=gt+v_0$(等加速度运动)，則对于 s 我們得到表达式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C, \tag{1}$$

不难驗証，表达式(1)对 t 的导数与給定的表达式 $v=gt+v_0$ 全同。如果我們約定，路程 s 由 $t=0$ 时运动点所在的位置算起，就是，若当 $t=0$ 时，$s=0$；則我們应当在公式(1)中設常量 $C=0$。在上面的討論中，我們不用字母 x，而用 t 表示自变量。当然，这在实質上是沒有关系的。

現在来講求原函数的問題的几何解釋。关系式 $y'=f(x)$ 指明：求知原函数

$$y=F(x)$$

的圖形，或者說积分曲綫，是这样的曲綫，当 x 取任意一个値时，它的切綫有給定的斜率:

$$y'=f(x)。 \tag{2}$$

换句話說，就是，要求一条曲綫，当 x 取任意一个値时，这曲綫的切綫方向由关系式(2)給定。若作出一条这样的积分曲綫，則把它平行于 OY 軸任意移动一段时，如此得到的所有的曲綫，在 x 取同一个値时，有互相平行的切綫，与最

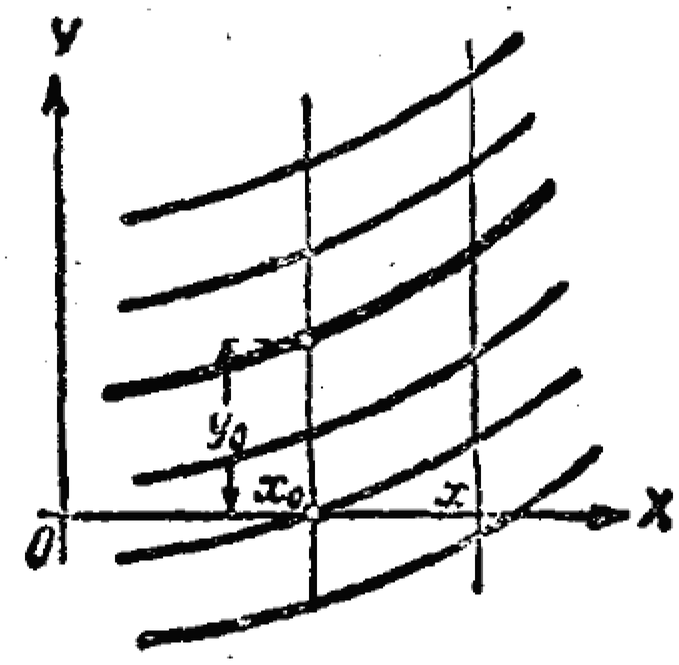


圖 114.

初的曲綫一样，斜率都是 $y'=f(x)$ (圖 114)。上述的平行移动相当于把常量 C 加到縱坐标上去，于是作为这个問題的答案的曲綫的一般方程就是：

$$y=F(x)+C。\tag{3}$$

为要完全确定未知积分曲綫的位置，亦就是未知原函数的表达式，应当給出这个积分曲綫必須經过的任何一个点，这样的点可以是它与任何一条平行于 OY 軸的直綫

$$x=x_0$$

的交点。这样給就相当于，当 $x=x_0$ 时，給定未知函数的初值 y_0，把这初值代入方程(3)中，就得到确定任意常量 C 的方程：

$$y_0=F(x_0)+C,$$

于是，滿足补充的初始条件的原函数就是：

$$y=F(x)+[y_0-F(x_0)]。$$

在講不定积分的性質与原函数的求法之前，我們先講积分学中第二个基本問題，以及它与上述第一个問題(求原函数的問題)的連系。以下講一个新的概念，就是定积分的概念。为要自然的引入这个新概念，我們由直觉的面积的表示法开始，并由此推出定积分概念与不定积分概念的連系。如此，下面两节中所用的理由，是以直觉的面积的表示法为基础，并不是这个新問題的严格的証明。邏輯上严格的建立积分学基础的方法，在[88]最后叙述。至于它的完整的理論，叙述在本章之末。

87. 定积分为和的極限 在平面 XOY 上画出函数 $f(x)$ 的圖形，并且我們認为这个圖形是一条整个在 OX 軸以上的連續曲綫，就是認为，这圖形所有的縱坐标都是正的。考虑界于 OX 軸，这个圖形，以及两个縱坐标 $x=a$, $x=b$ 之間的面积 S_{ab}(圖 115)，我們設法求出这塊面积。为此用点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_{n-1}<x_n=b，$$

把区間$[a, b]$分为n个部分。

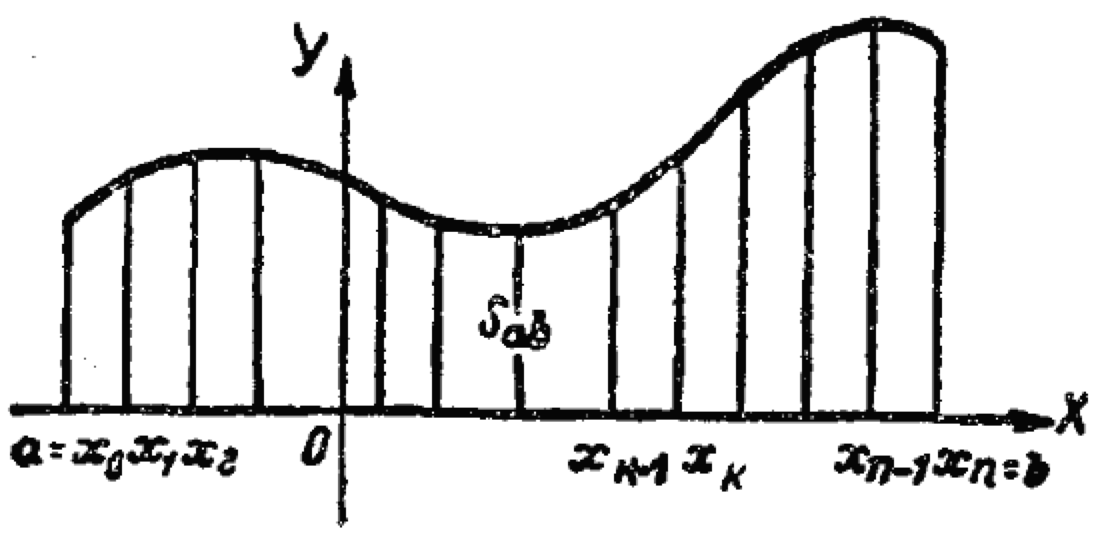


圖 115.

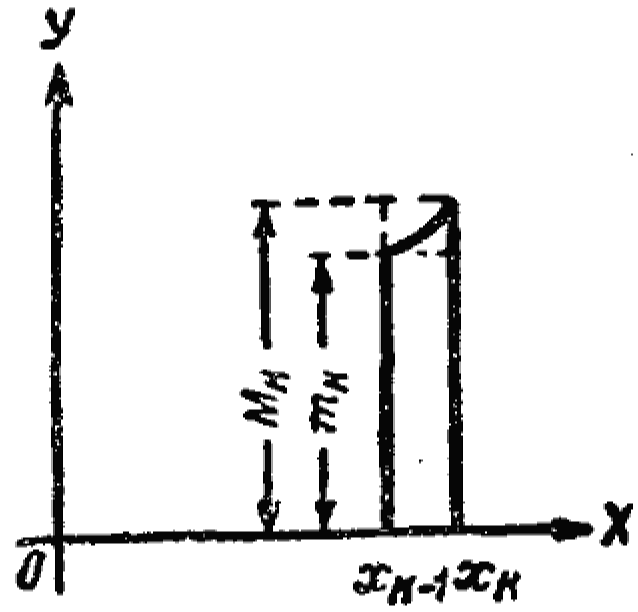


圖 116.

所考慮的面积S_{ab}就被分为n个竪条，第k条的底長是(x_k-x_{k-1})。用m_k与M_k各記函数$f(x)$在区間$[x_{k-1}, x_k]$上的最小値与最大値，就是，这圖形在这区間上的最小縱坐标与最大縱坐标。每一条的面积在两个矩形面积之間，这两个矩形都以$[x_k-x_{k-1}]$为底（圖 116），各以m_k与M_k为高。它們各为这一条的内接与外接矩形。如此，第k条面积的大小就在所述两个矩形面积，亦就是两个数

$$m_k(x_k-x_{k-1}) \text{ 与 } M_k(x_k-x_{k-1})$$

之間，所以，全部所考慮的面积S_{ab}，就在所有如上所述的内接矩形面积的和与外接矩形面积的和之間，就是S_{ab}在和：

$$\begin{aligned} s_n=&m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\cdots+m_k(x_k-x_{k-1})+\\ &+\cdots+m_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+m_n(b-x_{n-1}),\\ S_n=&M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_k(x_k-x_{k-1})+\\ &+\cdots+M_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+M_n(b-x_{n-1}) \end{aligned} \qquad (4)$$

之間。

如此，我們就有不等式：

$$s_n \leqslant S_{ab} \leqslant S_n\text{。} \qquad (5)$$

現在对于每一条，任意作一个中間矩形，以(x_k-x_{k-1})为底，以区間$[x_{k-1}, x_k]$上任何一点ξ_k对应的縱坐标$f(\xi_k)$为高（圖 117）。考慮这些中間矩形的面积的和：

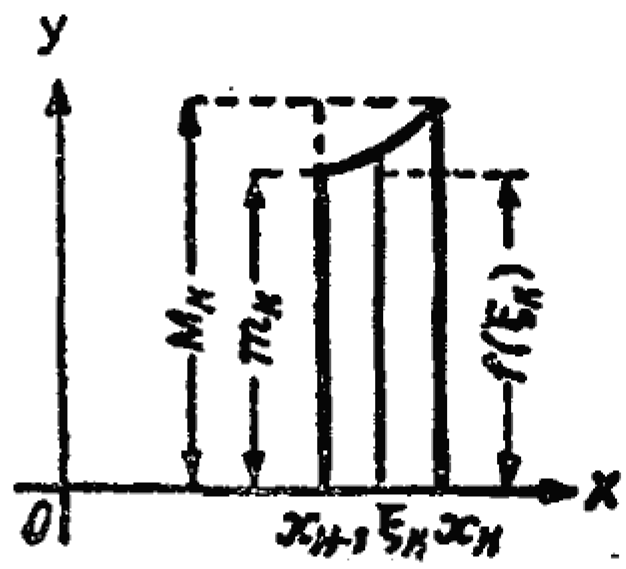


圖 117.

$$S'_n=f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+$$
$$+\cdots+f(\xi_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})+f(\xi_n)(b-x_{n-1})。\quad (6)$$

像面积 S_{ab} 一样，这个和也在内接矩形面积的和与外接矩形面积的和之間，就是，我們有不等式：

$$s_n\leqslant S'_n\leqslant S_n。\quad (7)$$

現在将区間分割的部分数 n 无限增加，并且使差 (x_k-x_{k-1}) 中最大的趋向零。因为由条件函数 $f(x)$ 是連續的，則当区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 之長无限减小时，函数 $f(x)$ 在这区間上的最大值与最小值之差 (M_k-m_k) 就趋向零，而与在整个区間 $[a, b]$ 上的位置无关(連續函数性質[**35**])。如此，若我們用 ε_n 表示差

$$(M_1-m_1), (M_2-m_2), \cdots, (M_k-m_k), \cdots, (M_{n-1}-m_{n-1}), (M_n-m_n)$$

中最大的数，則如上所述取極限时，ε_n 趋向零。現在我們确定外接矩形面积的和与内接矩形面积的和之差：

$$S_n-s_n=(M_1-m_1)(x_1-a)+(M_2-m_2)(x_2-x_1)+\cdots+$$
$$+(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})+\cdots+(M_n-m_n)(b-x_{n-1}),$$

由此，用 ε_n 替代所有的差 (M_k-m_k)，并注意所有的差 (x_k-x_{k-1}) 都是正的，于是：

$$S_n-s_n\leqslant\varepsilon_n(x_1-a)+\varepsilon_n(x_2-x_1)+\cdots+\varepsilon_n(x_k-x_{k-1})+\cdots+$$
$$+\varepsilon_n(b-x_{n-1}),$$

就是，

$$S_n-s_n\leqslant\varepsilon_n[(x_1-a)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_k-x_{k-1})+\cdots+(b-x_{n-1})]=$$
$$=\varepsilon_n(b-a)。$$

如此，我們可以写成：

$$0\leqslant S_n-s_n\leqslant\varepsilon_n(b-a),$$

就是

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-s_n)=0。\quad (8)$$

从另一方面看，对于任意的 n，我們有：

$$s_n \leqslant S_{ab} \leqslant S_n, \tag{9}$$

并且面积 S_{ab} 是一个确定的数。由公式(8)与(9)直接推知,面积 S_{ab} 这个量是 s_n 与 S_n 的共同極限:

$$\lim s_n = \lim S_n = S_{ab}。$$

从另一方面因为中間矩形的面积的和 S'_n 在 s_n 与 S_n 之間,于是它也应当趋向面积 S_{ab},就是

$$\lim S'_n = S_{ab}。$$

这个和 S'_n 与 s_n 及 S_n 比較起来更为普遍些,因为这时我們可以在区間$[x_{k-1}, x_k]$上任意选擇 ξ_k,特别是可以取 $f(\xi_k)$ 等于最小縱坐标 m_k 或最大縱坐标 M_k。

这样选擇的話,和 S'_n 就成为和 s_n 或 S_n。

由以上的考虑,我們得到:

若函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續,我們用点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区間$[a, b]$分为 n 部分,并且用 $x=\xi_k$ 記区間$[x_{k-1}, x_k]$上任何一个值,算出对应的函数值 $f(\xi_k)$,再作和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\text{①}, \tag{10}$$

則当区間分割的部分数 n 无限增加,而差$(x_k - x_{k-1})$中最大的无限减小时,这个和趋向一个确定的極限。这个極限等于,以 OX 軸,函数 $f(x)$ 的圖形与两个縱坐标 $x=a$, $x=b$ 为界的面积。

上述的極限叫做函数 $f(x)$ 在下限 $x=a$ 与上限 $x=b$ 之間对自变量 x 所取的定积分,并且記作:

$$\int_a^b f(x)\,dx。$$

注意,当差$(x_k - x_{k-1})$中最大的无限减小时,和(10)的極限 I 存在

① 符号 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 是和(6)的简單記法。

这件事，可归結为如下的断語：当任意給定正数 ε 时，就有这样的正数 δ 存在，使得，当所有的(正的)差 $(x_k-x_{k-1})<\delta$，而 ξ_k 是区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 上任何一点时，

$$\left|I-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right|<\varepsilon。$$

这个極限 I 就是定积分。

以上我們假設函数 $f(x)$ 的圖形整个在 OX 軸之上，就是这圖形所有的縱坐标都是正的。現在考慮一般的情形，就是这圖形的某些部分在 OX 軸之上，而其他部分在 OX 軸之下的情形(圖 118)。

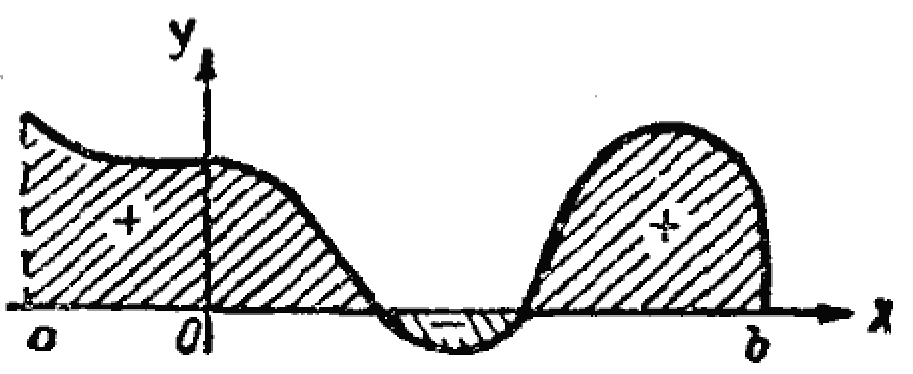


圖 118.

若在这情形下，我們作出和(6)，則对应于在 OX 軸之下的一部分圖形，得到的項 $f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ 就是負的，因为差 (x_k-x_{k-1}) 是正的，而縱坐标 $f(\xi_k)$ 是負的。

这时取極限，得到的定积分，是这样的总面积，其中 OX 軸上的面积算正的，OX 軸下的算負的，就是，在一般情形下，定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

給出界于 OX 軸，函数 $f(x)$ 的圖形与縱坐标 $x=a$, $x=b$ 之間的面积的代数和。这时，在 OX 軸之上的面积取正号，在 OX 軸之下的取負号。

以后我們将看到，不仅是在算面积的問題中要求像(6)这种和的極限，而是在很多的，各种各样的自然科学的問題中，都会出現。現在看一个例。設点 M 在 OX 軸上由横坐标 $x=a$ 运动到 $x=b$，并且有一个沿 OX 軸方向的力 T 作用在这点上。若力 T 是个常量，則当点 M 由 $x=a$ 的位置运动到 $x=b$ 的位置时，这个力所作的功由乘积 $R=T(b-a)$ 确定，就是力与点所經过的路程的乘积。若力 T 是个变量，則上面这公式就不能用了。現在設力的大小依賴于点在 OX 軸上的位

置，就是説它是点的横坐标的函数 $T=f(x)$。

为要在这情形下計算功，把点所經过的全部路程分作若干段：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

且考虑其中的一段 $[x_{k-1}, x_k]$。当这点由 x_{k-1} 到 x_k 时，我們可以認为作用在这点上的力是个常量，并且它等于在区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 上某一点 ξ_k 的力的値 $f(\xi_k)$。所以在 $[x_{k-1}, x_k]$ 这一段上，我們得到功的近似表达式：

$$R_k\sim f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

于是对于全部所作的功，我們就有近似表达式：

$$R\sim\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})。$$

当数目 n 无限增加而差 (x_k-x_{k-1}) 中最大的无限减小时，取極限，我們得到一个定积分，它給出所求的功的准确值：

$$R=\int_a^b f(x)\,dx。$$

由上述几何学的或力学的解释抽象化，于是可以建立函数 $f(x)$ 在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的定积分的概念，就是像(6)这样的和的極限。积分学的第二个基本問題是研究定积分的性質以及它的計算。若 $f(x)$ 是給定的函数，$x=a$ 与 $x=b$ 是給定的两个数，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

是一个确定的数。記号 $\int$ 是字母 S 的变形，借以指出定积分是由一个和取極限而来的。被积表达式 $f(x)dx$ 借以指出这个和的每一項的形式是 $f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$。定积分記号下的字母 x 平常叫做积分变量。关于这个字母，我們还要提出下面一点。我們已經說过，定积分的值是一个确定的数，自然并不依赖于积分变量的記号 x，所以我們在定积分中，可以用任何一个字母記积分变量。显然，这对于积分的値沒有影响。积分的值只依赖于 $f(x)$ 的圖形的縱坐标与积分限 a, b。所以，自

变量的記法可以随意,例如:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt。$$

积分学的第二个問題——定积分的計算——表面上看是一个很复杂的問題,要作出像(6)那样的和,再取極限,取这極限时,上述的和的項数无限增加,而每一項都趋向零。此外,表面上看,积分学的第二个問題与第一个問題(求給定函数$f(x)$的原函数)沒有什么关系。

在下节中,我們要說明,这两个問題彼此紧密的連系着,若是知道$f(x)$的原函数,則定积分$\int_a^b f(x)dx$的計算就非常簡單。

88. 定积分与不定积分的連系 我們再考虑界于OX軸,函数$f(x)$的圖形与縱坐标$x=a$, $x=b$之間的面积S_{ab}。与这面积一起我們考虑它界于左边的縱坐标$x=a$与一个可移动的縱坐标之間的一部分,这个可移动的縱坐标对应于可变的值x(圖119)。这面积S_{ax}的大小,显然依賴于右边的縱坐标的位置,就是,它是x的一个函数。这个量就要表示成函数$f(x)$由下限a到上限x的定积分。因为現在字母x用作上限,为避免相混,我們用另一个字母,例如t,記积分变量。如此,我們可以写成:

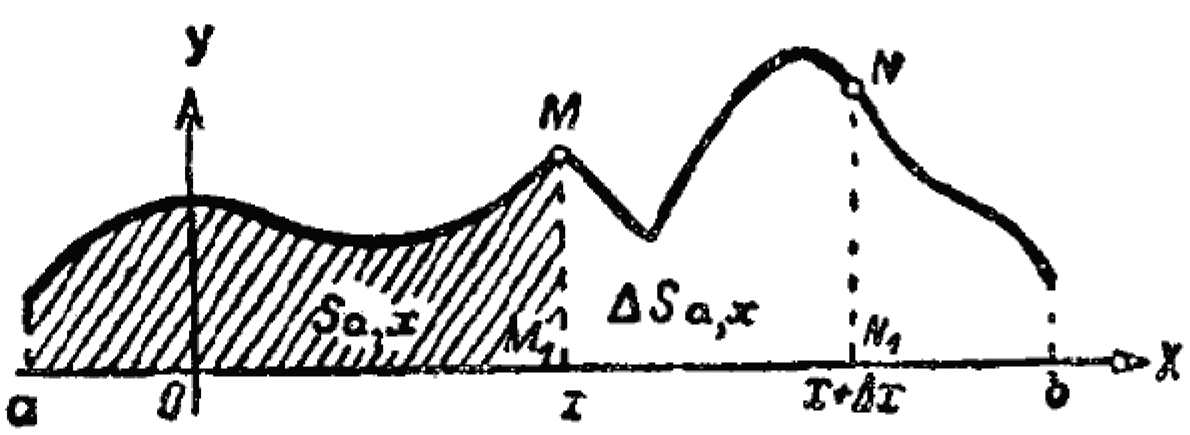


圖 119.

$$S_{ax}=\int_a^x f(t)dt。\tag{11}$$

这里我們得到一个有可变上限的定积分,显然,它所代表的量是这上限的一个函数。現在証明这个函数是$f(x)$的一个原函数。为要計算这个函数的导数,我們先考虑,对应于自变量x的改变量Δx,这函数的改变量ΔS_{ax}是什么。显然:

$$\Delta S_{ax}=\text{面积 } M_1MNN_1。$$

把函数 $f(x)$ 的圖形在区間 $[x, x+\Delta x]$ 上的最小縱坐标与最大縱坐标各記作 m 与 M。圖 120 上用較大尺度画出 M_1MNN_1 的形状，它整个位于以 M 为高以 Δx 为底的矩形之內，而把以 m 为高以 Δx 为底的矩形包含在內，所以

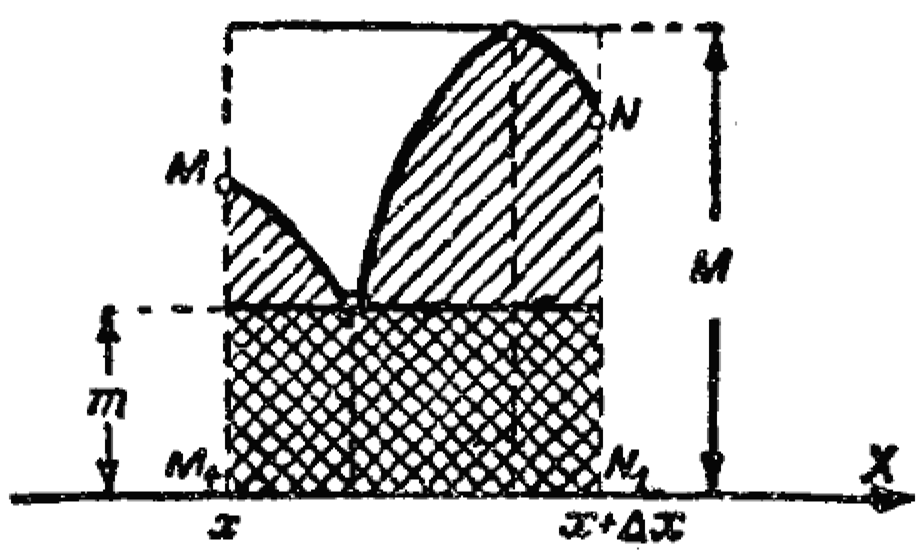


圖 120.

$$m\Delta x \leqslant \Delta S_{ax} \leqslant M\Delta x,$$

或，用 Δx 除：

$$m\leqslant \frac{\Delta S_{ax}}{\Delta x}\leqslant M。$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，根据函数 $f(x)$ 的連續性，m 与 M 这两个量趋向一个共同的極限——縱坐标 $M_1M=f(x)$ 在点 x 的值，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S_{ax}}{\Delta x}=f(x),$$

这就是我們要証明的。这里得到的結果可以敘述如下：有可变上限的定积分

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

是这上限的函数，它对这上限的导数等于被积函数 $f(x)$。換句話說，有可变上限的定积分是被积函数的一个原函数。

已經建立了定积分与不定积分的連系，我們現在講，若是知道了 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$，如何可以計算出定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

的值。我們已經說明，有可变上限的定积分也是 $f(x)$ 的一个原函数，根据[86]，我們可以写成：

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C, \tag{12}$$

其中 C 是一个常量。为要确定这个常量，我們注意，当面积 S_{ax} 右边的縱坐标与左边的重合时，就是 $x=a$ 时，則显然面积值为零，就是，当 $x=a$ 时，公式(12)的左边等于零。于是推知：

$$0=F(a)+C \text{ 就是 } C=-F(a)。$$

把求出的 C 的值代入(12)中，得到：

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)。$$

最后，設 $x=b$，就有：

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a) \quad \text{或} \quad \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)。 \tag{13}$$

如此，我們得到下面这个通过原函数的值表达定积分值的基本法則：定积分值，等于被积函数的一个原函数在积分上限与下限的值之差。

上述的法則說明，解决了积分学中第一个問題也就解决了第二个問題，就是求出原函数就可以計算出定积分，如此，我們計算定积分时，就不必再作复杂的求和与取極限的演算了。

例如：求定积分

$$\int_0^1 x^2dx。$$

$\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数[86]。

应用我們的法則，就有①

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}。$$

若是我們不用原函数，而直接由定积分为和的極限的定义来計算它，計算就复杂得多。用点：

$$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$$

① 記号 $\varphi(x)\Big|_a^b$ 記差$[\varphi(b)-\varphi(a)]$。

把区間[0, 1]分为 n 等分。如此，我們就有 n 个区間：

$$\left[0,\ \frac{1}{n}\right],\ \left[\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right],\ \left[\frac{2}{n},\ \frac{3}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},1\right],$$

其中每个的長都等于 $\frac{1}{n}$。作和(6)时，取每个区間的左端作 ξ_k，就是，

$$\xi_1=0,\ \xi_2=\frac{1}{n},\ \xi_3=\frac{2}{n},\ \cdots,\ \xi_n=\frac{n-1}{n}。$$

所有的差 $x_k-x_{k-1}=\frac{1}{n}$，注意被积函数 $f(x)=x^2$ 在每个区間左端的值是：

$$f(\xi_1)=0,\ f(\xi_2)=\frac{1}{n^2},\ f(\xi_3)=\frac{2^2}{n^2},\ \cdots,\ f(\xi_n)=\frac{(n-1)^2}{n^2},$$

我們可以写成：

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\left[0\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}。\tag{14}$$

为要算分子中的和，写出一列很明显的等式：

$$(1+1)^3=1+3\cdot1+3\cdot1^2+1^3$$
$$(1+2)^3=1+3\cdot2+3\cdot2^2+2^3$$
$$(1+3)^3=1+3\cdot3+3\cdot3^2+3^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[1+(n-1)]^3=1+3(n-1)+3(n-1)^2+(n-1)^3。$$

逐項相加，得到

$$2^3+3^3+\cdots+n^3=(n-1)+3[1+2+\cdots+(n-1)]+$$
$$+3[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]+1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3。$$

消去等式两边的相同項，再取等差級数的和，可以写成：

$$n^3=(n-1)+3\frac{n(n-1)}{2}+3[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]+1,$$

由此，

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{n^3-n}{3}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}。$$

把所得的表达式代入(14)中，得到：

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}。$$

弄清楚了积分学的基本問題以及它們之間的关系之后，我們以下

开始考虑积分学的第一个問題，就是，闡明不定积分的性質以及它的求法的問題。

上面我們关于定积分的討論，完全是根据几何的理由，就是考虑面积 S_{ab} 与 S_{ax}。特别是在証明基本命題，和証明（6）有極限时，是根据任意連續曲綫有确定的面积 S_{ab} 的假定的。这样的假定虽然明显，但它不是严格的論証。这問題的严格的分析方法是这样的：不根据几何的解释，直接用分析方法証明，和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

的極限 S 存在，以后再取它作为面积 S_{ab} 的定义。我們在本章之末再介紹这个証明，并且对于函数 $f(x)$ 作比連續性更一般的假定。

还要提出，以上我們說过：当被积函数連續时，定积分对上限的导数，等于被积函数（在上限的値）。說明这个基本命題时，几何解释是重要的因素。在本章的下一节中，我們再講这个命題的严格的分析的証明。由这个命題，以及連續函数的定积分的存在性，就可以肯定任何連續函数必有原函数，就是，有不定积分。以下我們講不定积分的基本性質，且只限于討論連續函数的不定积分。

在叙述定积分的性質时，我們再严格的証明基本公式(13)。如此，就只剩下，对于連續函数，和(10)的極限存在，这一件事还沒有証明。上面說过，这个我們留在本章之末再証。

89. 不定积分的性質 在[86]中，我們看到，同一函数的两个原函数只差一个常数項。这是不定积分的第一个性質。

I. 若两个函数或两个微分恒等，則它們的不定积分只能差一个常数項。

反之，若要驗証两个函数只差一个常数項，只須証明它們的导数(或微分)恒等。

下面的性質 II 与 III，可以直接由不定积分为原函数的概念直接

推出。也就是:可由不定积分

$$\int f(x)\,dx$$

是这样一个函数,它对 x 的导数等于被积函数 $f(x)$,或者説,它的微分等于被积表达式 $f(x)dx$ 而直接推出。

II. 不定积分的导数等于被积函数,而它的微分等于被积表达式:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x);\quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx。\tag{15}$$

III. 与(15)一起,我們还有:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

由[**50**],这个公式还可以写成:

$$\int dF(x) = F(x) + C,\tag{16}$$

由此,与特性 II 連合起来,得到:若弃去不定积分等式中的任意常数项,则当符号 $\int$ 与 d 紧接着时,无論那个在前,那个在后,可以消掉。

IV. 常因子可以由积分号下提出来:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx + C^{①}。\tag{17}$$

V. 代数和的积分等于各项积分的代数和:

$$\int (u+v-w+\cdots)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx + \cdots + C。\tag{18}$$

公式(17)与(18)的正确性不难証明,只要求出两边的导数,由于所得到的导数恒等,就可以相信它們成立。例如:对于等式(17):

$$\left(\int Af(x)\,dx\right)' = Af(x),$$

$$\left(A\int f(x)\,dx + C\right)' = A\left(\int f(x)\,dx\right)' = Af(x)。$$

---

① 有时后面的任意常数项,了解作包含在不定积分中。这时,等式(17)就是

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx。$$

90. 最簡积分表 由最簡导数公式表,倒轉順序,就可以得到下面这表:

$$\int dx = x + C,$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \qquad (m \neq -1),$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C。$$

若要証明这个表中的公式成立,只要断定右边的导数与左边的被积函数恒等就成了。一般来講,如果知道了一个函数的导数是給定的函数,就得到这个給定的函数的不定积分。但是一般情形下,縱然給定的函数很簡單,在导数表中也不見得找得到;于是,积分学的問題比微分学的問題困难得多。所有的工作,在于設法变换給定的积分,使得成为最簡表中所含有的形狀。

积分的变换需要練習純熟,应用以下所講的积分学的基本法則,作起来可以容易些。

91. 分部积分法則 我們知道,若 u, v 是 x 的任何两个具有連續导数的函数,则[**50**]:

$$d(uv) = udv + vdu, \quad \text{或} \quad udv = d(uv) - vdu。$$

根据性質 I, V 与 III, 由此我們推出:

$$\int u\,dv = \int [d(uv) - v\,du] + C = \int d(uv) - \int v\,du + C =$$
$$= uv - \int v\,du + C,$$

于是給出分部积分法的公式：

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C_{\circ} \tag{19}$$

它把积分$\int u\,dv$的計算化为$\int v\,du$的計算，希望后者可以比較簡單些。

例

1. $\int \log x\,dx$

此处設　　$u=\log x,\quad dx=dv,$

首先有：　　$du=\dfrac{dx}{x},\quad v=x;$

由此，根据(19)：

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{dx}{x} + C = x\log x - x + C_{\circ}$$

实际計算时，特定的变换不必写出来，只要都想着就成了。

2. $\int e^x x^2\,dx = \int x^2\cdot e^x\,dx = \int x^2 de^x = x^2e^x - \int e^x dx^2 =$

$$= x^2e^x - 2\int e^x\,x\,dx,$$

$$\int e^x\,x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x,$$

最后給出，　　$\int e^x x^2 dx = e^x[x^2 - 2x + 2] + C_{\circ}$

3. $\int \sin x\cdot x^3 dx = \int x^3\cdot\sin x\,dx = \int x^3 d(-\cos x) =$

$$= -x^3\cos x - \int(-\cos x)\,dx^3 = -x^3\cos x + 3\int x^2\cdot\cos x\,dx =$$

$$= -x^3\cos x + 3\int x^2 d\sin x = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 3\int \sin x\,dx^2 =$$

$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x\sin x\,dx =$$

$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x d(-\cos x) =$$

$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\int \cos x\,dx =$$

$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C_{\circ}$$

这些例中所講的方法,可以普遍用来計算下面这种样子的积分:

$$\int \log x \cdot x^m dx, \quad \int e^{ax} \cdot x^m dx, \quad \int \sin bx \cdot x^m dx, \quad \int \cos bx \cdot x^m dx,$$

其中 m 是任何的正整数;只要注意,当繼續变换时,要使 x 的幂次降低直到 x^0 为止。

92. 換元法則。例 有时引用新的变量 t 替代 x,可以把积分 $\int f(x)dx$ 化簡,設

$$x=\varphi(t)。 \tag{20}$$

为要依照公式(20),把不定积分的积分变量換为新的变量 t,只須把被积表达式变换成用新的变量 t 来表达:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt+C。 \tag{21}$$

根据性質 I [**89**],我們只要証明公式(21)左右两边的微分全同。取微分,得到:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx=f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

$$d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt。$$

有时,反过来用:

$$t=\psi(x), \quad \psi'(x)dx=dt$$

来代替代换(20)。

例

1. $\int (ax+b)^m dx \quad (m \neq -1)$。

为要簡化这积分,設

$$ax+b=t, \quad a\,dx=dt, \quad dx=\frac{dt}{a}。$$

代入到所給的积分中,得到:

$$\int (ax+b)^m dx=\frac{1}{a}\int t^m dt=\frac{1}{a}\frac{t^{m+1}}{m+1}+C=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1}+C。$$

2. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\log t+C=\frac{\log(ax+b)}{a}+C$。

3. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$

$$\left(代入\ t=\frac{x}{a}\right)。$$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$。

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$。

为要計算这个积分，要用尤拉的替换，我們仔細叙述如下。由公式：

$$\sqrt{x^2+a}=t-x;\quad t=x+\sqrt{x^2+a},$$

引入新变量 t。

为要确定 x 与 dx，我們取乘方

$$x^2+a=t^2-2tx+x^2,\quad x=\frac{t^2-a}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a}{t}\right),$$

$$\sqrt{x^2+a}=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t},\quad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\,\frac{t^2+a}{t^2}\,dt。$$

把这些代入所給的积分中，就有：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{2t}{t^2+a}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+a}{t^2}\,dt=\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\log t+C=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C。$$

6. 积分 $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}$$

要用一个我們以后将詳細介紹的特殊方法計算，这个方法是分解被积函数成部分分式。

分解被积函数的分母成因式乘积：

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a),$$

把它化成部分分式和的样子：

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}。$$

为要确定 A 与 B，通分母，得到恒等式：

$$1=A(x+a)+B(x-a)=(A+B)x+a(A-B),$$

当x取任意的值时，这个恒等式总成立。于是A与B应当由条件

$$a(A-B)=1,\quad A+B=0$$

确定，所以
$$A=-B=\frac{1}{2a}。$$

最后得到：

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right],$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}[\log(x-a)-\log(x+a)]+C=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+C。$$

7. 对于更一般形式

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx$$

的积分，如果把被积函数的分母配方，可以化成前面作过的形式。我們有：

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}。$$

再設：
$$x+\frac{p}{2}=t,\quad x=t-\frac{p}{2},\quad dx=dt,$$

于是：
$$mx+n=m\left(t-\frac{p}{2}\right)+n=At+B,$$

其中我們假設 $A=m,\ B=n-\dfrac{mp}{2}$。

最后，假設

$$q-\frac{p^2}{4}=\pm a^2,$$

其中应当取(+)号或(−)号，依賴于这等式左边的符号，而a总算作是正的；于是我們可以把所給的积分写成：

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{At+B}{t^2\pm a^2}\,dt=A\int\frac{t\,dt}{t^2\pm a^2}+B\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}。$$

这里第一个积分立即可以計算，如果設：

$$t^2\pm a^2=z;\quad 2tdt=dz,$$

則：

$$\int\frac{t\,dt}{t^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\log z=\frac{1}{2}\log(t^2\pm a^2)。$$

第二个积分，我們在例3(+)与例6(−)中已經作过。

8．形为

$$\int\frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$$

的积分像前一个一样，用配方的方法，然后分为两部分。我們用例 7 中的記法，所給的积分可以写成：

$$\int\frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx=\int\frac{At+B}{\sqrt{t^2+b}}\,dt=$$

$$=A\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+b}}+B\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+b}}\quad\left(b=\pm a^2=q-\frac{p^2}{4}\right)。$$

这里第一个积分可以用换元法計算，設

$$t^2+b=z^2,\quad 2t\,dt=2z\,dz,$$

则

$$\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+b}}=\int\frac{z\,dz}{z}=\int dz=z=\sqrt{t^2+b}。$$

第二个积分已經在例 5 中解出，等于 $\log(t+\sqrt{t^2+b})$。

9．类似的可用配方的方法把积分：

$$\int\frac{mx+n}{\sqrt{q+px-x^2}}\,dx$$

先化成：

$$A_1\int\frac{t\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}+B_1\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}},$$

利用代换 $a^2-t^2=z^2$，就有：

$$\int\frac{t\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=-\sqrt{a^2-t^2}+C。$$

第二个积分在例 4 中已經解出。

10．$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C。$$

$$\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C。$$

11．积分

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx$$

可以用分部积分法作：

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int x\cdot d\sqrt{x^2+a} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx。$$

在最后的积分中被积函数的分子加减 a，就可以写成：

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int\sqrt{x^2+a}\,dx + a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

或

$$2\int\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} + a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

由此最后得到：

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+a} + a\log(x+\sqrt{x^2+a})] + C。$$

93. 一阶微分方程的例 在[51]中我們考慮过最簡單的微分方程。一阶微分方程的最一般形状是：

$$F(x, y, y') = 0。$$

这是，联系自变量 x，未知函数 y 以及 y 的导数 y' 的关系式。平常可以由这方程解出 y'，于是写成：

$$y' = f(x, y),$$

其中 $f(x, y)$ 是 x 与 y 的已知函数。

我們現在不考虑这方程的一般情形，这留到本書第二卷再講，現在只講几个簡單的例。

可分离变量的方程——这时函数 $f(x, y)$ 可以表示成两个函数的比的样子，其中一个只依賴于 x，另一个只依賴于 y：

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}。\tag{22}$$

因为 $y' = \frac{dy}{dx}$，这个方程可以写成

$$\psi(y)\,dy = \varphi(x)\,dx,$$

于是方程的一边只有 x 出現，另一边只有 y 出現。这样作法叫做分离变量。因为

$$\psi(y)\,dy = d\int\psi(y)\,dy,\quad \varphi(x)\,dx = d\int\varphi(x)\,dx,$$

根据性質 I[89]，得到：

$$\int\psi(y)\,dy = \int\varphi(x)\,dx + C,\tag{23}$$

由此，作出积分，可以确定未知函数 y。

例 1. 一級化学反应 若用 a 表示反应剛开始时物質的量，而 x 表示在瞬时 t 已經起反应的物質的量，我們就有[51]方程：

$$\frac{dx}{dt}=c(a-x), \tag{24}$$

其中 c 是反应常量。此时我們有条件：

$$x|_{t=0}=0。 \tag{25}$$

分离变量，得到：

$$\frac{dx}{a-x}=c\,dt,$$

或者求积分：

$$\int\frac{dx}{a-x}=\int c\,dt+C_1, \quad -\log(a-x)=ct+C_1,$$

其中 C_1 是个任意常量。由此得到：

$$a-x=e^{-ct-C_1}=Ce^{-ct},$$

其中 $C=e^{-C_1}$，也是一个任意常量。它可以由条件(25)确定，根据上面的等式，当 $t=0$ 时，得到 $a=C$；于是最后得到：

$$x=a(1-e^{-ct})。$$

2. 二級化学反应 設在一种溶液中，有两种物質，在反应开始时，两种物質的量，用克分子来表达，各为 a 与 b。再設在瞬时 t，两种物質已經起反应的量相等，我們記作 x，于是剩余的量就是 $a-x$ 与 $b-x$。

由二級化学反应的基本定律，反应进行的速率与这些剩余量的乘积成正比，就是

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)。$$

現在要解这个方程，配合以初始条件

$$x|_{t=0}=0。$$

分离变量，就有：

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=k\,dt,$$

或者求积分，

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=kt+C_1, \tag{26}$$

其中 C_1 是个任意常量。

为要計算左边的积分，我們用分解部分分式的方法(例 6)[92]：

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x},$$

$$1=A(b-x)+B(a-x)=-(A+B)x+(Ab+Ba),$$

于是：

$$-(A+B)=0,\quad Ab+Ba=1,$$

由此

$$A=-B=\frac{1}{b-a},$$

所以

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\frac{1}{b-a}\left[\int\frac{dx}{a-x}-\int\frac{dx}{b-x}\right]=\frac{1}{b-a}\log\frac{b-x}{a-x}。$$

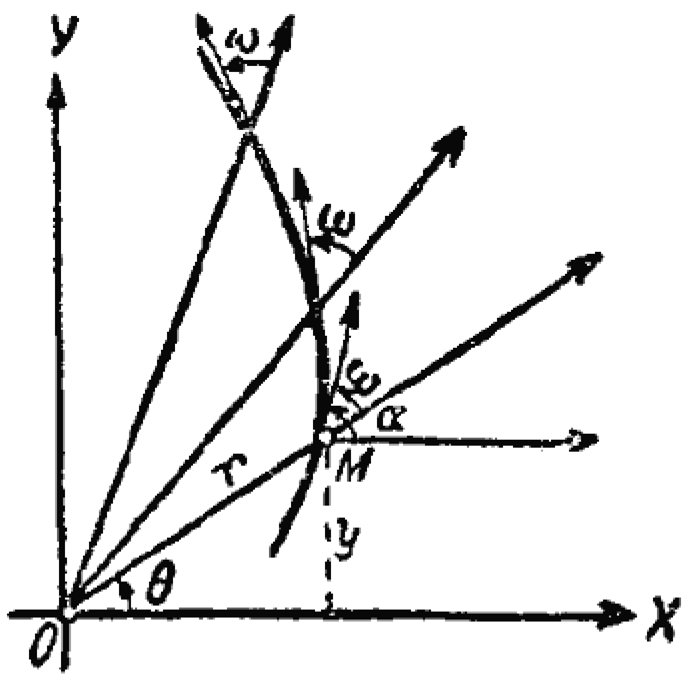


圖 121.

代入 (26) 中，就有：

$$\log\frac{b-x}{a-x}=(b-a)kt+(b-a)C_1,$$

$$\frac{b-x}{a-x}=Ce^{(b-a)kt},$$

其中 $C=e^{(b-a)C_1}$。

于是，沒有任何困难，就可以确定出未知函数 x。

請讀者自已解 $a=b$ 的特殊情形，在这种情形下，上面的公式失去意义。

3. 求与矢徑交成定角的所有的曲綫①(圖 121)。

設 $M(x, y)$ 是未知曲綫上一点。由圖就有：

$$\omega=\alpha-\theta,$$

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}=\frac{y'-\frac{y}{x}}{1+y'\frac{y}{x}}。$$

为計算方便起見，記作

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{1}{a},$$

通分母，把得到的微分方程写成：

$$x+yy'=a(y'x-y),$$

或，两边乘以 dx：

$$x\,dx+y\,dy=a(x\,dy-y\,dx)。\tag{27}$$

若取 OX 軸作極軸，坐标原点 O 作極点，由直角坐标 x, y 化为極坐标 r, θ，这

① 在两条曲綫的交点，它們的切綫的交角，普通叫做这两条曲綫的交角。

个方程就很容易积分。由[82]：

$$x^2+y^2=r^2,\quad \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

于是：

$$x\,dx+y\,dy=r\,dr,\ d\theta=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,d\,\frac{y}{x}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}。$$

方程(27)就可以写成下面的样子：

$$r\,dr=ar^2d\theta \quad 或 \quad \frac{dr}{r}=a\,d\theta,$$

求积分，就有：

$$\log r=a\theta+C_1,\ r=Ce^{a\theta},\ 其中\ C=e^{C_1}。$$

这里所得到的曲綫叫做对数螺綫[83]。

§9. 定积分的性質

94. 定积分的基本性質 我們講过，定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

是和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \quad (x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k) \tag{2}$$

的極限。

这里我們算作 $a<b$，于是，$x_{k-1}<x_k$。

若 $a>b$，则定积分（1），仍可以像以前一样，定义为和（2）的極限，不过这时只是：

$$a=x_0>x_1>x_2>\cdots>x_{k-1}>x_k>\cdots>x_{n-1}>x_n=b,$$

就是所有的差 x_k-x_{k-1} 都是負的。若顛倒上下限 a 与 b，就是把 a 算作上限，b 算作下限，则中間分点 x_k 須要算作依照相反的順序，于是和（2）中所有的差 (x_k-x_{k-1}) 变号，因此这个和以及它的極限也变号，就是

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx。 \tag{3}$$

此外，由于定积分可以解释作面积，自然算作

$$\int_a^a f(x)\,dx=0。\qquad (4)$$

还要提出一个等式：

$$\int_a^b dx=b-a。\qquad (5)$$

实际上，这时，对于所有 x 的值，被积函数等于 1，则

$$\int_a^b dx=\lim[(x_1-a)+(x_2-x_1)+\cdots+$$
$$+(x_{n-1}-x_{n-2})+(b-x_{n-1})],$$

但是方括号內是一个常量 $b-a$。显然，表达式(5)，給出以 $b-a$ 为底，高等于 1 的矩形的面积[**87**]。

現在列举定积分的性質如下，由以上所述，我們可以直接写出前三个性質：

I. 上下限相同的定积分等于零。

II. 顚倒定积分的上下限时，絕对值保持不变，只是变号：

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx。$$

当 $a<b$ 时，应用这个性質可以計算由 b 到 a 的定积分，自然，右边的积分算作存在。

III. 定积分的值不依賴于积分变量的記号：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt。$$

这个在[**87**]中已經講过。

以后，如果不特別提出，我們考虑的函数算作在积分区間上是連續的。

IV. 若有一列数

$$a,\ b,\ c,\ \cdots,\ k,\ l,$$

依任何順序排列，則

$$\int_a^l f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx+\cdots+\int_k^l f(x)\,dx。\qquad (6)$$

我們只証明有三个数 a, b, c 的情形，这个証明不难推广到任意多个数的情形。

先設 $a<b<c$。由定义推知

$$\int_a^c f(x)\,dx=\lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

并且无論把区間 $[a, c]$ 怎样分法，只要差 (x_i-x_{i-1}) 中最大的趋向零，而数目 n 无限增加，所得的極限是一样的。我們可以把区間 $[a, c]$ 这样分，使得每次点 b 都是一个分点。这时和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

就可以分作两組，一組把区間 (a, b) 分成若干部分，另一組把区間 (b, c) 分成若干部分，并且这两組的部分数都无限增加，而差 (x_i-x_{i-1}) 中最大的趋向零。这两組和各自趋向

$$\int_a^b f(x)\,dx,\quad \int_b^c f(x)\,dx,$$

最后得到：

$$\int_a^c f(x)\,dx=\lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx,$$

于是証完。

現在設 b 在区間 $[a, c]$ 之外，例如 $a<c<b$，由上面的証明，可以写成：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

由此

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx。$$

但是，根据性質 II 我們有：

$$-\int_c^b f(x)\,dx=\int_b^c f(x)\,dx,$$

就是

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx。$$

类似的可以考虑这些点的其他排列情形。

V. 常因子可以由定积分号下提出来，就是

$$\int_a^b Af(x)\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx,$$

因为

$$\int_a^b Af(x)\,dx=\lim\sum_{i=1}^n Af(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=$$

$$=A\lim\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=A\int_a^b f(x)\,dx。$$

VI. 代数和的定积分等于每項的定积分的代数和，因为，例如：

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]\,dx=\lim\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)-\varphi(\xi_i)](x_i-x_{i-1})=$$

$$=\lim\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\lim\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\,dx。$$

95. 中值定理 VII. 若在区間$[a,b]$上，函数$f(x)$与$\varphi(x)$满足条件

$$f(x)\leqslant\varphi(x),\tag{7}$$

则

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b \varphi(x)\,dx\quad(b>a),\tag{8}$$

簡單来講，就是說不等式积分后保持不等。

作出差

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b [\varphi(x)-f(x)]\,dx=$$

$$=\lim\sum_{i=1}^n [\varphi(\xi_i)-f(\xi_i)](x_i-x_{i-1})。$$

根据不等式(7)，这个和中每一項都是正的，或者說，至少不是負的。于是推知，这个和的極限，也就是这两个积分之差，不会是負的，由此推出不等式(8)。

再由几何的解釋来看。先設两个曲綫

$$y=f(x),\quad y=\varphi(x)$$

都在 OX 軸之上(圖 122)。这时，界于曲綫 $y=f(x)$，OX 軸与縱坐标 $x=a, x=b$ 之間的圖形，整个在界于曲綫 $y=\varphi(x)$ 的类似圖形之內，所以前一个圖形的面积不大于后一个的面积，就是

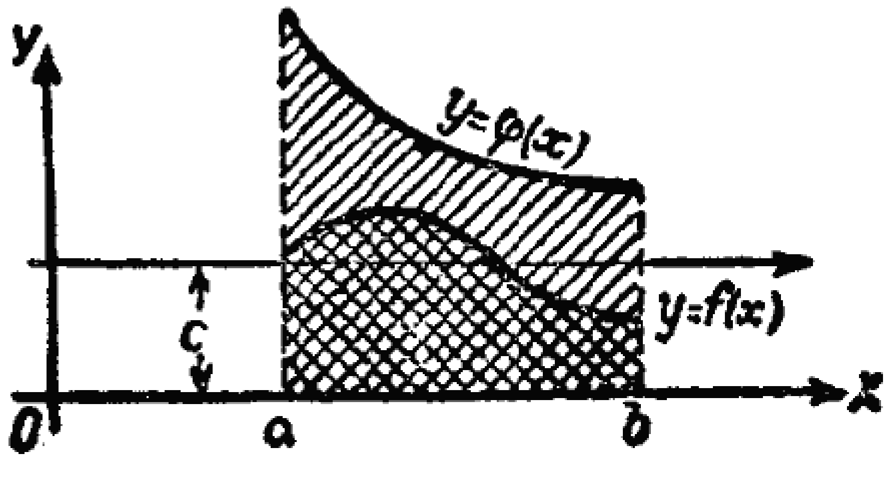


圖 122.

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx。$$

在一般情形下，无論所給的曲綫与 OX 軸的相对位置如何，只要条件(7)成立，我們总可把圖形向上移动，使得两个曲綫都在 OX 之上，这样移动之后，每个函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都增加同一个常数項 c，于是两个圖形的面积，都增加了以 $(b-a)$ 为底，以 c 为高的一塊矩形面积，所以其差不变。

推理 若在区間 $[a, b]$ 上，有:

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \leqslant M, \tag{9}$$

則

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant M(b-a) \quad (b>a)。 \tag{10}$$

实际上，条件(9)相当于:

$$-M \leqslant -\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant M。$$

求这个不等式由 a 到 b 的积分(性質 VII)；再应用(5)，得到:

$$-M(b-a) \leqslant -\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

这就相当于不等式(10)。

設 $\varphi(x)=|f(x)|$，由(10)得到一个重要的不等式：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|dx, \tag{10_1}$$

我們知道，关于和的性質：和的絕对値 ≤ 各項絕对値的和，这个性質推广到积分就是公式(10_1)。在这公式中，只有当 $f(x)$在区間$[a, b]$上不变号时，"="号成立。

由性質 VII 推出一个非常重要的定理：

中值定理 若函数 $\varphi(x)$ 在区間$[a, b]$上不变号，則

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx, \tag{11}$$

其中 ξ 是在区間$[a, b]$上的一个值。

为确定起見，在区間$[a, b]$上算作 $\varphi(x)\geqslant 0$，并且用 m 与 M 分别記$f(x)$在区間$[a, b]$上的最小值与最大值。因为

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

(只有当$f(x)$是个常量时，两个=号才能同时成立)，而且 $\varphi(x)\geqslant 0$，則

$$m\varphi(x)\leqslant f(x)\varphi(x)\leqslant M\varphi(x),$$

根据性質 VII，設 $b>a$，

$$m\int_a^b \varphi(x)dx\leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)dx\leqslant M\int_a^b \varphi(x)dx。$$

由此显然看出，有这样一个数 P 存在，滿足不等式 $m\leqslant P\leqslant M$，使得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=P\int_a^b \varphi(x)dx。\tag{12}$$

因为函数$f(x)$連續，所以在区間$[a, b]$上，它要取 m 与 M 之間所有的值，自然要取这个数 P 作它的值[**35**]。所以，在区間$[a, b]$上，有一个值 ξ，使得

$$f(\xi)=P,$$

于是公式(11)証完。

若在区間$[a, b]$上，$\varphi(x)\leqslant 0$，則$-\varphi(x)\geqslant 0$。由以上的証明，得

到：

$$\int_a^b f(x)[-\varphi(x)]dx=f(\xi)\int_a^b[-\varphi(x)]dx,$$

提出負号，两边乘以(-1)，就化为公式(11)。

同理，若 $b<a$，則由以上推知：

$$\int_b^a f(x)\varphi(x)dx=f(\xi)\int_b^a\varphi(x)dx。$$

把两边积分的上下限都顚倒，再用(-1)乘，就得到公式(11)，如此，所有的情形都已經証明了。

特別是，可以設 $\varphi(x)=1$，这时我們得到中值定理的一个重要的特殊情形：

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\int_a^b dx=f(\xi)(b-a)。\tag{13}$$

定积分的值等于积分区間之長与被积函数在积分区間上某点之值的乘积。

若 $a>b$，这个区間之長应当带$(-)$号。这定理的特殊情形的几何意义就相当于，考虑界于任何一个曲綫，OX 軸与縱坐标 $x=a$，$x=b$ 之間的面积时，总可以求出一个矩形，面积与它相等，并且这个矩形以$(b-a)$作底，而高等于这曲綫在区間$[a, b]$上的一个縱坐标(圖 123)。

不难証明，在公式(11)或(13)中出現的数 ξ，总可以算作在区間$[a, b]$內。

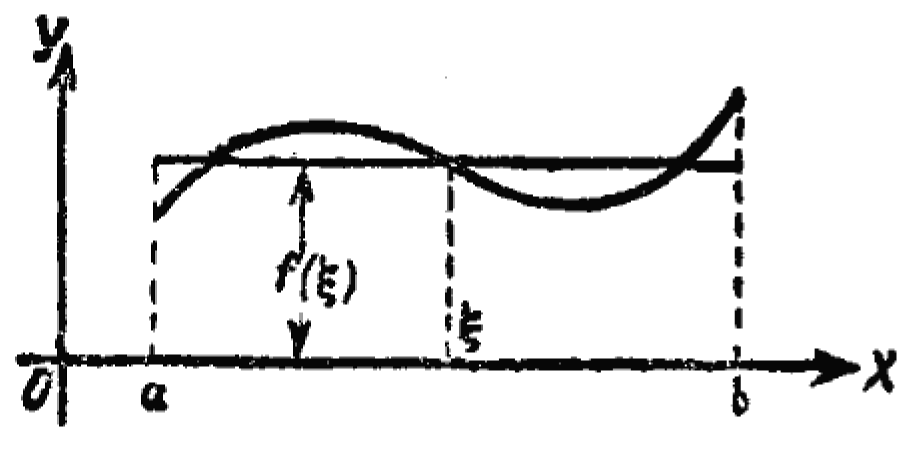


圖 123.

96. 原函数的存在性 VIII. 若一个定积分的上限是变量，則这积分对上限的导数等于被积函数对应于上限的值。

注意，积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的值依赖于积分的上下限 a 与 b。考虑积分

$$\int_a^x f(t)\,dt,$$

下限是常量 a，上限是变量 x，并且为与上限 x 分别起見，把积分变量記作 t。这个积分就是上限 x 的一个函数：

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt。\tag{14}$$

現在要証明
$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)。$$

为此，我們根据导数的定义[**45**]，計算 $F(x)$ 的导数：

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}。$$

我們有：

$$F(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

（根据性質 IV），由此：

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt,\quad \frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt。$$

应用(13)，就是

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(\xi)\cdot h,$$

其中 ξ 記区間 $(x, x+h)$ 内的某一个值，于是

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi)。$$

当 h 趋向零时，这个数 ξ 所在的区間 $(x, x+h)$ 上任何一个值都趋向 x，根据函数 $f(x)$ 的連續性，$f(\xi)$ 就趋向 $f(x)$，所以

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x),$$

于是証完。

注意，当 $x=a$ 时，我們可以限制 h 只取正値，当 $x=b$ 时，只取負値 $(a<b)$，于是 $F(x)$ 在整个（閉）区間 $[a, b]$ 上有导数 $f(x)$。至于在这

閉区間两端时，导数的定义，我們已經在[46]中講过。

由这个性質推出一个結果[45]，定积分 $F(x)$，看作上限 x 的函数时，在区間 $[a, b]$ 上是連續的，这里須要算作 $F(a)=0$。

可以看到，如果对积分(14)应用中値定理，就得到 $F(x)=$ $=f(\xi)(x-a)$；由此推得，当 $x\to a$ 时 $F(x)\to 0$。根据以上的討論也可推出：

IX. 任何一个連續函数必有原函数或不定积分。

函数(14)是 $f(x)$ 的一个原函数，当 $x=a$ 时，它等于零。

若 $F_1(x)$ 是一个原函数的表达式，則如[88]中所述

$$\int_a^b f(x)\,dx=F_1(b)-F_1(a)。\tag{15}$$

97. 間断的被积函数 以上所有的討論中，我們假設被积函数 $f(x)$ 在整个积分区間 $[a, b]$ 上是連續的。

現在我們講几种不連續函数的积分概念。

若在区間 $[a, b]$ 上有一点 c，在这点被积函数 $f(x)$ 不連續，但是当任意两个小的正数 ε' 与 ε'' 趋向零时，积分

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx,\quad \int_{c+\varepsilon''}^b f(x)\,dx\quad (a<b)$$

各自趋向确定的極限，則这两个極限，各叫做函数 $f(x)$ 对应于区間 (a, c) 与 (c, b) 的定积分，就是，若上述極限存在，則

$$\int_a^c f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

$$\int_c^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon''\to 0}\int_{c+\varepsilon''}^b f(x)\,dx。$$

在这种情形下，我們設

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx。$$

不难看出，公式(14)所定义的函数 $F(x)$ 有以下的性質：

除 $x=c$ 外，在整个区間 $[a, b]$ 上 $F'(x)=f(x)$。$F(x)$ 在整个区間

$[a, b]$上(包括 c 在内)連續。

若点 c 与区間$[a, b]$的一端重合,則只須考虑两个極限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

中的一个。

最后,若在区間$[a, b]$上不連續点 c 不只一个,則要把这区間分为若干部分,使每一部分中只有一个不連續点。

根据以上所述关于記号

$$\int_a^b f(x)dx$$

的意义,性質 IX 与公式(15)

$$\int_a^b f(x)dx=F_1(b)-F_1(a)$$

仍然成立,只須在整个区間$[a, b]$上,除 $x=c$ 外,$F_1'(x)=f(x)$,并且在整个区間$[a, b]$上,包括 $x=c$ 在内,$F_1(x)$是連續的。

对于这个肯定,我們只証明在区間(a, b)內有一个不連續点 c 的情形,至于有几个不連續点或是 $c=a$ 或 b 时,可以与这个完全类似的討論。

因为在区間$[a, c-\varepsilon']$与$[c+\varepsilon'', b]$上,函数$f(x)$是連續的,所以在这两个区間上,可以应用公式(15),于是就有:

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx=F_1(c-\varepsilon')-F_1(a),$$

$$\int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)dx=F_1(b)-F_1(c+\varepsilon'')。$$

根据 $F_1(x)$的連續性,我們可以写成:

$$\int_a^c f(x)dx=\lim_{\varepsilon'\to 0}[F_1(c-\varepsilon')-F_1(a)]=F_1(c)-F_1(a),$$

$$\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon''\to 0}[F_1(b)-F_1(c+\varepsilon'')]=F_1(b)-F_1(c),$$

就是

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=$$
$$=[F_1(c)-F_1(a)]+[F_1(b)-F_1(c)]=F_1(b)-F_1(a),$$

于是証完。

从几何的观点来看,所考虑的情形,就是,曲綫 $y=f(x)$ 在点 c 不連續,而对应于这曲綫的面积存在。例如,考虑由:

$$当\ 0\leqslant x<2\ 时,\quad f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2},$$
$$当\ 2\leqslant x\leqslant 3\ 时,\quad f(x)=x$$

所确定的函数的圖形(圖 124)。界于这个曲綫, OX 軸,縱坐标 $x=0$ 与可变縱坐标 $x=x_1$ 之間的面积是 x 的一个連續函数,縱然函数 $f(x)$ 当 $x=2$ 时不連續。从另一方面看,不难求出 $f(x)$ 的一个原函数,在整个区間[0, 3]上連續。这个函数 $F_1(x)$,可由下式确定:

$$当\ 0\leqslant x\leqslant 2\ 时,\quad F_1(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2},$$
$$当\ 2\leqslant x\leqslant 3\ 时,\quad F_1(x)=\frac{x^2}{2}。$$

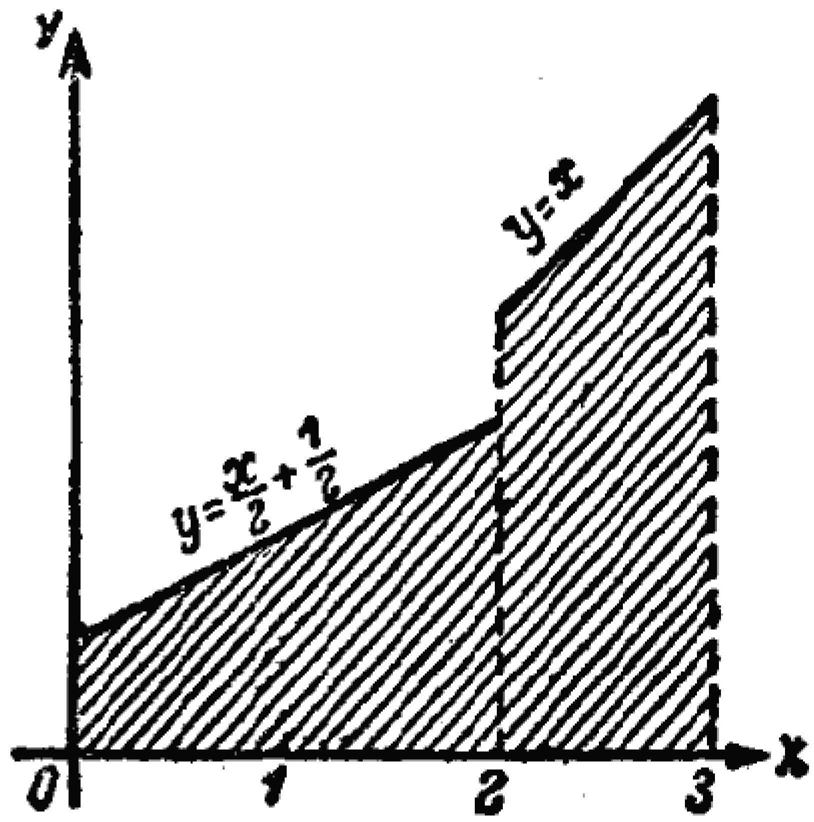


圖 124.

实际上,求 $F_1(x)$ 的导数,得到,在区間[0, 2]上,

$$F_1'(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2},$$

在区間[2, 3]上, $F_1'(x)=x$。此外,当 $x=2$ 时,由 $F_1(x)$ 的两个表达式得到同一个值 2,所以 $F_1(x)$ 是連續的。

界于这曲綫, OX 軸,与縱坐标 $x=0$, $x=3$ 之間的面积,表达如下:

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx=F_1(3)-F_1(0)=\frac{9}{2},$$

直接考虑圖形,不难相信这式子成立。

再考虑一个函数 $y=x^{-\frac{2}{3}}$(圖 125)。当 $x=0$ 时,它成为 ∞,但是当 x 取这个值时,它的原函数 $3x^{\frac{1}{3}}$ 保持連續,所以可以写成:

$$\int_{-1}^{+1} x^{-\frac{2}{3}}dx=3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{+1}=6;$$

换句話說，縱然当 x 逼近于 0 时，所考虑的曲綫移向无穷远，但是在縱坐标 $x=-1$ 与 $x=1$ 之間，它有完全确定的对应的面积。

当 $x=0$ 时，函数 $\frac{1}{x^2}$ 的原函数$\left(-\frac{1}{x}\right)$成为无穷大。在这情形下，当点 0 在区間 (a, b) 內时，对于这个函数不能用公式(15)，曲綫 $\frac{1}{x^2}$ 在这样的区間上沒有有限的面积。

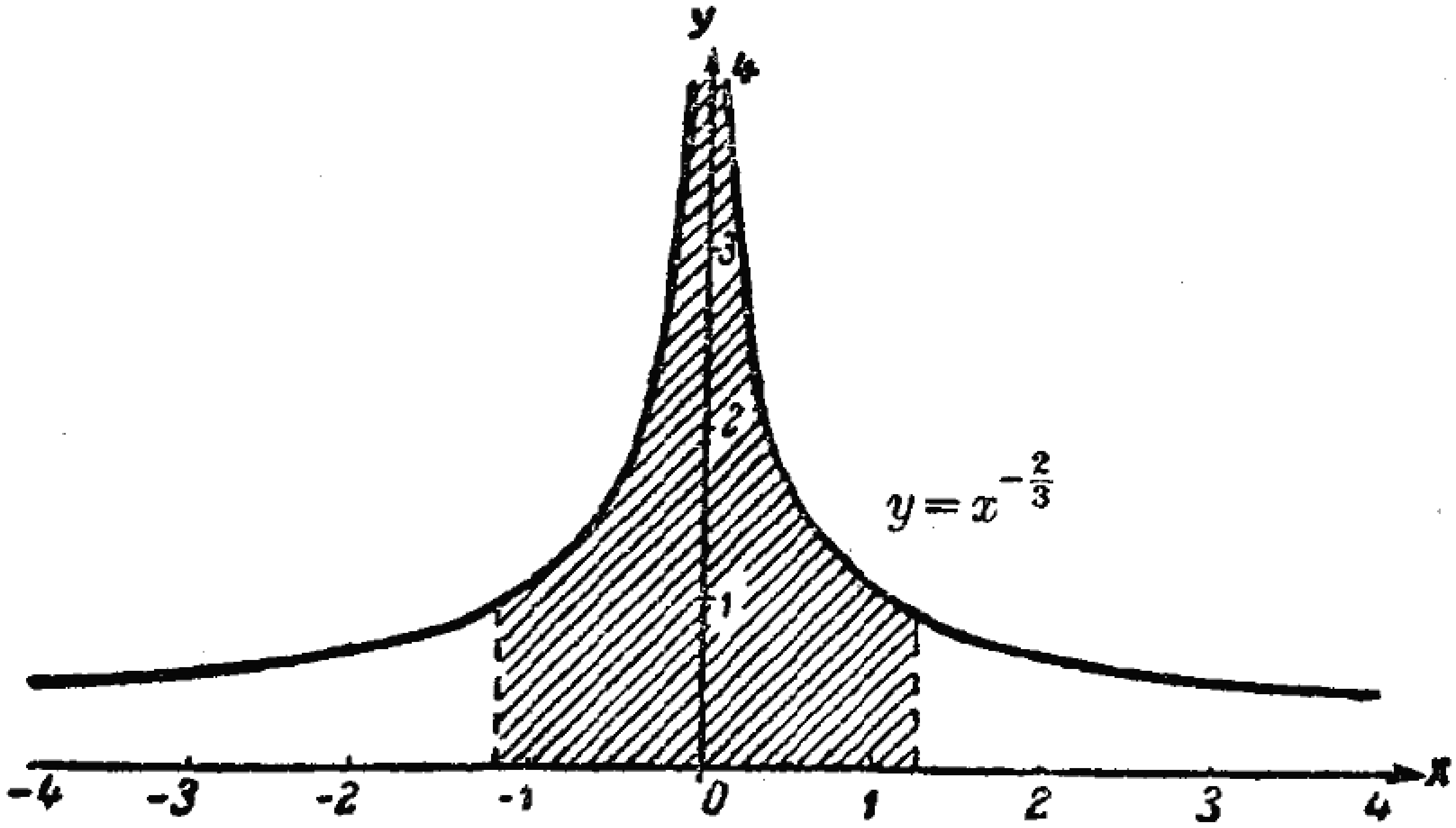


圖 125.

98. 无穷限 以上的討論可以推广到无穷区間的情形，就是設

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{17}$$

如果这些極限存在的話。

若当 x 趋向 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，原函数趋向确定的極限，則上面的極限就一定存在。我們把这两个極限簡写作 $F_1(+\infty)$与 $F_1(-\infty)$，就有：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left[F_1(b)-F_1(a)\right]=F_1(+\infty)-F_1(a), \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[F_1(b)-F_1(a)\right]=F_1(b)-F_1(-\infty), \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^a f(x)\,dx+\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=F_1(+\infty)-F_1(-\infty), \tag{20}$$

这就是把公式(15)推广到无穷区間的情形。

关系式(16)有时写成如下形式：

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx。$$

从几何的观点来看，上述条件成立，可以說是，对应于 $x\to\pm\infty$ 时，曲綫的无穷支有对应的面积。

如此，我們把以前对連續函数与有限区間所建立的定积分的概念，推广到不連續函数与无穷区間的情形。这推广的要点在于，先計算在一个較短区間上連續函数的积分，再取極限。如此得到的积分，为与原来的区別起見，叫做广义积分或反常积分。

注意，有时，不連續函数在有限区間上的积分直接具有[**94**]中所述和的極限的意义。我們以后再講[**116**]。例如，圖 124 上所示的面积就是如此。于是这个积分并非不正常。但是，若被积函数在积分区間上不是有界的(成为无穷大)，或是这个区間是无穷的，則积分就不是正常的了。

例 曲綫 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 当 $x=\pm\infty$ 时，移向无穷远，而它与 OX 軸之間的面积是有限的(圖 126)，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi。$$

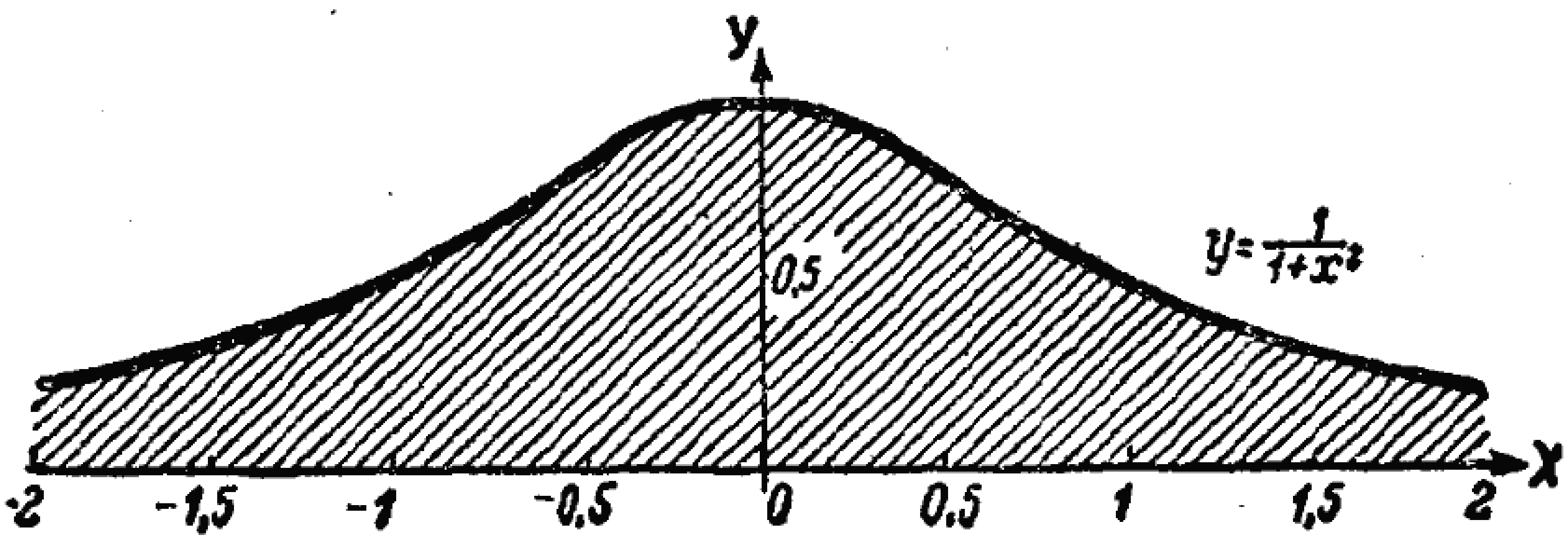


圖 126.

計算这个积分时，要記住函数 $\operatorname{arc\,tg} x$ 不能随意取这个多值函数的值，而如[**24**]所确定的，只取在$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$与$\left(+\frac{\pi}{2}\right)$之間的唯一的值。不然的話，上面这式子就

失去意义。

99. 定积分的换元法則 設 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上或在較广的区間 $[A, B]$ 上連續。再設函数 $\varphi(t)$ 在区間 $[\alpha, \beta]$ 上單值連續且有連續的导数，并且：

$$\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b。 \tag{21}$$

再設，当 t 在区間 $[\alpha, \beta]$ 上变时，$\varphi(t)$ 的值出現在区間 $[a, b]$ 上或較广的区間 $[A, B]$ 上，在这区間上 $f(x)$ 是連續的。这时，复合函数 $f[\varphi(t)]$ 在区間 $[\alpha, \beta]$ 上是 t 的一个連續函数。

在上述的假定下，若用新变量 t 替换 x：

$$x=\varphi(t), \tag{22}$$

則定积分变换成：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt。 \tag{23}$$

为了証明这个，我們考虑有可变上限的积分：

$$F(x)=\int_a^x f(y)\,dy, \qquad \Psi(t)=\int_\alpha^t f[\varphi(z)]\varphi'(z)\,dz。$$

根据(22)，$F(x)$ 是 t 的复合函数：

$$F(x)=F[\varphi(t)]=\int_a^{\varphi(t)} f(y)\,dy。$$

用复合函数微分法的法則，計算它的导数，就有：

$$\frac{dF(x)}{dt}=\frac{dF(x)}{dx}\,\frac{dx}{dt},$$

但是根据性質 VIII[**96**]：

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x),$$

并由公式(22)推知：

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t),$$

由此：

$$\frac{dF(x)}{dt}=f(x)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)。$$

現在計算函数 $\Psi(t)$ 的导数。根据性質 VIII 以及我們的假定，就有：

$$\frac{d\Psi(t)}{dt}=f[\varphi(t)]\varphi'(t)。$$

如此，考虑作 t 的函数，則函数 $\Psi(t)$ 与 $F(x)$ 在区間 $[\alpha, \beta]$ 上，具有共同的导数；所以，它們只能差一个常数項，但是，当 $t=\alpha$ 时，我們有：

$$x=\varphi(\alpha)=a,\quad F(x)|_{t=\alpha}=F(a)=0;\quad \Psi(\alpha)=0,$$

就是，当 $t=\alpha$ 时，这两个函数相等，于是当 t 在区間 $[\alpha, \beta]$ 上取任何一个值时，它們都相等。特別是当 $t=\beta$ 时，就有：

$$F(x)|_{t=\beta}=F(b)=\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

于是証完。

有时不用 (22)

$$x=\varphi(t)$$

代入，而反过来用

$$t=\psi(x) \tag{24}$$

代入。

这时上下限 β 与 α 由

$$\alpha=\psi(a),\quad \beta=\psi(b)$$

确定，这里須要注意，由方程 (24) 解出的 x 的表达式 (22)，应当滿足上面所述的条件。特別是函数 $\varphi(t)$ 应当是 t 的一單值函数。若 $\varphi(t)$ 不是單值的，則公式 (23) 可能不对。

例如，在积分

$$\int_{-1}^{+1} dx=2$$

中，用新变量 t

$$t=x^2,$$

替换 x，我們得到公式 (23) 右边的积分，上下限都是 $+1$，就是結果等于 0，这不可能。这个錯誤就是由于 x 通过 t 的表达式：

$$x=\pm\sqrt{t}$$

是个多值函数。

例　若 $f(-x)=f(x)$，則函数 $f(x)$ 叫做偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，就叫做

奇函数。

例如，$\cos x$ 是个偶函数，$\sin x$ 是个奇函数。

現在証明：若 $f(x)$ 是偶函数，則

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

若 $f(x)$ 是奇函数，則

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0。$$

把这积分分成两个[94, IV]：

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx。$$

在第一个积分中替换变量 $x=-t$，应用性質 II 与 III[94]：

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt = \int_0^a f(-x)\,dx,$$

代入到上面的公式中：

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a [f(-x)+f(x)]\,dx。$$

若 $f(x)$ 是偶函数，則和 $[f(-x)+f(x)]$ 等于 $2f(x)$；若 $f(x)$ 是奇函数，則和等于零；于是証明了上面的肯定。

100. 分部积分法則 定积分的分部积分[91]公式可以写成：

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)。 \tag{25}$$

实际上，把恒等式

$$u(x)\,dv(x) = d[u(x)v(x)] - v(x)\,du(x),$$

逐項积分，得到：

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = \int_a^b d[u(x)v(x)] - \int_a^b v(x)\,du(x),$$

根据性質 IX[96]：

$$\int_a^b d[u(x)v(x)] = \int_a^b \frac{d[u(x)v(x)]}{dx}\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

于是給出公式(25)。自然，$u(x)$ 与 $v(x)$ 算作是在区間 $[a, b]$ 上有連續导数的。

例 計算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx。$$

設
$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx。$$

分部积分，就有：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d\cos x=$$

$$=-\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2} x\cos x\cdot\cos x\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

就是
$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

由此解出 I_n：

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}。\tag{26}$$

这个公式叫做遞推公式，因为它把积分 I_n 的計算化为同样的积分，但是有較小的附标 $(n-2)$。

現在我們依 n 是偶数或奇数分为两种情形来考慮。

1. $n=2k$（偶）。根据(26)我們有：

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2k-2}=\frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)}I_{2k-4}=\cdots=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1}{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}I_0,$$

因为
$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2},$$

最后得到
$$I_{2k}=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1}{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}。$$

2. $n=2k+1$（奇）。与上面类似求出：

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\cdots5\cdot3}I_1,\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$$

所以
$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\cdots5\cdot3}。$$

积分
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

可以用同样方法計算，但是注意

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx,$$

由此，設
$$\frac{\pi}{2}-x=t, \quad x=\frac{\pi}{2}-t,$$

由基本公式(23)与性質 II[94]就有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt。$$

总合上面得到的結果，可以写成：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x\, dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}, \tag{27}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} x\, dx = \frac{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3}。 \tag{28}$$

§10. 定积分概念的应用

101. 面积的計算 在[87]中我們講过，界于給定的曲綫 $y=f(x)$，OX 軸与两个縱坐标 $x=a$, $x=b$ 之間的面积由定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

表达。

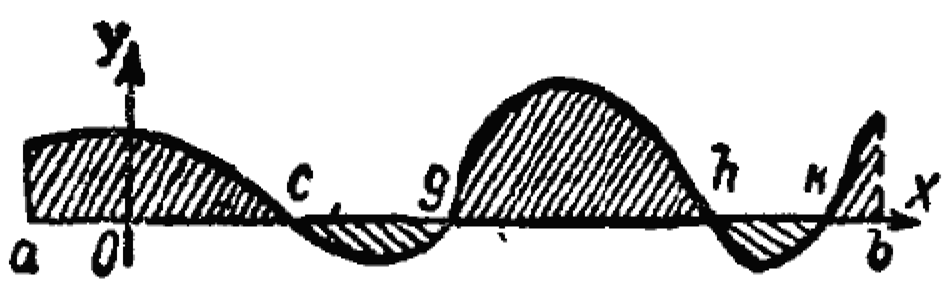


圖 127.

但是，无論如何，如此确定的面积，并不是由所給曲綫与 OX 軸作成的眞正的面积和，而只是它們的代数和，每一塊在 OX 軸之下的面积，带有負号。因此，为要得到这些面积在普通意义下的和，应当計算

$$\int_a^b |f(x)|\,dx。$$

所以，圖 127 上画有斜綫的面积和等于

$$\int_a^c f(x)dx - \int_c^g f(x)dx + \int_g^h f(x)dx - \int_h^k f(x)dx + \int_k^b f(x)dx。$$

两条曲綫：

$$y=f(x),\ y=\varphi(x) \qquad (1)$$

在两个縱坐标：

$$x=a, \quad x=b$$

之間的面积，由定积分

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx \qquad (2)$$

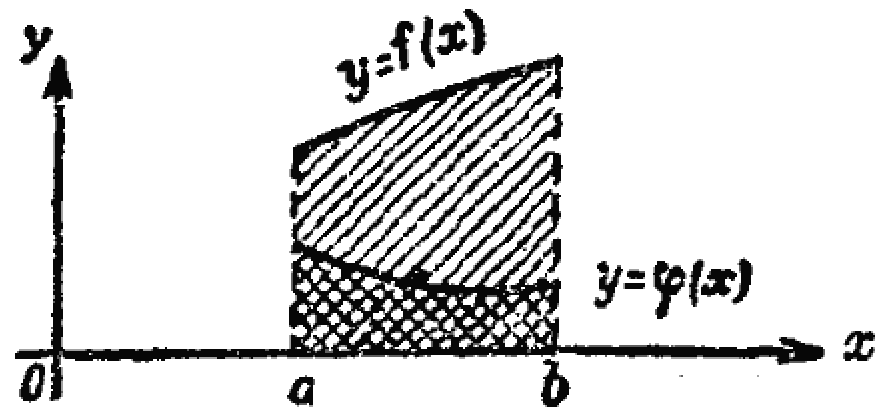


圖 128.

确定，这里假設在区間$[a, b]$上，一条曲綫在另一条之上，就是

$$f(x)\geqslant\varphi(x)。$$

先設两条曲綫都在 OX 軸之上。由圖 128 看出，所求的面积 S 等于界于所給曲綫与 OX 軸之間的两塊面积之差：

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx,$$

这就是所要証明的。在一般情形下，无論曲綫关于 OX 軸的位置怎样，总可以把 OX 軸向下移，使得两条曲綫都在 OX 軸之上；这样移动相当于两个函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都增加一个相同的常数項，但是差 $f(x)-\varphi(x)$ 保持不变。

作为一个練習，求証：若給定两条相交的曲綫，其中一条有时在另一条之上，有时在另一条之下，則界于它們与縱坐标 $x=a$, $x=b$ 之間的面积等于

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx。 \qquad (3)$$

由于求面积可以化为計算定积分，有时把計算定积分叫做求积。

例 1. 界于二次拋物綫

$$y=ax^2+bx+c,$$

OX 軸以及距离为 h 的两个縱坐标之間的面积等于

$$\frac{h}{6}(y_1+y_2+4y_0), \qquad (4)$$

其中 y_1 与 y_2 各記这曲綫在两端的縱坐标，y_0 記与两端等距的縱坐标。

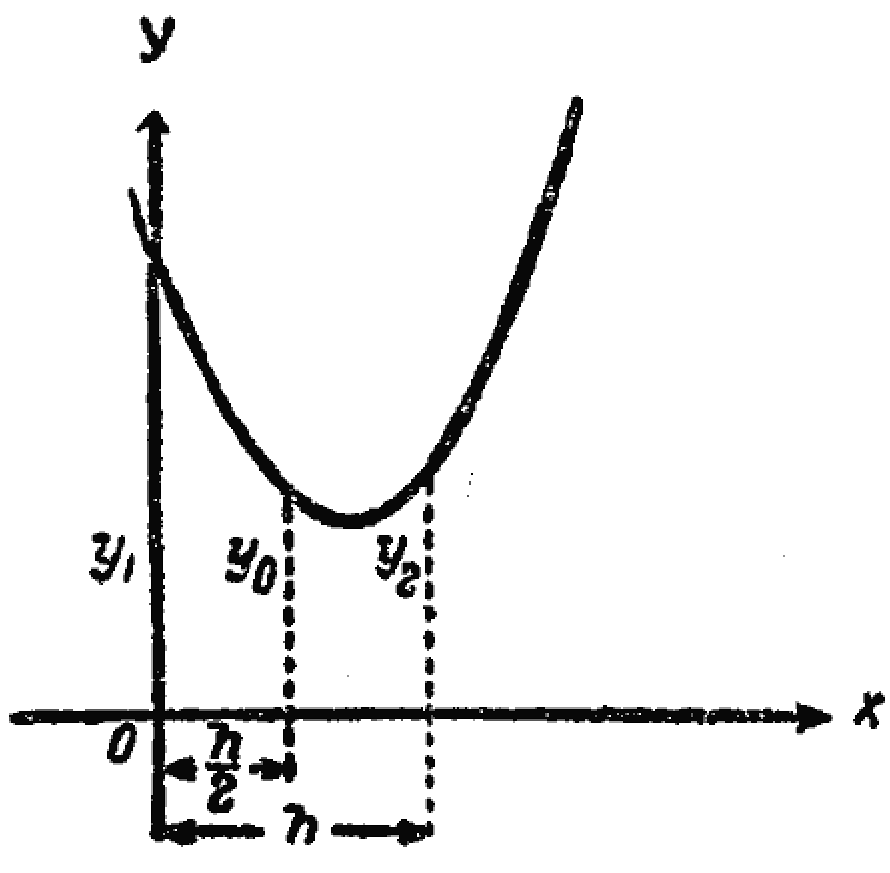


圖 129.

我們假設这曲綫在 OX 軸之上。

当証明公式(4)时，我們可以算作左端的縱坐标在 OY 軸上(圖 129)，这并不失去一般性，因为把整个圖形平行于 OX 軸移动时，所考虑的面积，两端与中間縱坐标的相对位置，以及这些縱坐标的大小都不改变。在这假定下，設拋物綫的方程有如：

$$y=ax^2+bx+c,$$

我們所求的面积就由下面这定积分来表达：

$$S=\int_0^h(ax^2+bx+c)\,dx=a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\Big|_0^h=$$

$$=a\frac{h^3}{3}+b\frac{h^2}{2}+ch=\frac{h}{6}(2ah^2+3bh+6c)。$$

按上面的記法，我們有：

$$y_0=ax^2+bx+c\Big|_{x=\frac{h}{2}}=\frac{1}{4}ah^2+\frac{1}{2}bh+c,$$

$$y_1=ax^2+bx+c\Big|_{x=0}=c,$$

$$y_2=ax^2+bx+c\Big|_{x=h}=ah^2+bh+c,$$

由此推知：　$$y_1+y_2+4y_0=2ah^2+3bh+6c。$$

于是証明了上面的肯定。

2. 楕圓的面积　方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

对应的楕圓，关于两个坐标軸都对称，所以所求面积 S 等于在第一象限上的一部分楕圓的面积的四倍，就是

$$S=4\int_0^a y\,dx$$

(圖 130)。为避免由楕圓的方程中解出 y，再代入这积分中的复杂計算，我們利用楕圓的参变方程：

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\qquad (5)$$

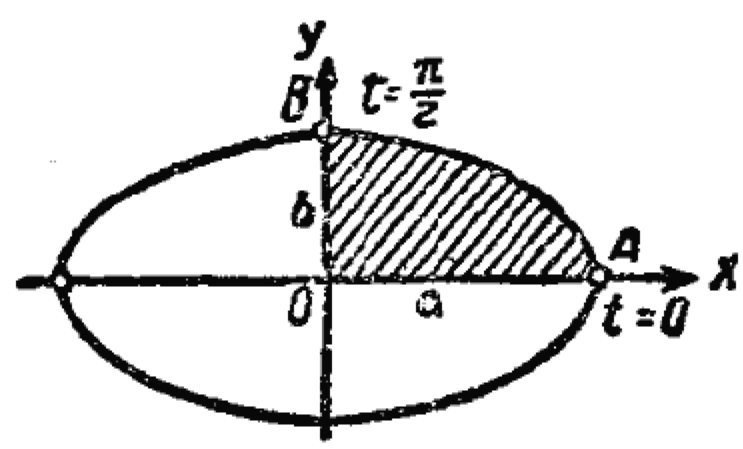


圖 130.

用新变量 t 替换 x; 則 y 立刻由(5)中第二个方程表达。当 x 由 0 变到 a 时，t 由 $\frac{\pi}{2}$ 变到 0，因为在这情形下，换元法的条件[99]都滿足，于是

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\, d(a\cos t)=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\, dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\, dt。$$

由公式(27)[100]，当 $k=1$ 时，我們有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\, dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

由此最后求出

$$S=\pi ab。\qquad (6)$$

当 $a=b$ 时，这橢圓成为半徑是 a 的圓，我們就得到以前知道的圓面积的表达式 πa^2。

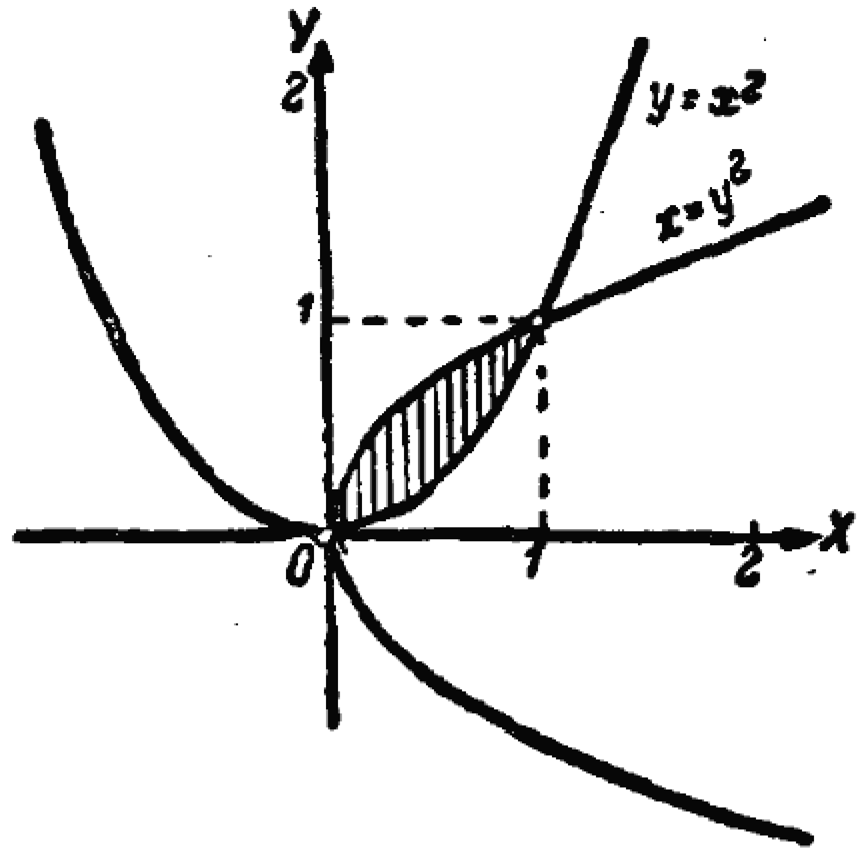


圖 131.

3．計算在两条曲綫

$$y=x^2,\quad x=y^2$$

之間的面积

解这两个曲綫的联立方程，得到所給的曲綫(圖 131)交于两点(0, 0)，(1, 1)。因为在区間[0, 1]上，

$$\sqrt{x}\geqslant x^2,$$

根据(2)，所求面积由下式表达：

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}。$$

102．扇形的面积 界于極坐标方程

$$r=f(\theta)\qquad (7)$$

所对应的曲綫，以及与正向極軸各作成角 α, β 的两个矢徑

$$\theta=\alpha,\quad \theta=\beta\qquad (8)$$

之間的面积，由公式

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[f(\theta)]^2d\theta\qquad (9)$$

表达。

把两个矢徑(8)之間的角分为 n 份。于是所考虑的面积(圖 132)被分为 n 个小單元。考虑这样一个界于矢徑 θ 与 $\theta+\Delta\theta$ 之間的小面积。用 ΔS 記这小面积，m 与 M 各記函数 $r=f(\theta)$ 在区間 $[\theta, \theta+\Delta\theta]$ 上的最小值与最大值，我們看到 ΔS，在两个圓扇形面积之間，这两个圓扇形的張角都是 $\Delta\theta$，半徑各为 m 与 M，就是

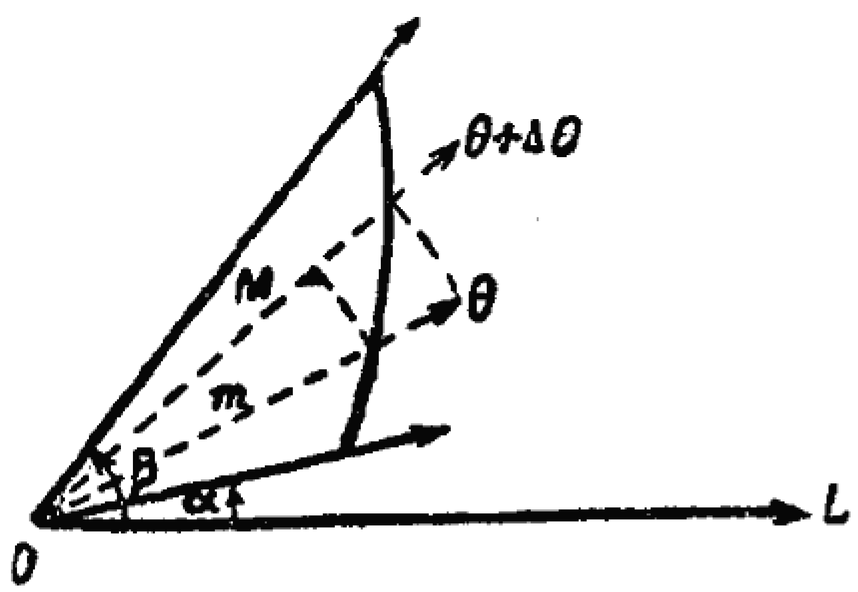


圖 132.

$$\frac{1}{2}m^2\Delta\theta\leqslant\Delta S\leqslant\frac{1}{2}M^2\Delta\theta,$$

所以，可以写成：

$$\Delta S=\frac{1}{2}P^2\Delta\theta,$$

其中 P 記 m 与 M 之間的一个值。

因为連續函数 $f(\theta)$ 在区間 $(\theta, \theta+\Delta\theta)$ 上取 m 与 M 之間所有的值，則在这区間上一定可以找出这样一个值 θ'，使得

$$f(\theta')=P,$$

而这时

$$\Delta S=\frac{1}{2}[f(\theta')]^2\Delta\theta。\tag{10}$$

現在，若增加小扇形 ΔS 的数目，使得值 $\Delta\theta$ 中最大的趋向 0，回忆[87]所述，取極限，就得到：

$$S=\lim\sum\Delta S=\lim\sum\frac{1}{2}[f(\theta')]^2\Delta\theta=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[f(\theta)]^2d\theta=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2d\theta,$$

于是証完。

注意，証明公式(9)时，基本思想是用一个張角为 $\Delta\theta$ 半徑为 $f(\theta')$ 的圓扇形的面积来替代扇形面积 ΔS。用近似表达式：

$$\Delta S=\frac{1}{2}r^2\Delta\theta,$$

其中 $r=f(\theta'')$，而 θ'' 是区間$[\theta, \theta+\Delta\theta]$上任意一个値，替代正确表达式(10)，再取極限，我們得到的扇形面积与以上的結果一样：

$$\lim \sum \frac{1}{2}[f(\theta'')]^2\Delta\theta=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta。\qquad (11)$$

这样引出的公式(11)中的被积表达式，具有簡單的几何意义：$\frac{1}{2} r^2 d\theta$ 是張角为 $d\theta$ 的扇形面积的近似表达式，所以簡称極坐标下的面积單元

例　求界于閉曲綫

$$r=a\cos 3\theta \quad (a>0)$$

的面积。

用描迹法不难作出这个曲綫，如圖 133 所示，这叫做三叶玫瑰綫。以它为界的整个面积等于圖上画斜綫的一部分面积的六倍，而这塊画斜綫的面积对应于 θ 由 0 变到 $\frac{\pi}{6}$，所以由公式(9)就有：

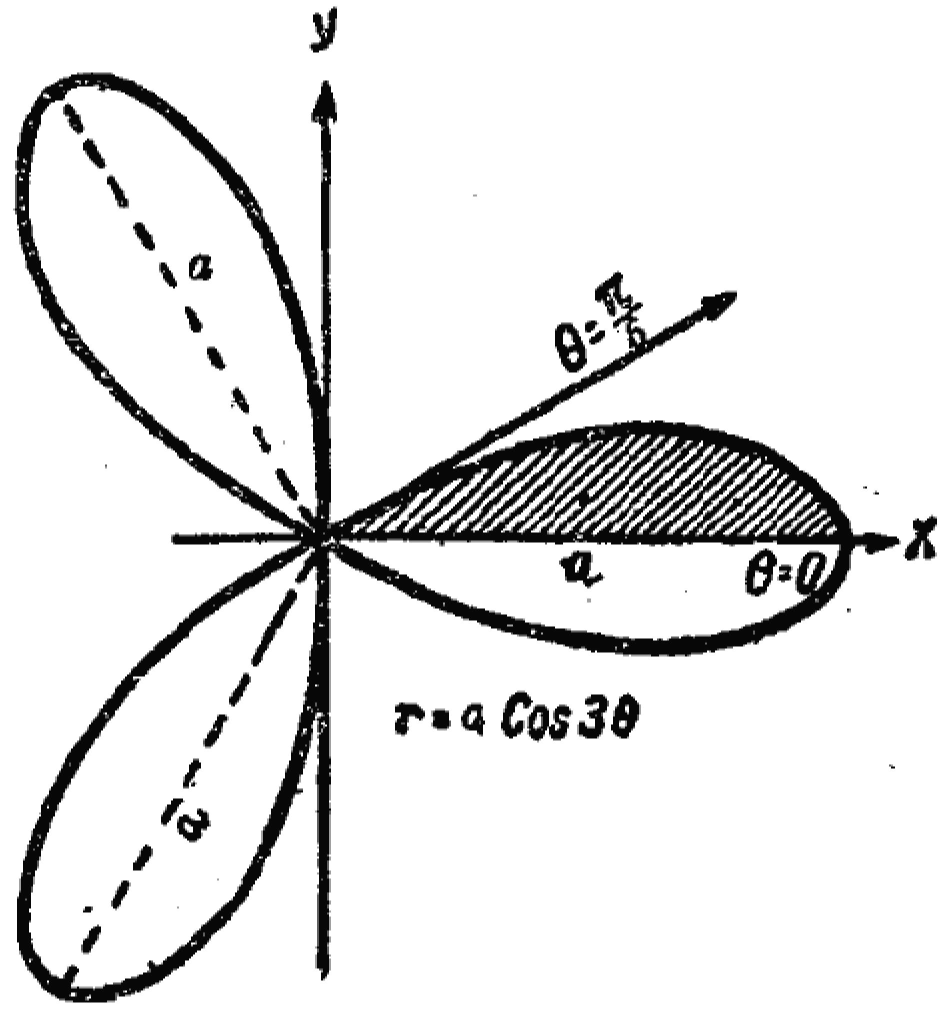


圖　133.

$$S=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2} a^2\cos^2 3\theta\, d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\, d(3\theta)=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\, dt=\frac{\pi a^2}{4}。$$

103．弧長　設某曲綫有弧 AB。作內接于此弧的折綫(圖 134)，如果当折綫的边数无限增加，而边長中最大的趋向零时，折綫的周長总趋向一个确定的極限，并且这極限不依賴于折綫的作法，我們就說这弧是可度的，而把所說極限叫做这弧的長。对于封閉曲綫弧長的这个定义也适用。

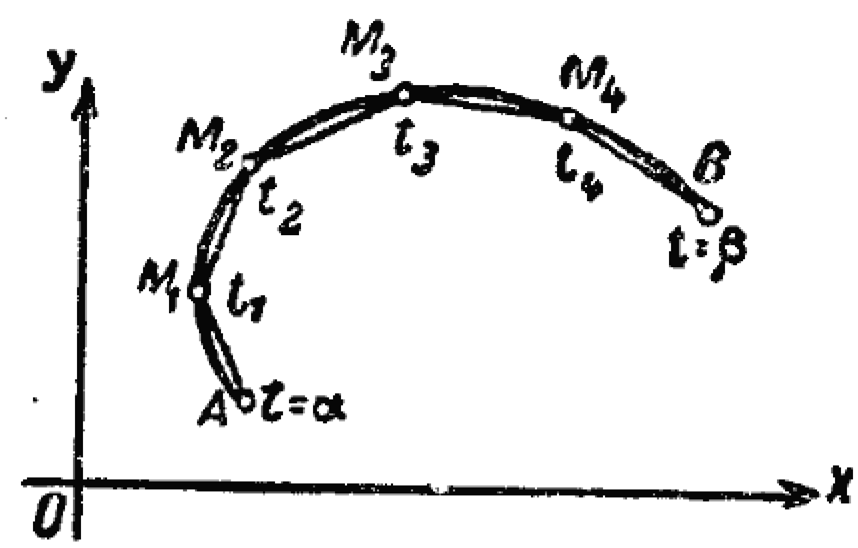


圖　134.

設曲綫由显式 $y=f(x)$ 給定，点 A 与 B 对应于值 $x=a$ 与 $x=b$

$(a<b)$，再設对应于弧 AB 的 $f(x)$ 在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有連續的导数。我們証明，在这些条件下弧 AB 是可度的并且它的長还可由定积分表达。

設 $AM_1M_2\cdots M_{n-1}B$ 是內接于弧 AB 的折綫并且它的頂点对应于値

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

又記 $y_i=f(x_i)$。由解析几何学中綫段長的公式，我們可得折綫周長的公式如下

$$p=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}。$$

利用有限改变量的公式

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\quad(x_{i-1}<\xi_i<x_i),$$

可得折綫單个边長的表达式为

$$\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i-x_{i-1}),$$

由此可見，要求边長中最大的趋向零，相当于要求差 (x_i-x_{i-1}) 中最大的趋向零。我們又得到折綫周長的表达式

$$p=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i-x_{i-1}),$$

实际上，它有等于积分

$$\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

的極限。如此，弧 AB 的長 l 可由下式表达

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx。\tag{12}$$

設 $x'<x''$ 是区間 $[a, b]$ 上任何两个値，而 M' 与 M'' 是弧 AB 上与之相对应的点。利用中値定理可得弧 $M'M''$ 的長 l' 的公式：

$$l'=\int_{x'}^{x''}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}\,(x''-x')\quad(x'<\xi_1<x'')。$$

利用有限改变量的公式可得弦 $M'M''$ 的長的公式：

$$M'M''=\sqrt{(x''-x')^2+[f(x'')-f(x')]^2}=$$
$$=\sqrt{1+f'^2(\xi_2)}\,(x''-x')\quad(x'<\xi_2<x'')。$$

由此推出：

$$\frac{M'M''}{l'}=\frac{\sqrt{1+f'^2(\xi_2)}}{\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}}。$$

如果点 M' 与 M'' 趋向横坐标为 x 的点 M，则 x' 与 $x''\to x$，同样 ξ_1 与 $\xi_2\to x$，由上式可得在[70]中曾經用到过的公式

$$\frac{M'M''}{l'}\to 1。$$

現設曲綫由参变方程

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$$

給定，并且点 A 与 B 对应于值 $t=\alpha$ 与 $t=\beta\,(\alpha<\beta)$。我們假定，区間 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 中的 t 这样对应于曲綫 AB 上的点，使不同的 t 对应于曲綫上不同的点，曲綫本身不相交且不封閉（圖 134）。其次我們假定，在区間 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上存在連續的导数 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$。

和上面一样，設 $AM_1M_2\cdots M_{n-1}B$ 是內接折綫且 $t_0=\alpha<t_1<t_2<<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$ 是各頂点所对应的参数值。我們得到折綫周長的表达式

$$p=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2},$$

或者，利用有限改变量的公式，可得

$$p=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}\,(t_i-t_{i-1})\quad(t_{i-1}<\tau_i\text{ 与 }\tau_i'<t_i)\tag{13}$$

于是可以証明，要求折綫各边長中最大的趋向零，相当于要求差 $(t_i-$ $-t_{i-1})$ 中最大的趋向零。不过沒有导数 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 存在的假定，这也可証明。

表达式(13)与以积分

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\tag{14}$$

为極限的和是有区别的，因为一般說，自变量 τ_i 与 τ_i' 是不同的。現在引进和

$$q=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,(t_i-t_{i-1}),$$

其極限为积分(14)。为了証明和(13)也趋向(14)，需要証明，差

$$p-q=\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\right](t_i-t_{i-1})$$

趋向零。

显然，上式也可写成

$$p-q=\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi'(\tau_i')+\psi'(\tau_i)}{\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}+\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}}[\psi'(\tau_i')-$$
$$-\psi'(\tau_i)](t_i-t_{i-1})。$$

因为

$$[\psi'(\tau_i')+\psi'(\tau_i)]\leqslant\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}+\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)},$$

所以

$$|p-q|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\psi'(\tau_i')-\psi'(\tau_i)|(t_i-t_{i-1})。$$

数 τ_i 与 τ_i' 屬于区間 (t_{i-1}, t_i)，由 $\psi'(t)$ 在区間 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的一致連續性，可以断言，如果差 (t_i-t_{i-1}) 中最大的趋向零，則量 $|\psi'(\tau_i')-\psi'(\tau_i)|$ 中最大的(我們用 δ 表示)也趋向零。但由上式推出：

$$|p-q|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\delta(t_i-t_{i-1})=\delta\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=\delta(\beta-\alpha),$$

由此可知，$p-q\to0$。如此，表示內接折綫的边長的和 (13) 趋向积分 (14)，也就是

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \tag{15}$$

弧長的这个公式在封閉曲綫的情形仍然是成立的。为断定这一点，只須把封閉曲綫分为两个非封閉曲綫，对于其中的每一个应用公式(15)再相加就成了。同样，如果曲綫 L 由有限个曲綫 L_k 組成，对于其中的每一个都可用满足上述条件的参变方程給定，于是可按公式 (15) 計算

每条曲綫 L_k 的長，再把这些長相加，我們就得到曲綫 L 的長。

現在来考虑与弧 AB 上的变点 M 相对应的区間$[\alpha, \beta]$上的变数 t。弧 AM 的長将是 t 的函数且由下式表达

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt。\tag{16}$$

由积分对上限的微分法则，得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)},\tag{17}$$

也就是
$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,$$

注意
$$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt},\quad \psi'(t)=\frac{dy}{dt},$$

可得弧的微分公式[70]：

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

如果不写出积分变量，公式(16)可以写成

$$l=\int_{(A)}^{(B)}ds=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}。$$

限(A)与(B)表示曲綫的起点与終点。

如果对于$[\alpha, \beta]$上的一切 t、$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0$，則按(17)可得 t 对 s 的导数：

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}。$$

在存在連續导数 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 与 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0$ 的条件下，可以保証曲綫的切綫沿曲綫連續地变化。

若曲綫由極坐标方程

$$r=f(\theta)$$

給出，則引用直角坐标 x, y 与極坐标 r, θ 的关系式[82]：

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\tag{18}$$

我們可以把这两个方程視为以 θ 为参变量的曲綫的参变方程。这时就有：

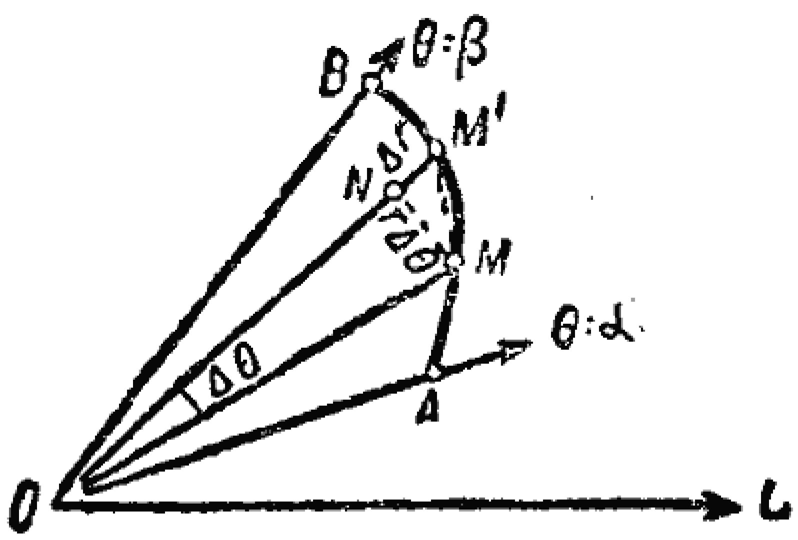


圖 135.

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta;$$

$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta;$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2,$$

由此

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \\ = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}, \quad (19)$$

若点 A 与 B 各对应于極角 θ 的值 α 与 β(圖 135)，則公式(15)給出：

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta。 \quad (20)$$

ds 的表达式 (19) 叫做弧的微分的極坐标式，它可以直接由圖得到，当弧 MM' 非常小时，可以用它的弦替代这个弧，于是計算这个弦長，这个弦恰好是直角三角形 MNM' 的斜边，而这直角三角形的两直角边 $\overline{MN}$ 与 $\overline{NM'}$ 近似地等于 $r\,d\theta$ 与 dr。

例 1. 由頂点(0,0)算起，到横坐标为 x 的变点止，拋物綫 $y=x^2$ 的弧長 s，依公式(12)，由积分

$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_0^x \sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2x} \sqrt{1+t^2}\, dt \quad (21)$$

表达，其中設 $t=2x$。

根据[92]例 11 有：

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}[t\sqrt{1+t^2} + \log(t+\sqrt{1+t^2})] + C。$$

代入(21)中，不难得到：

$$s = \frac{1}{4}[2x\sqrt{1+4x^2} + \log(2x+\sqrt{1+4x^2})]。$$

2. 椭圓

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的周界長，根据它关于坐标軸的对称性，等于它在第一象限的弧長的四倍。引用椭圓的参变方程

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

注意点 A 与 B 各对应于参变量的值 0 与 $\frac{\pi}{2}$，依公式(15)，我們得到所求的長 l 的

表达式：

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt。\tag{22}$$

这个积分不可能以有限的形式計算，只可以用以后講的近似計算法处理。

3．对数螺綫[83] $r=Ce^{a\theta}$

由矢徑 $\theta=\alpha$ 到 $\theta=\beta$ 之間的弧長，根据(20)由积分：

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=C\sqrt{1+a^2}\int_\alpha^\beta e^{a\theta}\,d\theta=\frac{C\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\beta}-e^{a\alpha})$$

表达。

4．在[78]中我們考虑过悬鏈綫，設 $M(x, y)$是其上一点。計算弧 AM(圖 93)之長。注意[78]中$(1+y'^2)$的表达式，得到：

$$AM=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^x\frac{y}{a}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^x(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\,dx=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})=ay',$$

由此

$$a^2+(\text{弧 } AM)^2=a^2+a^2y'^2=a^2(1+y'^2)=y^2,$$

就是弧 AM 之長等于一个直角三角形的一个直角边之長，这个直角三角形的斜边長等于点 M 的縱坐标，另一直角边等于 a。如此，我們得到下面的作弧 AM 之長的法則：

以悬鏈綫的頂点 A 为圓心，作一圓，半徑等于点 M 的縱坐标，設这圓与 OX 軸交于一点 Q，則綫段 $\overline{OQ}$(O 是坐标原点)就表示伸直的弧 AM(圖 93)。

上面的公式中，我們按照情况选擇符号，当点 M 在悬鏈綫的右半部时，y' 有(+)号。

5．在[79]中我們考虑过旋輪綫，現在确定它的一支 OO'(圖 94)的弧長 l 以及界于这一支与 OX 軸之間的面积 S：

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$
$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a,$$

就是，旋輪綫的一支的弧長等于滚动圓的直徑的四倍。

$$S=\int_0^{2\pi a}y\,dx=\int_0^{2\pi}\psi(t)\varphi'(t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=2\pi a^2-2a^2\Big[\sin t\Big]_0^{2\pi}+a^2\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=$$
$$=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2,$$

就是，界于旋輪綫的一支与滚圓时所在的直綫之間的面积，等于滚动圓的面积的三倍。

为計算 l，当开方 $\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}$ 时，应当取这个根的算术值，因为当 t 由 0 改变到 2π 时，函数 $\sin\frac{t}{2}$ 是正的。

6．在[84]中考虑的心臟綫关于極軸对称(圖 111)，所以，为要計算它的周界長 l，只須計算当 θ 在区間 $[0, \pi]$ 上改变时，对应的弧長，再把得到的結果两倍：

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2(1+\cos\theta)^2+4a^2\sin^2\theta}\,d\theta=$$

$$=8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=16a,$$

就是，心臟綫的周界長等于滚动圓(或不动圓)的直徑的八倍。

104．利用横断面計算体积法 計算給定的立体的体积也可以化为定积分来計算，只須我們能够确定，这立体垂直于一定方向的諸横断面的面积。

用 V 記所給立体的体积(圖 136)，設我們知道，这立体垂直于一定方向的所有的横断面的面积。我們取这些横断面所垂直的方向作 OX 軸的方向。于是任何一个断面由这断面与 OX 軸交点的横坐标 x 确定，所以这断面的面积是 x 的函数，我們記作 $S(x)$ 并算作是已知的。

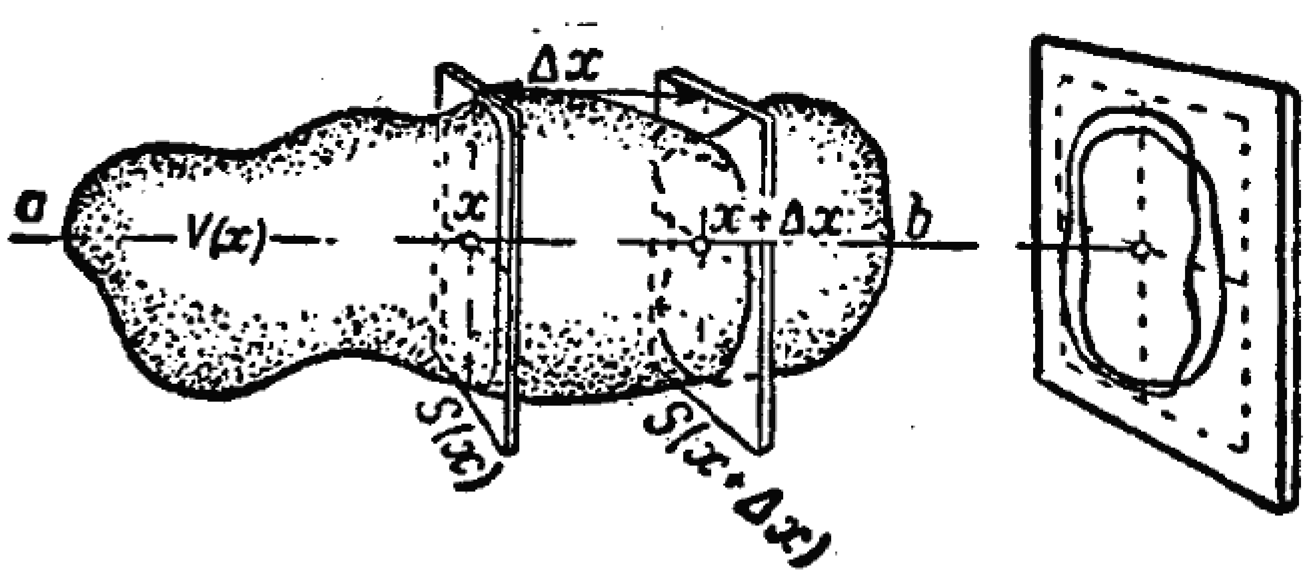


圖 136.

再設 a 与 b 各記这立体两端断面的横坐标。为要計算体积 V，由 $x=a$ 到 $x=b$ 作若干断面把这物体分为若干單元；考虑这样的一个單

元 ΔV，它所界于的两个断面的横坐标各記作 x 与 $x+\Delta x$。用高等于 Δx，对应于横坐标 x 的断面作底的正柱体体积替代体积 ΔV(圖 137)。这样的正柱体体积由乘积 $S(x)\Delta x$ 表达，于是我們得到上述体积 V 的近似表达式：

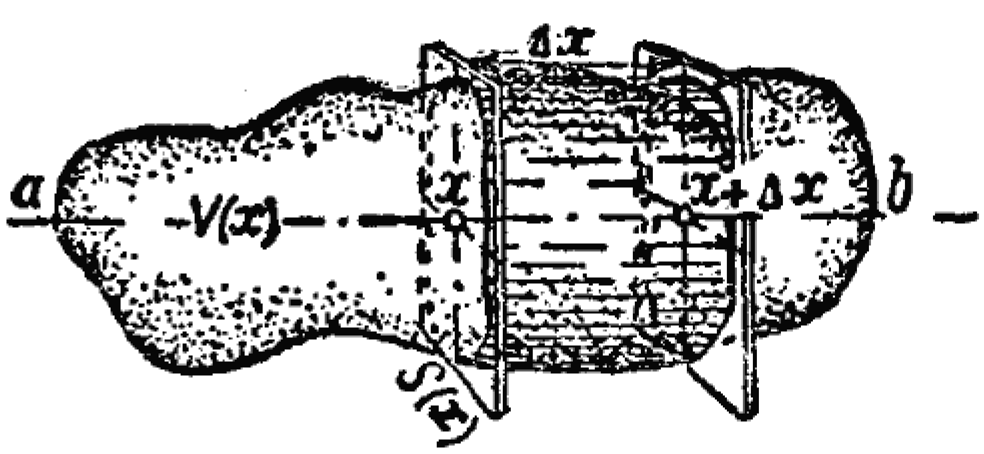


圖　137.

$$\sum S(x)\Delta x,$$

这个和要取到由断面分成的每一个單元。当單元的数目无限增加，而 Δx 中的最大的趋向零时，取極限，得到一个定积分，它給出体积 V 的准确的值，于是引出下面的結果：

若已知一个給定立体的垂直于一定方向的所有的横断面的面积，取这些横断面所垂直的方向作 OX 軸的方向，则这立体的体积由公式：

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \tag{23}$$

表达，其中 $S(x)$ 是横坐标为 x 的横断面面积，a 与 b 各为这立体两端断面的横坐标。

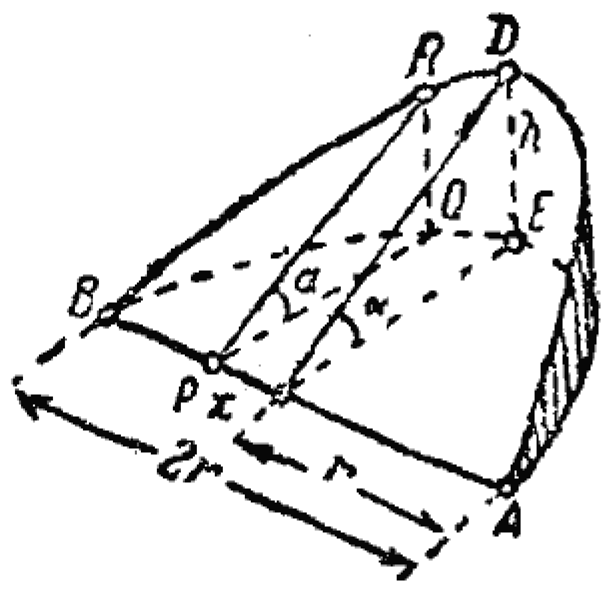


圖　138.

例　求如圖 138 所示的一塊"圓柱的楔形段"的体积，其中 ABE 是一个正圓柱的底的一半，ABD 是过底的直徑 AB 的一个平面。取直徑 AB 作 OX 軸，点 A 作坐标原点，圓柱的底半徑記作 r，平面 ABD 与底的交角記作 α。

垂直于直徑 AB 的断面具有直角三角形 PQR 的形状，它的面积由公式

$$S(x)=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{QR}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\overline{PQ}^2$$

表达。

再由已知的圓周的性質，綫段 $\overline{PQ}$ 是直徑 $\overline{AB}$ 上的綫段 $\overline{AP}$ 与 $\overline{PB}$ 的等比中項，所以

$$\overline{PQ}^2=\overline{AP}\cdot\overline{PB}=x(2r-x).$$

于是

$$S(x)=\frac{1}{2}x(2r-x)\operatorname{tg}\alpha。$$

应用公式(23)得到所求的体积为：

$$V=\int_0^{2r}S(x)\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int_0^{2r}x(2r-x)\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\left[rx^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{2r}=$$

$$=\frac{2}{3}r^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}r^2h,$$

其中引用这楔形段的"高" $h=r\operatorname{tg}\alpha$。

105. 迴轉体的体积 若所論立体的表面是由一条給定的曲綫 $y=f(x)$ 繞 OX 軸迴轉得到的，它的横断面就是以 y 为半徑的圓(圖139)，所以

$$S(x)=\pi y^2$$

$$V=\int_a^b\pi y^2\,dx,$$

就是，由曲綫 $\qquad y=f(x)$

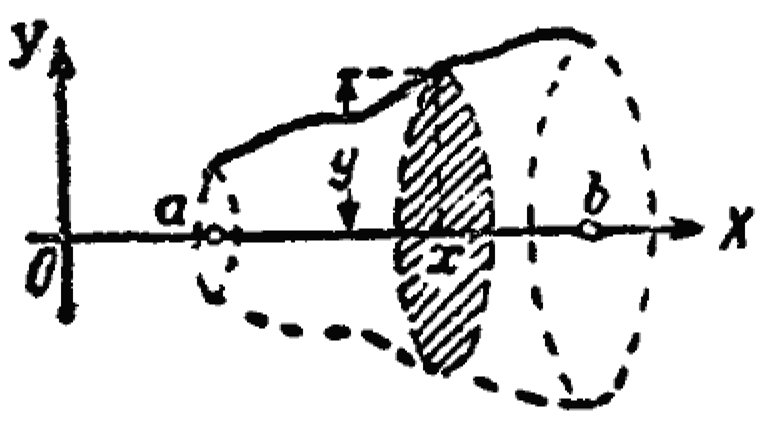


圖 139.

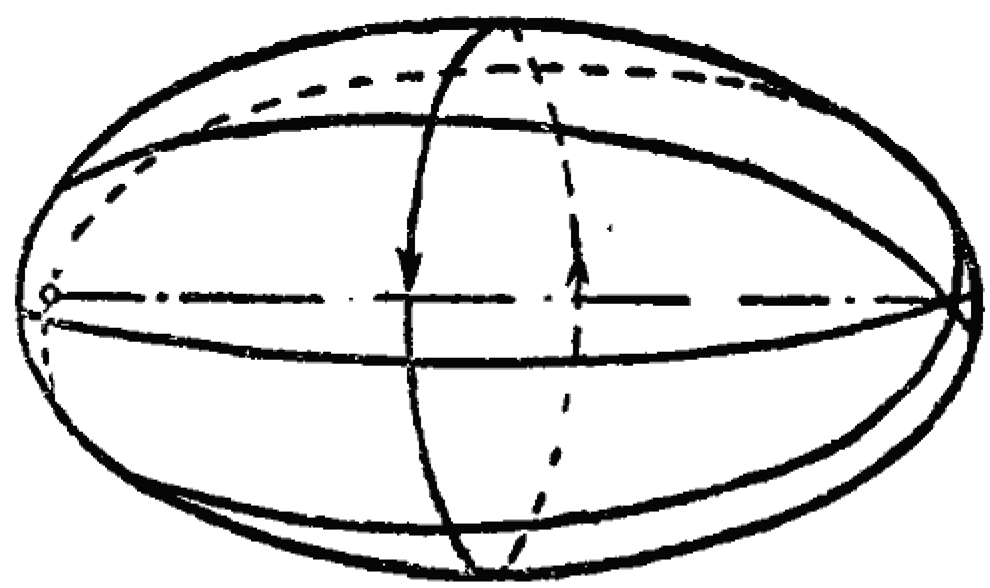


圖 140.

在縱坐标 $x=a$ 与 $x=b$ 之間的一部分，繞 OX 軸迴轉所得到的迴轉体的体积，由公式

$$V=\int_a^b\pi y^2\,dx \tag{24}$$

表达。

例 迴轉橢圓体的体积。由橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$$

繞它的長軸迴轉而成的立体叫做長迴轉橢圓体(圖 140)。在这情形下,两端的横坐标是 $-a$ 与 $+a$, 所以,公式(24)給出:

$$V_{\text{長}}=\pi\int_{-a}^{+a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{+a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{+a}=\frac{4}{3}\pi ab^2。\tag{25}$$

同样可以求这橢圓繞它的短軸迴轉而成的扁迴轉橢圓体的体积,只要把 x, y 互换,再用 b 换 a, 就得到:

$$V_{\text{扁}}=\pi\int_{-b}^{b}x^2dy=\pi\int_{-b}^{b}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{3}\pi ba^2。\tag{26}$$

若 $a=b$, 則两种迴轉橢圓体都成为半徑是 a 的球,而体积等于 $\frac{4}{3}\pi a^3$。

106. 迴轉体的側面积 給定平面 XOY 上一段曲綫,作这曲綫的內接折綫,当折綫的边数无限增加,而边長中最大的趋向零时,这样的折綫繞 OX 軸迴轉而成的立体的側面积所趋向的極限,叫做这段曲綫繞 OX 軸轉成的迴轉体的側面积(圖 141)。

若迴轉的一段曲綫在 A, B 两点之間,則这迴轉体的側面积 F 由公式:

$$F=\int_{(A)}^{(B)}2\pi y ds \tag{27}$$

表达,其中 ds 是所給的曲綫的弧的微分,就是

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}。$$

用这公式时,曲綫由显式或参变式給定都可以,(A)与(B)两个記号指明,应当在自变量与点 A 与 B 相对应的那两个值之間計算积分。

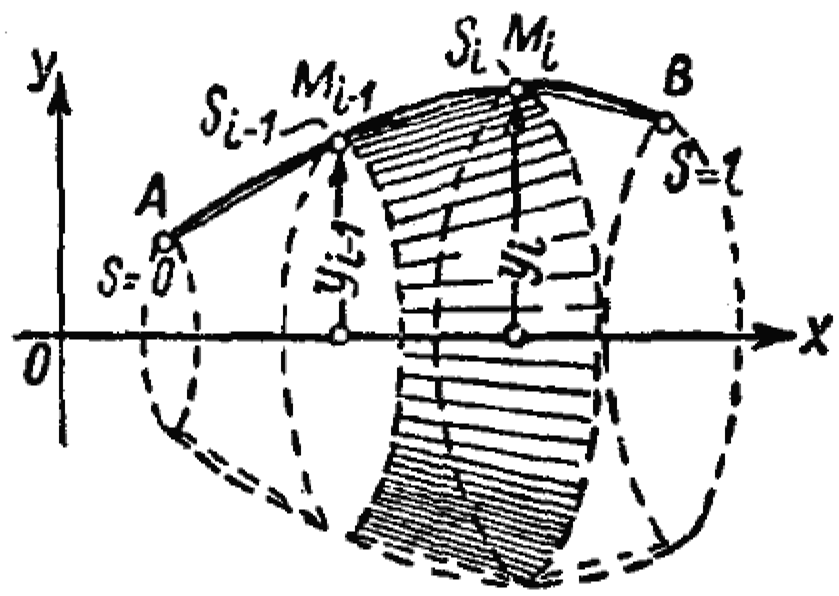


圖 141.

設曲綫的方程由参变方程給定,并且在曲綫上由点 A 算起的弧長 s 起着参变量的作用,用 l 表示整个曲綫 AB 的長。自然,这曲綫算作是可度的。我們有:$x=\varphi(s)$, $y=\psi(s)$。把 s 的变化区間$[0, l]$分为部分区間

$$0=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_{n-1}<s_n=l。$$

設曲綫上的点 M_i 对应于值 $s=s_i$，并且，显然，M_0 与 A 重合，而 M_n 与 B 重合。用 q_i 表示綫段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 的長，用 Δs_i 表示弧 $M_{i-1}M_i$ 的長且設 $y_i=\varphi(s_i)$。利用截錐側面积的公式，可求得折綫 $AM_1M_2\cdots M_{n-1}B$ 繞 OX 軸迴轉所成的側面积的公式：

$$Q=2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}q_i$$

或者

$$Q=2\pi\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}q_i+\pi\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})q_i。$$

設 δ 是絕对值 $|y_i-y_{i-1}|$ 中最大的，根据函数 $\psi(s)$ 在区間 $0\leqslant s\leqslant l$ 上的一致連續性，如果差 (s_i-s_{i-1}) 中最大的趋向零，則量 δ 趋向零。但我們有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})q_i\right|\leqslant\delta\sum_{i=1}^{n}q_i\leqslant\delta l,$$

由此推出，Q 的表达式中第二項趋向零。現在来研究第一項，为此把它写成：

$$2\pi\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}q_i=2\pi\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\Delta s_i-2\pi\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}(\Delta s_i-q_i)。$$

我們証明，这表达式中的第二項趋向零。为此注意，在区間 $[0,l]$ 上連續的函数 $y=\psi(s)$ 有界，因此，有这样的正数 m 存在，使对一切 i 有 $|y_{i-1}|\leqslant m$。所以：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}(\Delta s_i-q_i)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}m(\Delta s_i-q_i)=m\left(l-\sum_{i=1}^{n}q_i\right)。$$

但如果差 (s_i-s_{i-1}) 中最大的趋向零，則弦長 q_i 中最大的亦趋向零，且內接折綫的周長趋向弧長

$$\sum_{i=1}^{n}q_i\to l,$$

从而
$$2\pi\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}(\Delta s_i-q_i)\to 0。$$

为此，在 Q 的表达式中，只要再考慮項

$$2\pi\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\Delta s_i=2\pi\sum_{i=1}^{n}\psi(s_{i-1})(s_i-s_{i-1})。$$

但这和的極限引出积分(27)。于是，我們得到要証明的公式。如果曲綫由任意参变量 t 的参变方程給定，則我們有[参看 **103**]：

$$F=\int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt, \tag{28_1}$$

而当曲綫的方程是显式 $y=f(x)$ 时：

$$F=\int_{a}^{b} 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx。 \tag{28_2}$$

例 長迴轉橢圓体与扁迴轉橢圓体的表面积。

先考虑長迴轉橢圓体的表面积。应用[**105**]例中的記号，由公式(28)，我們就有：

$$F_{長}=2\pi\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx。$$

由橢圓的方程，就有

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\quad yy'=-\frac{b^2x}{a^2},$$

因此
$$(yy')^2=\frac{b^4x^2}{a^4},$$

$$F_{長}=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{b^4x^2}{a^4}}\,dx=2\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}\,dx。$$

引用橢圓的离心率的表达式

$$\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},$$

就有(参考[**99**]例)：

$$F_{長}=2\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}}\,dx=4\pi b\int_{0}^{a}\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi ba}{\varepsilon}\int_{0}^{a}\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}\,d\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)=\frac{4\pi ab}{\varepsilon}\int_{0}^{\varepsilon}\sqrt{1-t^2}\,dt。$$

用分部积分法，就有(参考[**92**]例 11)：

$$\int\sqrt{1-t^2}\,dt=t\sqrt{1-t^2}+\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=$$

$$=t\sqrt{1-t^2}-\int\sqrt{1-t^2}\,dt+\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

因此
$$\int\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}[t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t],$$
于是最后得到
$$F_{\text{长}}=2\pi ab\left[\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right]。\tag{29}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，就是当 $b=a$，而橢圓成为半徑为 a 的球时，取極限，这公式仍然适用。这时，方括弧內第二項是个未定式，由[65]就有：
$$\left.\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\left.\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{1}\right|_{\varepsilon=0}=1。$$

現在看扁迴轉橢圓体。把 x 与 y，a 与 b 对換，我們得到：
$$F_{\text{扁}}=2\pi\int_{-b}^{b}\sqrt{x^2+(xx')^2}\,dy,$$
其中 x 算作 y 的函数。

由橢圓的方程，就有：
$$x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right),\quad xx'=-\frac{a^2y}{b^2},\quad (xx')^2=\frac{a^4y^2}{b^4},$$
因此：
$$F_{\text{扁}}=2\pi a\int_{-b}^{b}\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)}dy=4\pi a\int_0^b\sqrt{1+\frac{y^2a^2\varepsilon^2}{b^4}}dy=$$
$$=\frac{4\pi b^2}{\varepsilon}\int_0^{\frac{a\varepsilon}{b}}\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}[t\sqrt{1+t^2}+\log(t+\sqrt{1+t^2})]\Big|_0^{\frac{a\varepsilon}{b}}=$$
$$=\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\left[\frac{a\varepsilon}{b}\sqrt{1+\frac{a^2\varepsilon^2}{b^2}}+\log\left(\frac{a\varepsilon}{b}+\sqrt{1+\frac{a^2\varepsilon^2}{b^2}}\right)\right]=$$
$$=\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\left[\frac{a\varepsilon}{b}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}+\log\left(\frac{a\varepsilon}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}\right)\right]=2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\log\frac{a(1+\varepsilon)}{b},$$
于是最后得到
$$F_{\text{扁}}=2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\log\frac{a(1+\varepsilon)}{b}。\tag{30}$$

107. 重心的确定。古魯金定理 設給定 n 个質点
$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \cdots,\ M_n(x_n, y_n),$$
每个的質量各等于：
$$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n,$$
成一質点系；如果点 G 的坐标 x_G, y_G 满足下列条件：

$$Mx_G=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i,\quad My_G=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i,\tag{31}$$

其中用 M 記这一系的总質量，

$$M=\sum_{i=1}^{n}m_i;$$

則点 G 叫做这一系的重心。

根据重心的定义，我們可以把这一系的点任意分組，于是拆成若干部分系，計算全系的重心 G 时，可以先看成每一部分系的質量集中在一点，就是这个部分系的重心，再由这些求全系的重心。

我們不預备証明这个一般的原則，就簡單的情形，如三个或四个質点的質点系，来驗証一下是很容易的。

下面我們不討論質点系，而討論連續地布滿某一平面区域或某一平面曲綫的物質。

为簡單起見，我們只考慮均勻的物体，取密度为 1；这样，一条綫的質量就等于这綫的長度，一塊平面区域的質量就等于它的面积。

先求一条曲綫弧 AB（圖 142）的重心，設其長为 s。根据上述的一般原則，把弧 AB 分成 n 个小單元 Δs。为要計算全系的重心，对于每一个單元我們取一点，就是这小單元的重心，而看作这小單元的全部質量 $\Delta m=\Delta s$ 集中在这一点①。

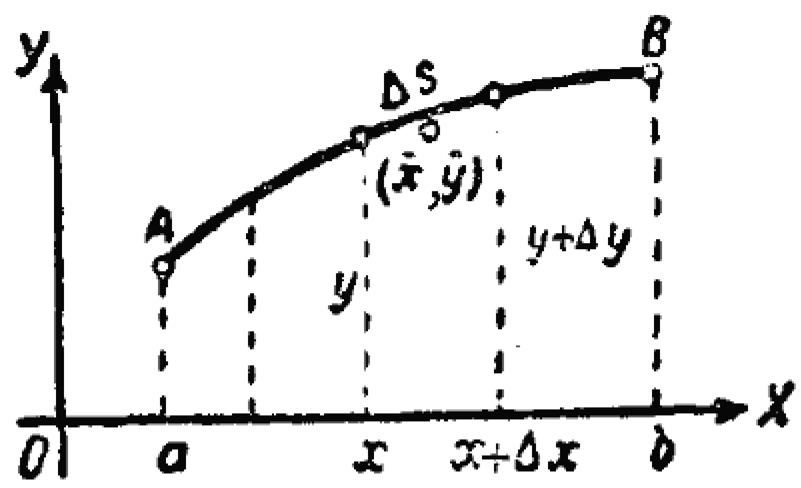


圖 142

考慮这些單元中的一个 Δs，它的两端的坐标記作 (x, y) $(x+\Delta x, y+\Delta y)$；它的重心的坐标記作 $(\bar{x}, \bar{y})$。当單元 Δs 足够小时，可以算作点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 离开点 (x, y) 随意多近。

由公式(31)，仿照[**104**]，就有：

① 每一个这样的小單元的重心，一般說来不在这曲綫上，單元愈小时，重心与曲綫愈近，如圖 142 所示。

$$Mx_G = sx_G = \sum \bar{x}\Delta m = \sum \bar{x}\Delta s = \lim \sum x\Delta s = \int_{(A)}^{(B)} x\,ds, \qquad (32)$$

$$My_G = sy_G = \sum \bar{y}\Delta m = \sum \bar{y}\Delta s = \lim \sum y\Delta s = \int_{(A)}^{(B)} y\,ds, \qquad (33)$$

再由公式:

$$s = \int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

計算出 s，就确定了重心 G 的坐标。

由公式(32)与(33)推出一个重要的定理。

古魯金定理 I 由平面上一段已知弧，繞这平面上一条不穿过这弧的直綫作軸，迴轉而成的立体的側面积，等于这段弧的長度与这段弧的重心迴轉时所經过路程的長度之乘积。

实际上，把迴轉軸取作 OX 軸，由弧 AB 迴轉所成立体的側面积，由 [**106**] (27)，就是:

$$F = 2\pi\int_{(A)}^{(B)} y\,ds = 2\pi y_G \cdot s,$$

[根据(33)]，于是証完。

再考虑一塊平面区域 S (它的面积也記作 S)。为簡單起見，設这个区域界于两条曲綫之間，这两个曲綫的縱坐标各記作

$$y_1 = f_1(x),$$
$$y_2 = f_2(x)$$

(圖 143)。

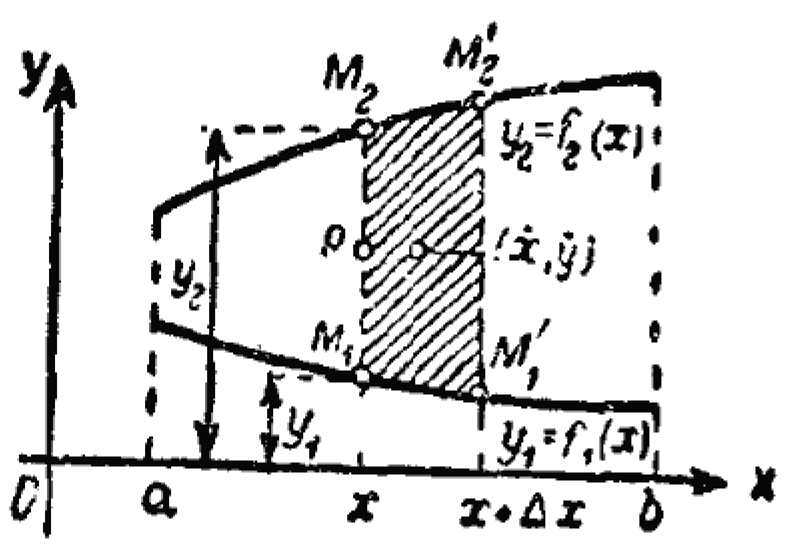


圖 143.

根据本段开始所述的一般原則，由平行于 OY 軸的直綫分这圖形成 n 个竪条。为要求这个圖形的重心 G，我們取出每一个这样的竪条的重心，而看作每一竪条的質量 $\Delta m = \Delta S$ 集中在它的重心。考虑一个这样的竪条，作为它的界綫的两条直綫 $\overline{M_1M_2}$ 与 $\overline{M_1'M_2'}$ 的横坐标各記作 x 与 $x+\Delta x$，这一竪条的重心的坐标記作 $\bar{x}$, $\bar{y}$。当竪条足够狹时，就是

它的寛 Δx 足够小时，点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 与綫段 $\overline{M_1M_2}$ 的中点 P 可以随意多近，据此可以写成近似等式：

$$\bar{x} \sim x, \quad \bar{y} \sim \frac{y_1+y_2}{2}。$$

再由竪条的質量 Δm 等于它的面积 ΔS，于是就可以等于这样一个矩形的面积，这矩形以 Δx 为底，其高与綫段 $\overline{M_1M_2}$ 長 y_2-y_1 之差可任意小，就是

$$\Delta m \sim (y_2-y_1)\Delta x。$$

应用公式(31)，可以写成：

$$Mx_G = Sx_G = \sum \bar{x}\,\Delta m = \lim \sum [x(y_2-y_1)]\Delta x =$$

$$= \int_a^b x(y_2-y_1)\,dx, \tag{34}$$

$$My_G = Sy_G = \sum \bar{y}\,\Delta m = \lim \sum \left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)(y_2-y_1)\Delta x =$$

$$= \lim \sum \left[\frac{1}{2}(y_2^2-y_1^2)\right]\Delta x = \int_a^b \frac{1}{2}(y_2^2-y_1^2)\,dx。 \tag{35}$$

由公式(35)推出：

古魯金定理 II　由一塊平面圖形，繞这平面上一条不穿过这圖形的直綫为軸，迴轉而成的立体的体积；等于这塊圖形的面积与它的重心在迴轉时所經过路程的長度之乘积。

实际上，把迴轉軸取作 OX 軸，不难看出，所考虑的迴轉体的体积 V，等于由曲綫 y_2 与曲綫 y_1 迴轉而成的两个立体的体积之差，所以依照[**105**](24)，根据(35)

$$V = \pi\int_a^b y_2^2\,dx - \pi\int_a^b y_1^2\,dx = \pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx = 2\pi y_G \cdot S,$$

于是証完。

这里得到的两个定理，当知道迴轉圖形的重心位置时，可用以求迴轉体的側面积或体积；反之，当知道由一个圖形作成的迴轉体的体积或側面积时，可用以确定这圖形的重心。

例　1. 求半徑为 r 的圓，繞它所在的平面上距圓心为 a 的一条直綫作軸，迴轉而成的环形的体积(这里 $r<a$，就是迴轉軸与圓周不相交)(圖 144)。

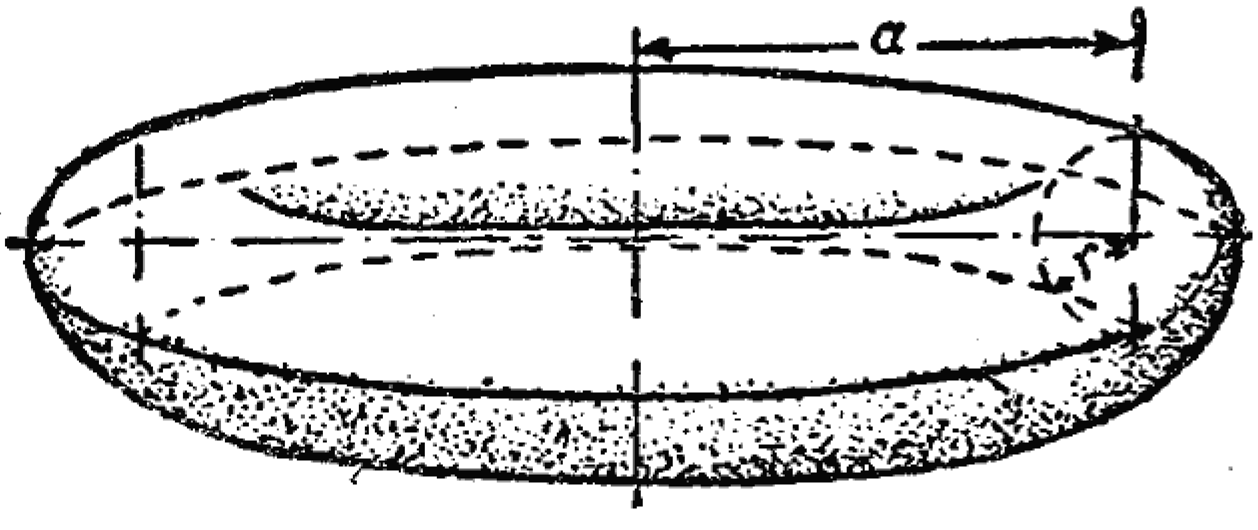


圖　144.

显然这迴轉圓的重心就是它的圓心，所以在迴轉时，重心所經过路程的長度等于 $2\pi a$。迴轉圖形的面积等于 πr^2，于是由古魯金定理 II 就有：

$$V=\pi r^2\cdot 2\pi a=2\pi^2 ar^2。\tag{36}$$

2. 求例 1 中所考慮的环形的表面积 F。

迴轉圓周的長度等于 $2\pi r$；重心也是与圓心重合，所以根据古魯金定理 I 就有：

$$F=2\pi r\cdot 2\pi a=4\pi^2 ar。\tag{37}$$

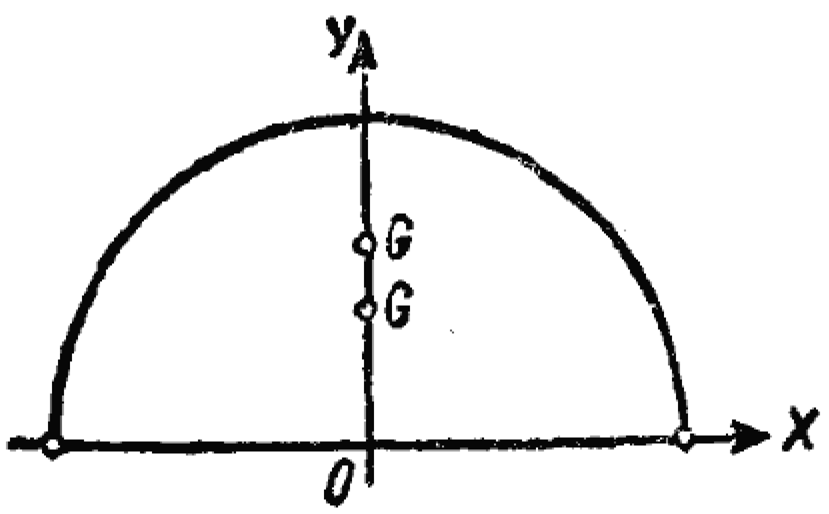


圖　145.

3. 求半徑为 a 的半圓之重心。取半圓的底作 OX 軸，过圓心作 OY 軸垂直于 OX(圖 145)；根据这圖形关于 OY 軸的对称性，显然重心 G 在 OY 軸上。于是只須求出 y_G。为此我們应用古魯金定理 II。这半圓繞 OX 軸迴轉而成的立体是半徑为 a 的球，它的体积等于 $\frac{4}{3}\pi a^3$。迴轉圖形的面积 S 等于 $\frac{\pi}{2}a^2$，所以：

$$\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{\pi}{2}a^2\cdot 2\pi y_G,$$

$$y_G=\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}。$$

4. 求半徑为 a 的半圓周之重心 G'。

如上例选定坐标軸，未知重心 G' 也在 OY 軸上，于是只須求 $y_{G'}$。应用古魯金定理 I，注意在这情形下，迴轉体的側面积 F 等于 $4\pi a^2$，弧長 $s=\pi a$，就得到

$$4\pi a^2=\pi a\cdot 2\pi y_{G'},\quad y_{G'}=2\frac{a}{\pi}。$$

于是直接推知，半圓周的重心比它所包的半圓的重心距离圓周較近。

108. 定积分的近似計算；矩形公式与梯形公式 借原函数的帮助，用[96]中基本公式(15)計算定积分，并非永远可能，因为虽然当被积函数連續时，原函数一定存在，但在实际上有时求不出来，也有时，縱然可求，但是計算起来十分复杂，而且很不方便。所以定积分的近似計算法是很重要的。

大多数近似計算法是根据把定积分解釋作面积与和的極限：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})。\tag{38}$$

以下我們总是把区間$[a, b]$分为n等分，把每一部分的長度記作h，于是

$$h = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + ih \quad (x_0 = a,\ x_n = a + nh = b)。$$

$x = x_i$时，被积函数$y = f(x)$的值記作$y_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$：

$$y_i = f(x_i) = f(a + ih)。\tag{39}$$

这些量我們算作是已知的；若函数$f(x)$是由分析法給定的，它們可以直接由計算得到；若是由圖示法給定的，可以由圖上量出来。

讓(38)右边的和里面的

$$\xi_i = x_{i-1} \quad 或 \quad x_i,$$

我們得到两个求近似値的矩形公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}],\tag{40}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1 + y_2 + \cdots + y_n],\tag{41}$$

其中記号≈表示近似相等。

数目n愈大时，就是h愈小时，这两个公式愈准确，当$n \to \infty$而$h \to 0$时，取極限，就达到这定积分的准确值。

如此，当縱坐标的数目漸增时，公式(40)与(41)的差誤趋向零。当給定的函数$f(x)$在区間$[a, b]$上單調时，由縱坐标的数目，可以很簡單的确定出差誤的一个上限(圖146)。在这情形下，由圖显然可以直接看出，公式(40)与(41)中任何一个的差誤，不超过有斜綫的矩

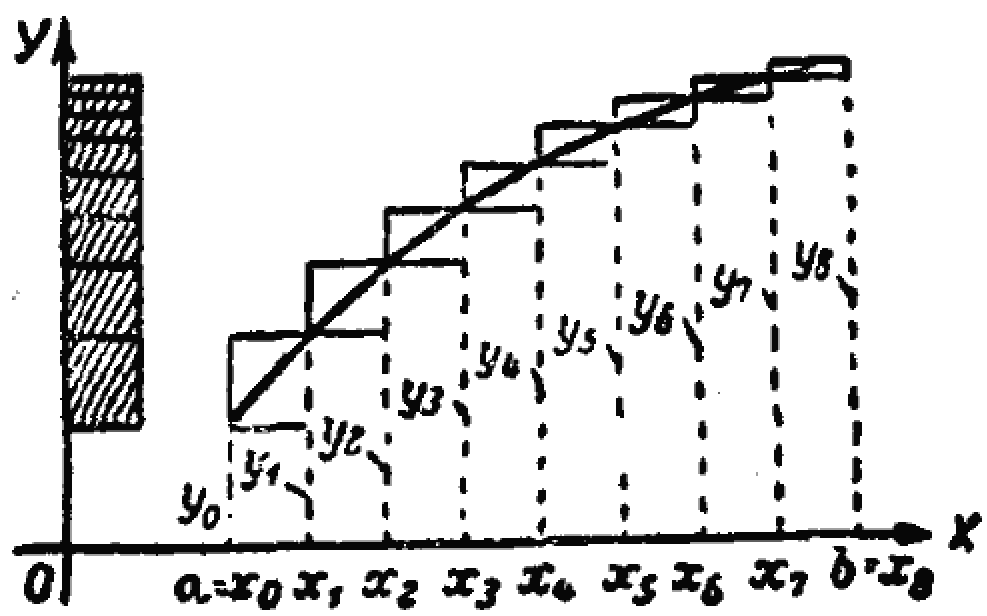


圖 146.

形的面积和，就是不超过以 $\frac{b-a}{n}=h$ 为底，以 y_n-y_0 为高的有斜綫的矩形的面积，也就是不超过量

$$\frac{b-a}{n}(y_n-y_0)。\tag{42}$$

矩形公式給出的，不是曲綫 $y=f(x)$ 下面积的准确式子，而只是它的近似式子，是用矩形周界中一部分的横竪綫段組成的阶形折綫下的面积。

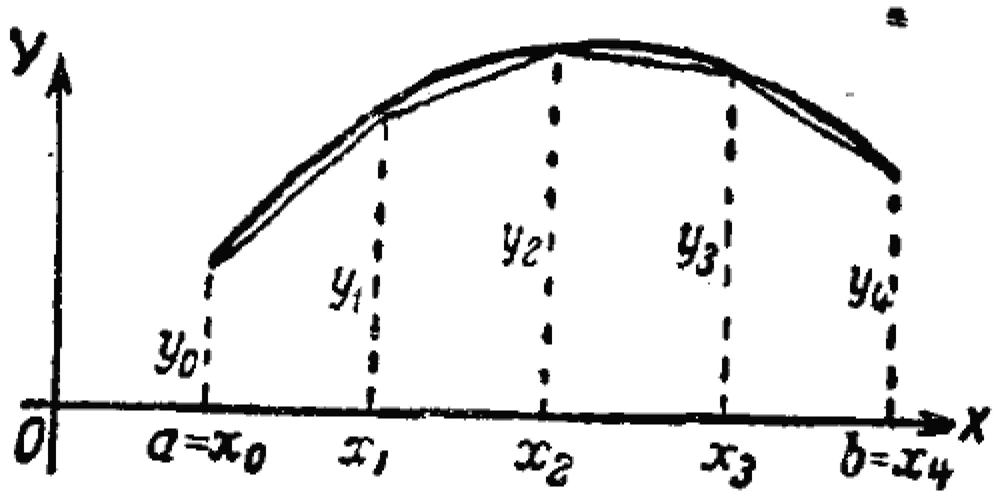


圖 147.

若用与給定的曲綫所差很少的别的綫，来替代这样的阶形折綫，就得到另外的近似表达式；这輔助綫与曲綫 $y=f(x)$ 愈近，用这輔助綫下的面积来替代所要的面积时，差誤愈小。

例如，若用給定的曲綫的內接折綫，当 $x=x_i$ 时，它的縱坐标与曲綫的縱坐标全同(圖 147)，換句話說，就是用这些內接梯形的面积和来替代所要的面积；就得到近似梯形公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right]=$$

$$=\frac{b-a}{2n}[y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n]。\tag{43}$$

109．切綫公式与波恩塞公式　現在我們把分份的数目增多一倍，就是把每一份再分成两半。这样做就得到 $2n$ 份(圖 148)：

$$x_0,\ x_{\frac{1}{2}}=a+\frac{h}{2},$$

$$x_1=a+h,\cdots,x_i=a+ih,$$

$$x_{i+\frac{1}{2}}=a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h,\ \cdots,\ x_n=b,$$

各对应于縱坐标：

$$y_0,\ y_{\frac{1}{2}},\ y_1,\cdots,\ y_i,\ y_{i+\frac{1}{2}},\ \cdots,\ y_n$$

($y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_n$ 叫做偶縱坐标，$y_{\frac{1}{2}}$，$y_{\frac{3}{2}}$，$\cdots$，$y_{n-\frac{1}{2}}$ 叫做奇縱坐标)。

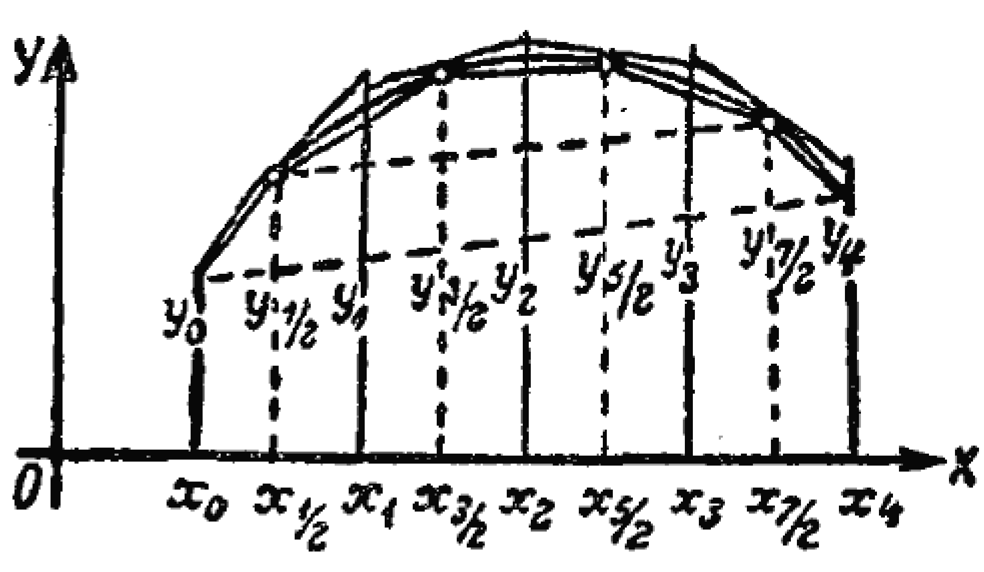


圖 148.

过每一个奇縱坐标的端点作切綫，与相邻的两个偶縱坐标相交，用这样作成的諸梯形的面积和来替代所要的面积。如此得到的近似公式叫做切綫公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\cdots+y_{n-\frac{1}{2}}]=\sigma_1。\tag{44}$$

再考虑連接諸相邻奇縱坐标端点的弦得到的內接梯形，加上連接縱坐标 y_0 与 $y_{\frac{1}{2}}$，$y_{n-\frac{1}{2}}$ 与 y_n 端点的两个弦在两端作成的梯形。这样得到的梯形的面积和記作

$$\sigma_2=\frac{b-a}{2n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}-\frac{y_{\frac{1}{2}}+y_{n-\frac{1}{2}}}{2}+2y_{\frac{1}{2}}+2y_{\frac{3}{2}}+\cdots+2y_{n-\frac{1}{2}}\right]。$$

若曲綫 $y=f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上沒有彎轉点，就是單純的向上凹或單純的向下凹，則曲綫下面积 S 在 σ_1 与 σ_2 之間，所以自然可以取等差中項 $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ 作 S 的近似表达式，这是波恩塞公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[\frac{y_0+y_n}{4}-\frac{y_{\frac{1}{2}}+y_{n-\frac{1}{2}}}{4}+2y_{\frac{1}{2}}+2y_{\frac{3}{2}}+\cdots+2y_{n-\frac{1}{2}}\right]。\tag{45}$$

不难看出，在上述关于曲綫的假定下，这个公式的差誤不超过

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\left(\frac{y_{\frac{1}{2}}+y_{n-\frac{1}{2}}}{2}-\frac{y_0+y_n}{2}\right)\frac{b-a}{4n}\tag{46}$$

的絕对值，由梯形中綫的性質，不难証明，上式中括号內的表达式，等于連接两个極端偶縱坐标与連接两个極端奇縱坐标的弦在正中縱坐标上截下的一段之長。

110. 辛卜森公式　如上，分作双数部分，过每三个縱坐标：

$$y_0, y_{\frac{1}{2}}, y_1;\ y_1, y_{\frac{3}{2}}, y_2;\ \cdots;\ y_{n-1}, y_{n-\frac{1}{2}}, y_n$$

的端点各作二次拋物綫，用这一串拋物綫来替代給定的曲綫。由[**101**]公式(4)算出这样作成的每一段拋物綫下的面积，我們就得到辛卜森近似公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0+4y_{\frac{1}{2}}+2y_1+4y_{\frac{3}{2}}+2y_2+$$
$$+\cdots+2y_{n-1}+4y_{n-\frac{1}{2}}+y_n]。\tag{47}$$

我們現在不求这个公式的差誤以及梯形公式的差誤。注意，一般来講，用一定的公式来表达的差誤式子，在理論上比在实用上較有价值，因为就实用来講，普通总是估計的太粗了。

关于上面的作法，我們提出，总可以选擇适当的 a, b 与 c，使拋物綫 $y=ax^2+$ $+bx+c$ 通过給定的平面上横坐标不同的三个点。

实用上，曲綫很平时，会得到很准确的結果，在曲綫驟然改变样子的点的附近，应当計算得比較精細，那就須要把每份分得更小。在任何情形下，在作計算以前，要作出曲綫的圖形，縱然草率些也好。

当作近似計算时，安排分割的計划是很重要的。为此，并且为比較上述几个不同的近似公式的准确性，我們介紹下面几个例：

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1,$$

$$n=10,\ \frac{b-a}{n}=0.15707963,\ \frac{b-a}{2n}=0.07853981,\ \frac{b-a}{6n}=0.02617994$$

y_1	sin 9°	0.1564345
y_2	sin 18°	0.3090170
y_3	sin 27°	0.4539905
y_4	sin 36°	0.5877853
y_5	sin 45°	0.7071068
y_6	sin 54°	0.8090170
y_7	sin 63°	0.8910065
y_8	sin 72°	0.9510565
y_9	sin 81°	0.9876883
Σ_1		5.8531024

$y_{1/2}$	sin 4°.5	0.0784591
$y_{3/2}$	sin 13°.5	0.2334454
$y_{5/2}$	sin 22°.5	0.3826834
$y_{7/2}$	sin 31°.5	0.5224986
$y_{9/2}$	sin 40°.5	0.6494480
$y_{11/2}$	sin 49°.5	0.7604060
$y_{13/2}$	sin 58°.5	0.8526402
$y_{15/2}$	sin 67°.5	0.9238795
$y_{17/2}$	sin 76°.5	0.9723699
$y_{19/2}$	sin 85°.5	0.9969173
Σ_2		6.3727474

y_0	sin 0°	0.0000000
y_{10}	sin 90°	1.0000000

矩形公式(短)

Σ_1	5.8531024
y_0	0.0000000
Σ	5.8531024

$\log\Sigma$	0.7673861
$\log\frac{b-a}{n}$	$\bar{1}$.1961198
$\log S$	$\bar{1}$ 9635059

$S\approx 0.9194080$

矩形公式(長)

Σ_1	5.8531024
y_{10}	1.0000000
Σ	6.8531024

$\log\Sigma$	0.8358873
$\log\frac{b-a}{n}$	$\bar{1}.1961198$
$\log S$	0.0320071

$S\approx1.0765828$

切線公式

$\log\Sigma_2$	0.8043267
$\log\frac{b-a}{n}$	$\bar{1}.1961198$
$\log S$	0.0004465

$S\approx1.0010290$

梯形公式

$2\Sigma_1$	11.7062048
y_0+y_{10}	1.0000000
Σ	12.7062048

$\log\Sigma$	1.1040158
$\log\frac{b-a}{2n}$	$\bar{2}.8950899$
$\log S$	$\bar{1}.9991057$

$S\approx0.9979430$

波恩塞公式

$2\Sigma_2$	12.7454948
$\frac{1}{4}(y_0+y_{10})$	0.2500000
$-\frac{1}{4}(y_{1/2}+y_{19/2})$	−0.2688441
Σ	12.7266507

$\log\Sigma$	1.1047141
$\log\frac{b-a}{2n}$	$\bar{2}.8950898$
$\log S$	$\bar{1}.9998039$

$S\approx0.9995487$

辛卜森公式

$2\Sigma_1$	11.7062048
$4\Sigma_2$	25.4909896
y_0+y_{10}	1.0000000
Σ	38.1971944

$\log\Sigma$	1.5820314
$\log\frac{b-a}{6n}$	$\bar{2}.4179685$
$\log S$	$\bar{1}.9999999$

$S\approx1.0000000$

$$S=\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}\log 2=0.2721982613\cdots①,$$

$$n=10,\quad \frac{b-a}{2n}=\frac{1}{20},\quad \frac{b-a}{6n}=\frac{1}{60}$$

y_1	0.0943665
y_2	0.1753092
y_3	0.2407012
y_4	0.2900623
y_5	0.3243721
y_6	0.3455909
y_7	0.3561263
y_8	0.3584065
y_9	0.3546154
Σ_1	2.5395504

$y_{1/2}$	0.0486685
$y_{3/2}$	0.1366865
$y_{5/2}$	0.2100175
$y_{7/2}$	0.2673538
$y_{9/2}$	0.3089926
$y_{11/2}$	0.3364722
$y_{13/2}$	0.3520389
$y_{15/2}$	0.3581540
$y_{17/2}$	0.3571470
$y_{19/2}$	0.3510273
Σ_2	2.7265583

y_0	0.0000000
y_{10}	0.3465736

波恩塞公式

$2\Sigma_2$	5.4531166
$\frac{1}{4}(y_0+y_{10})$	0.0866434
$-\frac{1}{4}(y_{1/2}+y_{19/2})$	−0.0999239
Σ	5.4398361

$S\approx\frac{1}{20}\Sigma\approx 0.2719918$

幸卜森公式

$2\Sigma_1$	5.0791008
$4\Sigma_2$	10.9062332
y_0+y_{10}	0.3465736
Σ	16.3319076

$S\approx\frac{1}{60}\Sigma\approx 0.27219846$

① 本書第二卷中要講这公式。

$$S=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\log 2=0.69314718\cdots,$$

$$n=20,\quad \frac{b-a}{2n}=\frac{1}{40},\quad \frac{b-a}{6n}=\frac{1}{120}$$

y_1	0.9523810
y_2	0.9090909
y_3	0.8695653
y_4	0.8333333
y_5	0.8000000
y_6	0.7692307
y_7	0.7407407
y_8	0.7142857
y_9	0.6896552
y_{10}	0.6666667
y_{11}	0.6451613
y_{12}	0.6250000
y_{13}	0.6060606
y_{14}	0.5882353
y_{15}	0.5714287
y_{16}	0.5555556
y_{17}	0.5405405
y_{18}	0.5263146
y_{19}	0.5128205
Σ_1	13.1160666

$y_{1/2}$	0.9756097
$y_{3/2}$	0.9302326
$y_{5/2}$	0.8888889
$y_{7/2}$	0.8510638
$y_{9/2}$	0.8163266
$y_{11/2}$	0.7843135
$y_{13/2}$	0.7547169
$y_{15/2}$	0.7272727
$y_{17/2}$	0.7017543
$y_{19/2}$	0.6779661
$y_{21/2}$	0.6557377
$y_{23/2}$	0.6349207
$y_{25/2}$	0.6153846
$y_{27/2}$	0.5970149
$y_{29/2}$	0.5797101
$y_{31/2}$	0.5633804
$y_{33/2}$	0.5479451
$y_{35/2}$	0.5333333
$y_{37/2}$	0.5194806
$y_{39/2}$	0.5063291
Σ_2	13.8613816

y_0	1.0000000
y_{20}	0.5000000

梯形公式

$2\sum_1$	26.2321332
y_0+y_{20}	1.5000000
$\sum$	27.7321332

$$S=\frac{1}{40}\sum\approx0.69330333$$

波恩塞公式

$2\sum_2$	27.7227632
$\frac{1}{4}(y_0+y_{20})$	0.3750000
$-\frac{1}{4}(y_{1/2}+y_{39/2})$	−0.3704847
$\sum$	27.7272785

$$S=\frac{1}{40}\sum\approx0.69318196$$

辛卜森公式

$2\sum_1$	26.2321332
$4\sum_2$	55.4455264
y_0+y_{20}	1.5000000
$\sum$	83.1776596

$$S=\frac{1}{120}\sum\approx0.69314716$$

111. 上限为变量的定积分之計算法 在很多的問題中，要計算定积分

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

的值，其中上限是个变量。

根据梯形公式(43)，可以用下述的方法得到这个积分的近似值，不过，对于 x，不是可取所有的值，而只是当 x 取区間$[a, b]$上諸分点的对应值时才能用，就是

$$F(a),\ F(x_1),\ F(x_2),\ \cdots,\ F(x_k),\ \cdots,\ F(x_{n-1}),F(b)。$$

由公式(43)，我們就有

$$F(x_k)=\int_a^{a+kh} f(x)\,dx\approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\cdots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right], \tag{48}$$

$$F(x_{k+1})=\int_a^{a+(k+1)h} f(x)\,dx\approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\cdots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}+\frac{y_k+y_{k+1}}{2}\right]\approx$$

$$\approx F(x_k)+\frac{1}{2}h(y_k+y_{k+1})。 \tag{49}$$

計算出 $F(x_k)$的值，就能用这个公式求出以下的 $F(x_{k+1})=F(x_k+h)$的值。这样的計算可以排列成表如下：

I	II	III	IV	V	VI
k	x_k	y_k	$s_k=y_k+y_{k+1}$	$\sum_{n=1}^{k} s_n$	$F(x_k)=\frac{1}{2}h\sum_{n=1}^{k} s_n$
0	a	y_0		0	0
			$s_1=y_0+y_1$		
1	$a+h$	y_1		s_1	$\frac{1}{2}hs_1$
			$s_2=y_1+y_2$		
2	$a+2h$	y_2		s_1+s_2	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2)$
			$s_3=y_2+y_3$		
3	$a+3h$	y_3		$s_1+s_2+s_3$	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2+s_3)$
			$s_4=y_3+y_4$		
4	$a+4h$	y_4		$s_1+s_2+s_3+s_4$	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2+s_3+s_4)$
			$s_5=y_4+y_5$		
5	$a+5h$	y_5		$s_1+s_2+s_3+s_4+s_5$	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5)$
			$s_6=y_5+y_6$		
6	$a+6h$	y_6		$s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6$	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6)$

112. 作圖法 若已知曲綫 $y=f(x)$ 的圖形，上述这些計算可以用作圖法得来；由曲綫

$$y=f(x) \tag{50}$$

的圖形，我們可以得到积分曲綫：

$$y=\int_a^x f(x)\,dx=F(x)$$

的圖形的作法。

若已經分割好，我們就可以近似的取

$$\frac{s_k}{2}=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}=y_{k-\frac{1}{2}}, \tag{51}$$

就是若曲綫(50)的圖形描好，則量 $\frac{s_k}{2}$ 可以直接由圖得到，因为它可以算作是曲綫在 $x_{k-\frac{1}{2}}=a+\frac{2k-1}{2}h$ 点的縱坐标之長(圖 149)。

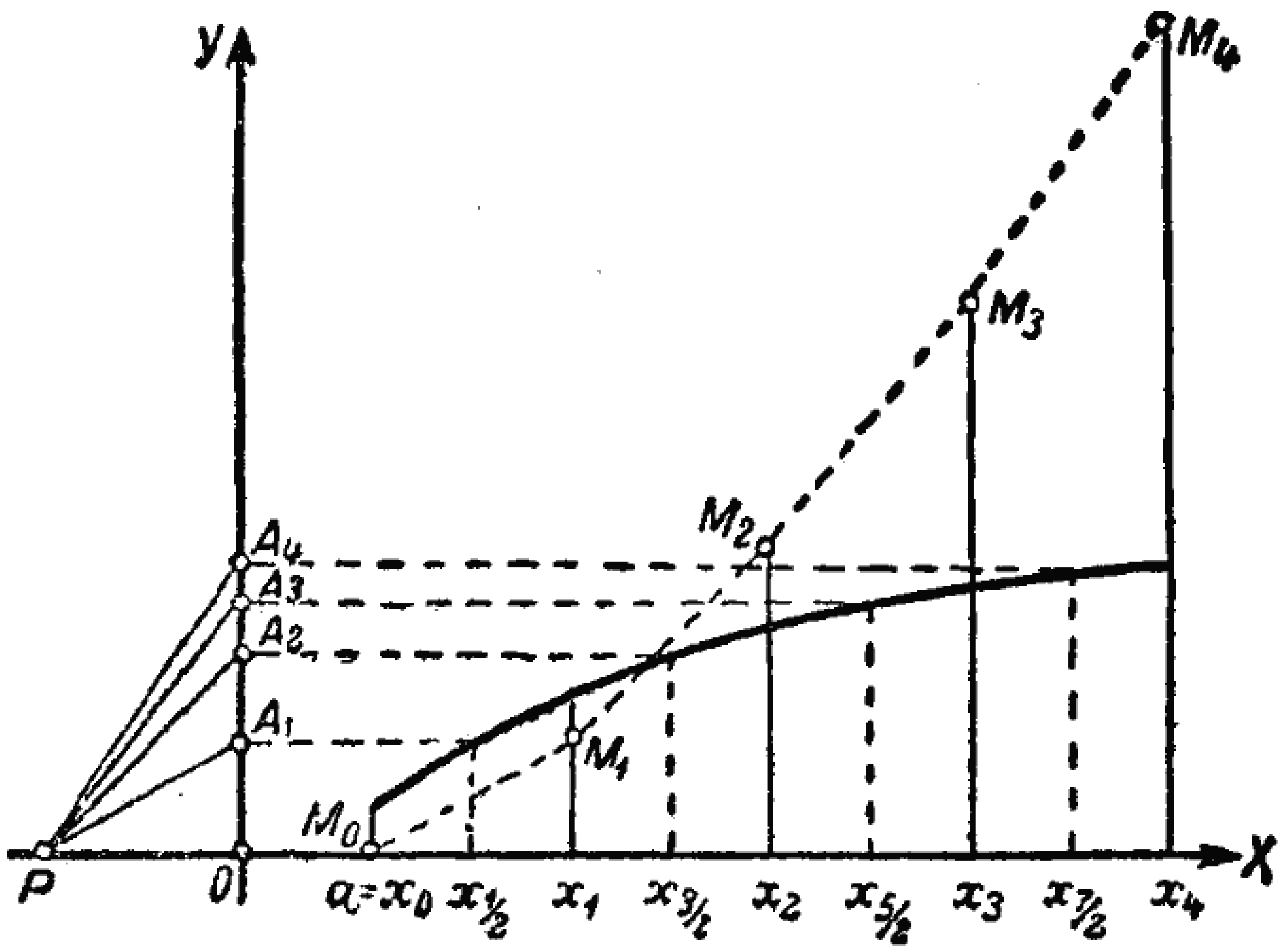


圖 149.

在 OY 軸上取投影点：

$$A_1(y_{\frac{1}{2}}),\ A_2(y_{\frac{3}{2}}),\ A_3(y_{\frac{5}{2}}),\ \cdots,\ A_k(y_{k-\frac{1}{2}})。$$

在 OX 軸上由点 O 向左取綫段 OP，令其長为 1。引直綫

$$PA_1,\ PA_2,\ PA_3,\ \cdots,\ PA_k,$$

过点 M_0, M_1, M_2, … 各作它們的平行綫，使

$$M_0M_1 \parallel PA_1,\ M_1M_2 \parallel PA_2,\ M_2M_3 \parallel PA_3,\ \cdots。$$

点 $M_0, M_1, M_2, \cdots$ 就是要求的近似积分曲线上的点，因为由圖不难断定

$$\overline{x_1M_1}=hy_{\frac{1}{2}},\ \overline{x_2M_2}=h(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}),\ \overline{x_3M_3}=h(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+y_{\frac{5}{2}}),\cdots,$$

根据近似等式(51)，这就說明：

$$\overline{x_kM_k}=h(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\cdots+y_{k-\frac{1}{2}})=h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\cdots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right)=F(x_k)$$

根据公式(48)。

上述的作圖法，是当对于函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 所用的單位長相同时用的。若对于面积用的單位長不同，設对于 $F(x)$ 与 $f(x)$ 用的單位長之比等于 l，只要在作圖时綫段 $\overline{OP}$ 的長不取作 1，而取作 l 就成了。

二次积分

$$\Phi(x)=\int_a^x dx\left(\int_a^x f(x)\,dx\right)$$

的近似作圖法以[**108**]中矩形公式(40)为基础。

像上面一样，我們設

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx。$$

只考虑自变量的值 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，由公式(40)有近似等式：

$$F(x_1)\approx hy_0,\ F(x_2)\approx h(y_0+y_1),\ \cdots,\ F(x_k)\approx h(y_0+y_1+\cdots+y_{k-1})。$$

再把公式(40)用于函数 $\Phi(x)$，就有：

$$\Phi(x_k)=h[F(x_0)+F(x_1)+\cdots+F(x_{k-1})]\approx$$
$$\approx h^2[y_0+(y_0+y_1)+\cdots+(y_0+y_1+\cdots+y_{k-1})]。\qquad(52)$$

由此推出下面作 $\Phi(x_k)$ 的縱坐标的方法(圖 150)：像上面一样作点 P，在 OY 軸上截綫段：

$$\overline{OB_1}=y_0,\quad \overline{B_1B_2}=y_1,$$
$$\overline{B_2B_3}=y_2,\ \cdots,\ \overline{B_{k-1}B_k}=y_{k-1},\ \cdots。$$

引直綫：

$$PB_1,\ PB_2,\ PB_3,\ \cdots,\ PB_k,\ \cdots,$$

作点：

$$M_0, M_1, M_2, \cdots, M_k, \cdots$$

使

$$M_0M_1 \parallel PB_1,\quad M_1M_2 \parallel PB_2,$$
$$M_2M_3 \parallel PB_3,\ \cdots。$$

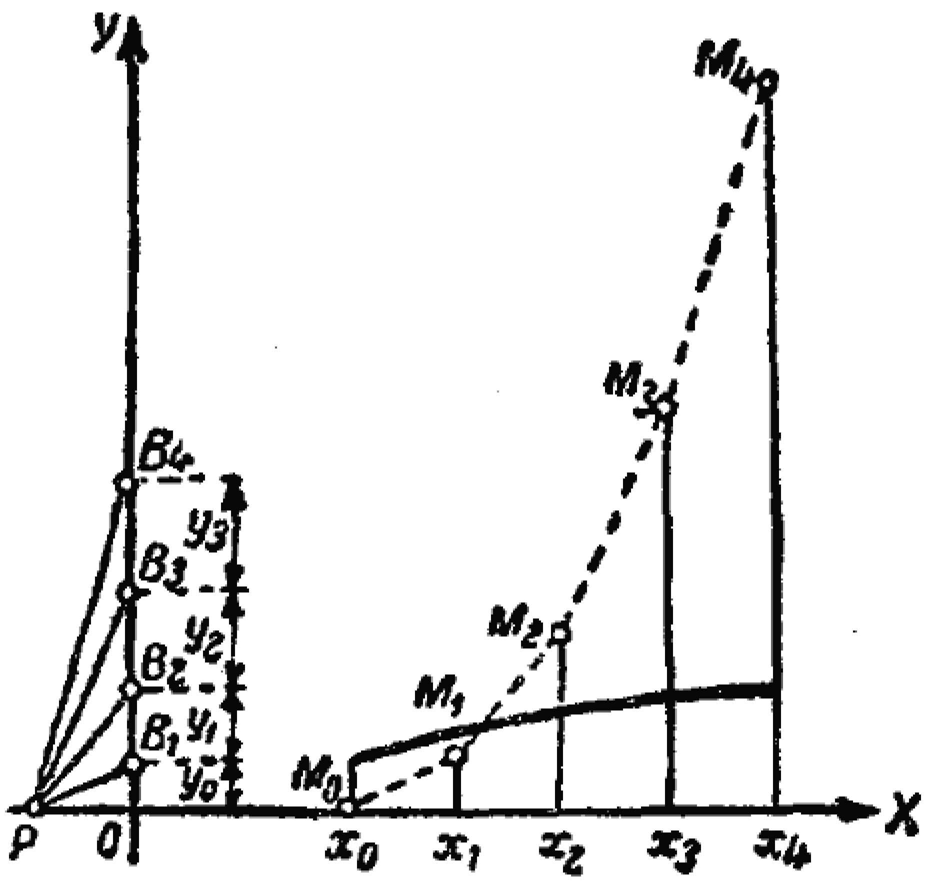


圖 150.

这些点就是要求的近似曲綫上的点，不过單位長的比是$(1:h)$，因为由作圖显然

$$\overline{x_1M_1}=hy_0,\quad \overline{x_2M_2}=hy_0+h(y_0+y_1),\ \cdots$$

$$\overline{x_kM_k}=hy_0+h(y_0+y_1)+\cdots+h(y_0+y_1+\cdots+y_{k-1})\approx\frac{\Phi(x_k)}{h},$$

根据(52)。若OP之長不是1，而是l，則两个圖形所用的單位長之比为$1:lh$。

上述作圖法的准确性很难說，这只能在不精細的計算中应用。

113. 摆动很密的曲綫下的面积　以上[110]我們說过，为要在計算定积分时，应用各种近似公式，得到很好的結果；須要在分割确定面积的曲綫时，使得每一段都很平。

对于上下摆动很多的曲綫，这个要求是很难滿足的。用上述的方法来确定这样的曲綫下的面积，就要分为非常多份，以致于計算起来非常复杂。

在这情形下要用另外一个方法，就是分割这面积时，不用平行于OY軸的竪条，而用平行于OX軸的横条：为要确定如圖151所示的曲綫下的面积，在OY軸上取这曲綫的縱坐标的最小值α与最大值β，由点：

$$y_0=\alpha,\ y_1,\ \cdots,\ y_{i-1},\ y_i,\ \cdots,\ y_{n-1},\ y_n=\beta$$

分区間$[\alpha,\beta]$为n份。

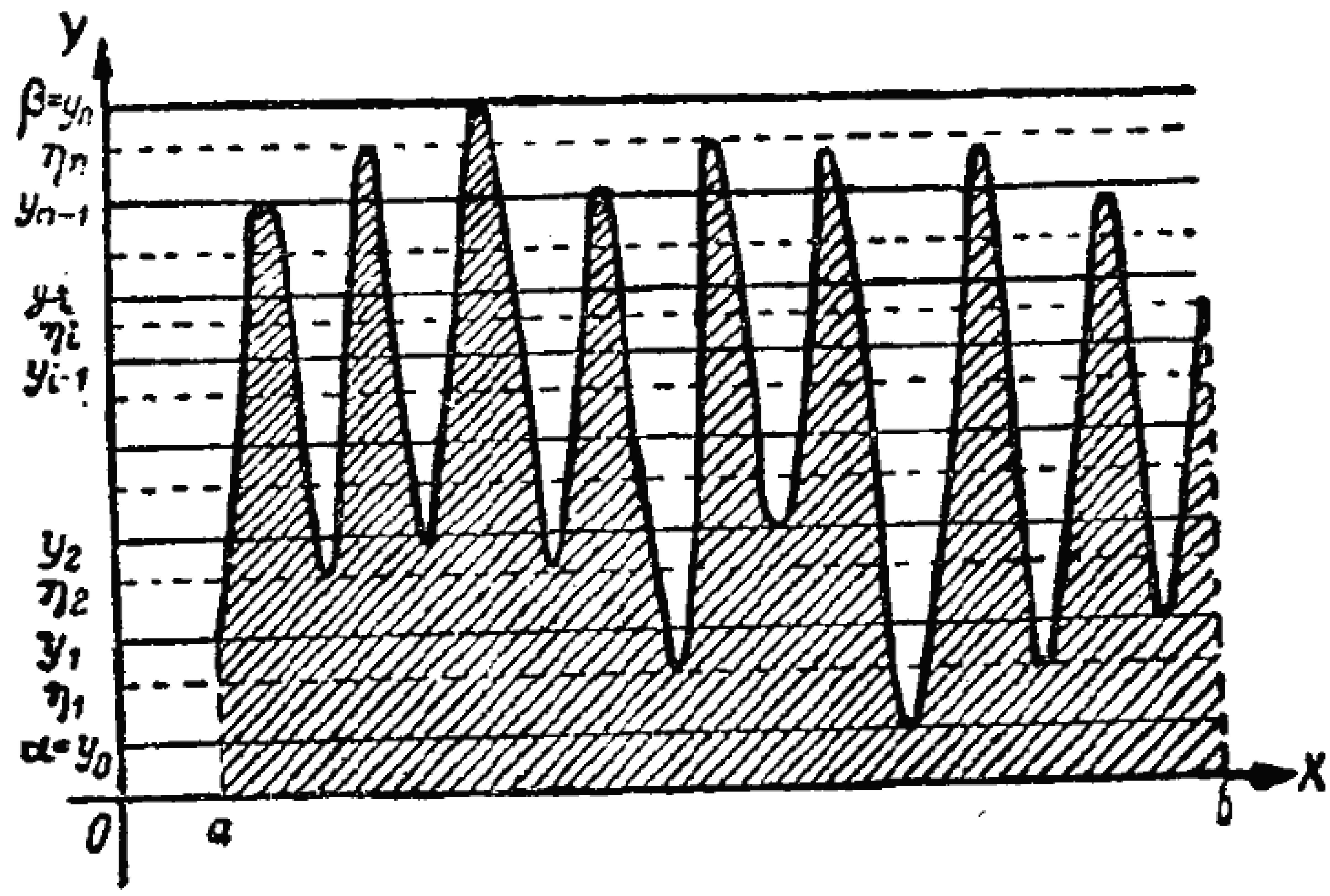


圖　151.

过这些分点各作平行于OX軸的直綫，把全部面积分为断开的狹条；取任意一条直綫

$$y=\eta_i \quad (y_{i-1}\leqslant\eta_i\leqslant y_i)$$

被所考虑的面积截下諸段的長度之和，这个和直接由圖上确定，記作 l_i，取 l_i，与 (y_i-y_{i-1})的乘积作为第 i 条的近似表达式。我們就得到未知面积 S 的一个近似表达式：

$$y_0(b-a)+(y_1-y_0)l_1+(y_2-y_1)l_2+\cdots+(y_n-y_{n-1})l_n。$$

分割的份数愈多而摆动愈陡时，它愈准确。

由这个方法的基本精神發展，就引起勒貝格积分的概念，比上述的黎曼积分的概念广泛得多[94,116]。

§11. 关于定积分的补充知識

114. 补充概念 这一节中我們專从分析方面来考虑定积分的概念，以下我們証明和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

的極限的存在性，不限于連續函数的情形。为此，我們必須先引入一些与所考虑的非連續函数有关的新概念。設函数 $f(x)$ 定义于某一有限区間 $[a,b]$ 上。我們将只考虑有界函数，就是这样的函数，在指定的区間上它所有的值的絕对值，都小于某一个确定的正数，就是，若有这样一个正数 M 存在，使得当 x 取在区間 $[a,b]$ 上任意一个值时，

$$|f(x)|\leqslant M,$$

函数 $f(x)$ 就叫做在区間 $[a,b]$ 上有界。

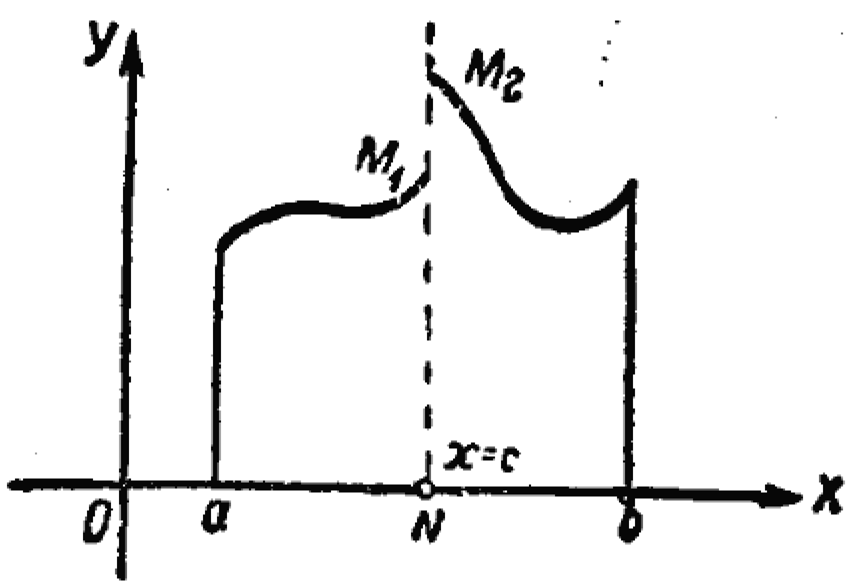


圖 152.

若函数 $f(x)$ 連續，則如在[35]中所述，它在这区間上达到一个最大值与一个最小值，所以显然是有界的。反之，非連續函数可能是有界的，可能是无界的。以下我們只考虑有界的非連續函数。例如，設函数 $f(x)$ 有圖形，如圖 152 所示。在点 $x=c$，这函数的連續性間断了，而函数在点 $x=c$ 的值，就是 $f(c)$，应該用某种方法补充定义。在其余的

点，以至于在区間的两端 a 与 b，这函数都是連續的。此外，当 x 取較小的值，就是自左，趋向 c 时，縱坐标 $f(x)$ 趋向一个确定的極限，圖形上由綫段 $\overline{NM_1}$ 表示。相同的，当 x 取較大的值，就是自右，趋向 c 时，$f(x)$ 也趋向一个确定的極限，由綫段 $\overline{NM_2}$ 表示，这个極限与上述自左的極限不同。自左的極限普通記作 $f(c-0)$，自右的極限記作 $f(c+0)$ [**32**]。这种最簡單的函数的連續性的間断点，在这間断点自左自右都有确定的有限極限存在，叫做第一类間断点。在这点 $x=c$，函数的值，就是 $f(c)$，一般說来不見得是 $f(c-0)$，也不見得是 $f(c+0)$，应当补充定义。若一个函数在区間 $[a, b]$ 上，除去在有限个第一类間断点外，是連續的，則这函数的圖形是有限段的連續曲綫，每一段在相邻两个間断点間(圖 153)。这样的函数，縱然是不連續的，但显然在这区間上是有界的。有更复杂的間断点的函数，也可能是有界的。

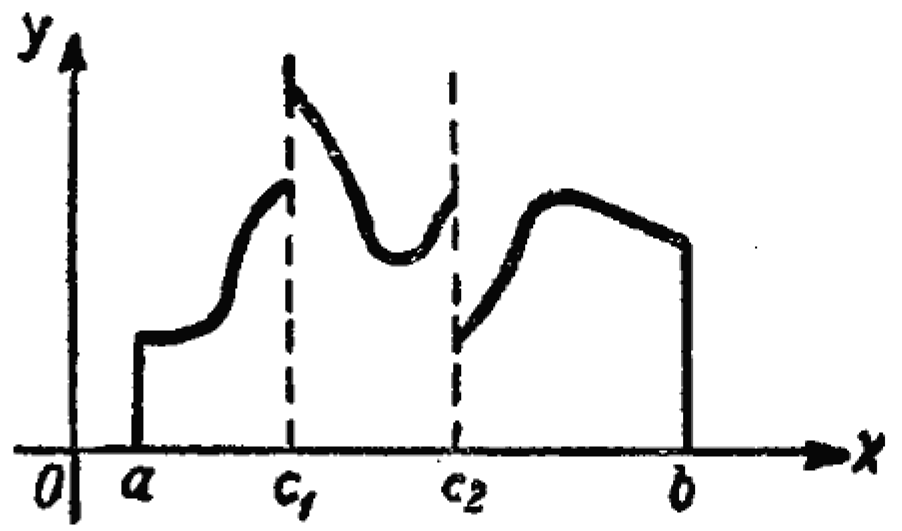


圖 153.

以下我們常要考慮，当自变量在任一給定区間上改变时，某一函数 $f(x)$ 所取的全部的值的集合。若所取的函数，在考慮的区間上是有界的，則在这区間上，它的值的集合有上界也有下界，所以这个集合有上确界与下确界[**39**]。例如，若 $f(x)$ 在考慮的(閉)区間上連續，則由[**35**]知道，它在这区間上达到一个最大值与一个最小值。在这情形下，这函数的最大值与最小值，就是在考慮的区間上，$f(x)$ 的值的上确界与下确界。再考慮另一个例，若函数 $f(x)$ 是上升函数，則它在区間右端取最大值，左端取最小值。像上面一样，这两个值就是 $f(x)$ 的值的上确界与下确界。在这两个例中，函数值的确界就是函数的特殊值，就是說，它們屬于所考慮的函数值的集合。对于較复杂的不連續函数，函数值的确界可能不是函数的值，就是它們可能不屬于函数值的集合。

設在区間$[c, d]$上，就是$c\leqslant x\leqslant d$，$f(x)$的值的上确界与下确界，各为M与m，显然$m\leqslant M$。取一个新的区間$[c', d']$，是原来区間$[c, d]$的一个部分区間。設在这新区間上，$f(x)$的值的上确界与下确界各为M'与m'。因为在任何情形下，在区間$[c', d']$上$f(x)$的值的集合，包含于在較广的区間$[c, d]$上$f(x)$的值的集合中，就可以肯定$M'\leqslant M$而且$m'\geqslant m$，就是，若变量x所在的区間，換成它的一个部分区間，則函数$f(x)$的值的上确界不会增大，而且下确界不会减小。这个情形以后对我們是很重要的。

115. 达尔补定理 設函数$f(x)$在区間$[a, b]$上是有界的，在这区間上它的下确界与上确界各为m与M。由x的值：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

分$[a,b]$为部分区間，这样得到的每一个部分区間的長度記作$\delta_k=x_k-x_{k-1}(k=1, 2, \cdots, n)$。設$x=\xi_k$是区間$[x_{k-1}, x_k]$上的某一个值$(k=1, 2, \cdots, n)$。作乘积的和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k。 \qquad (1)$$

这个和的值依賴于，第一，分区間$[a, b]$的方法，第二，在每一个部分区間中选出的值$x=\xi_k$。我們的問題是要討論，当部分区間的数目n无限增加，而且δ_k中之最大的趋向零时，上面所写的和的極限。須要弄清楚在什么情形下才能談这个極限，就是須要弄清楚，对于什么样的函数，和(1)趋向于一个确定的極限，不依賴于分区間的方法以及ξ_k的选擇。

考虑在每一个区間$[x_{k-1}, x_k]$上$f(x)$的值。設在区間$[x_{k-1}, x_k]$上$f(x)$的上确界与下确界各为M_k与m_k。在和(1)的諸項中，用M_k或m_k来替代未定的$f(\xi_k)$。

如此，我們引出下面两个和：

$$S=\sum_{k=1}^{n} M_k\,\delta_k, \qquad (2)$$

$$s=\sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k, \tag{3}$$

由确界的定义，直接推出不等式

$$m_k\leqslant f(\xi_k)\leqslant M_k,$$

又因为 δ_k 都是正的，我們就有：

$$s\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k\leqslant S。 \tag{4}$$

我們先仔細考虑和 S 与 s，然后再討論較普遍的和(1)。依照上一段中所述，在任何情形下，数 M_k 与 m_k 滿足不等式

$$m\leqslant m_k\leqslant M_k\leqslant M,$$

并且显然：

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_k=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=b-a。$$

由此直接推出下面的不等式：

$$m\delta_k\leqslant M_k\delta_k\leqslant M\delta_k,\quad m\delta_k\leqslant m_k\delta_k\leqslant M\delta_k。$$

因此，依 k 求和，就得到：

$$m(b-a)\leqslant\sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k\leqslant M(b-a),\ m(b-a)\leqslant\sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k\leqslant M(b-a),$$

就是，无論区間怎样分法，在任何情形下，和 S 与 s 都在 $m(b-a)$ 与 $M(b-a)$ 之間。

若考虑区間 $[a,b]$ 的所有的可能的分法，則得到和(2)的值的一个无穷集合，以及和(3)的值的一个无穷集合。由以上所述推出这两个集合都是有界的，于是这两个集合各有上确界与下确界。

再仔細看和 S，現在我們算作函数 $f(x)$ 所有的值都是正的，这时和 S 中所有的项也都是正的。設先将区間 $[a,b]$ 分定，各为 δ_k；于是和 S 就有一个确定的值。

然后我們再分这些区間 δ_k①。例如，設某一区間 δ_k 分成三份：

① 这里我們把区間的名字与区間的長都記作 δ_k。

$\delta_k^{(1)},\delta_k^{(2)},\delta_k^{(3)}$，在区間 $\delta_k^{(1)},\delta_k^{(2)},\delta_k^{(3)}$ 上 $f(x)$ 的上确界各为 $M_k^{(1)},M_k^{(2)}$, $M_k^{(3)}$。

根据上一段中所述，在任何情形下，这些上确界不大于在整个区間 δ_k 上的上确界，就是

$$M_k^{(1)},\ M_k^{(2)},\ M_k^{(3)}\leqslant M_k。\qquad (5)$$

并且显然

$$\delta_k^{(1)}+\delta_k^{(2)}+\delta_k^{(3)}=\delta_k。\qquad (6)$$

和 S 中 $M_k\delta_k$ 这一項，如上述分 δ_k 为三部分后，就换成

$$M_k^{(1)}\delta_k^{(1)}+M_k^{(2)}\delta_k^{(2)}+M_k^{(3)}\delta_k^{(3)}$$

三項；根据关系式(5)与(6)就有：

$$M_k^{(1)}\delta_k^{(1)}+M_k^{(2)}\delta_k^{(2)}+M_k^{(3)}\delta_k^{(3)}\leqslant M_k\delta_k,\qquad (7)$$

就是，若区間先行分定，再把部分区間 δ_k 分成几个更小的部分，这时和 S 只能减小，严格的説应該是不能增大。以下我們的考虑，常不是新和的全部，而只是它的項的一部，就是我們把部分区間再分小后，常从得到的新和的項中去掉一部。因为所有的項都是正的，所以去掉某些項后，只能使整个和的值减小，就是，把部分区間 δ_k 再分小后，去掉某些項，不会使未知和 S 增大。

我們已經比較了区間 $[a,b]$ 在两个分法下和 S 的值，这两个分法，其中一个是由另一个繼續分而保持原来分点的。若比較在区間 $[a,b]$ 的任意两个分法下和 S 的值，一般得不出它們之間的簡單关系。但是，当在两个分法下，部分区間 δ_k 都足够小时，两个和 S 的值彼此很近。严格来説，就是可以証明，当部分数 n 无限增加，而最大的 δ_k 无限减小时，和 S 趋向一个确定的極限，不依賴于区間 $[a,b]$ 的分法。

現在我們証明这个对以下很重要的命題。

考虑由区間 $[a,b]$ 的所有的可能的分法得到的和 S 的所有的值。这些和 S 的值的集合是有界的，設 L 是这集合的下确界。我們要証明这个数 L 就是上述的和 S 的極限。

依照下确界的定义，对于 S 所有的値，我們有不等式 $L\leqslant S$。为要証明 L 是 S 的極限这个肯定，須要証明，当任意給定一个小的正数 ε 时，有这样一个正数 η 存在，使得只要所有部分区間 δ_k 的長都小于 η 时，任何一个和 S 都小于 $L+\varepsilon$。

依照下确界的定义，我們知道既然 L 是 S 的値的下确界，就一定有这样一个完全确定的分法(I)存在，分成 δ_k'，使得对应于这个分法的和 S，我們記作 S'，要小于 $\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)$。設 p 是用分法(I)时整个区間 $[a, b]$ 上的分点的数目。現在考虑区間 $[a, b]$ 的任意一个分法(II)，用 (x_{k-1}, x_k) 記分成的部分，δ_k 記它們的長。分所有的区間 δ_k 为两組。

凡是整个包含于某一区間 δ_k' 中的屬于第一組，不包含于任一区間 δ_k' 的屬于第二組。第一組的区間之長記作 σ_l，第二組的区間之長記作 τ_m，設在区間 σ_l 以及 τ_m 上 $f(x)$ 的上确界各为 μ_l 以及 ν_m。附标 l 与 m 各通过一串正整数値，我們不注意它們各有多少，以下遇到对这两个記号取和时，我們不注明由几到几，意思是指对所有的第一組或第二組取和。把区間 δ_k 分成两組后，則在分法(II)下，和 S 也分成两个和：

$$S=S_1+S_2,$$

其中

$$S_1=\sum \mu_l\sigma_l, \qquad S_2=\sum \nu_m\tau_m。$$

任一区間 σ_l 是某一区間 δ_k' 的一部分，但是所有的区間 σ_l 不見得能充滿所有的区間 δ_k'，于是和 S_1 可以由和 S' 得来，只要把区間 δ_k' 再分小，然后去掉些項成了。由以上所述，可以肯定，S_1 不大于 S'；再根据 $S'<L+\frac{\varepsilon}{2}$；我們可以写成：

$$S_1<L+\frac{\varepsilon}{2}。\tag{7$_1$}$$

現在考虑第二个和 S_2。这里区間 τ_m 跨过几个区間 δ_k'(至少两个)，就是每个 τ_m 含有分法(I)的分点，所以和 S_2 的項数不超过 p，p 是一个已經确定的正整数。所有的 ν_m 不会超过在区間 $[a, b]$ 上函数 $f(x)$

的上确界 M。若把 τ_m 的長度中之最大的記作 τ，則和 S_2 中每一項都不大于 $M\tau$，于是推出，对于整个这个和有不等式：

$$S_2 \leqslant M\cdot\tau\cdot p。\tag{8}$$

現在取数 η 等于 $\frac{\varepsilon}{2Mp}$，可以証明它満足上面所要的条件。我們算作在分法(II)之下，所有的部分区間之長 δ_k 都満足不等式：

$$\delta_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2Mp}。\tag{9}$$

因为 τ_m 是区間 δ_k 中的一部，所以，$\tau_m \leqslant \frac{\varepsilon}{2Mp}$，就是

$$\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2Mp}。$$

由不等式(8)推出

$$S_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}。\tag{10}$$

由不等式(7_1)与(10)，我們得到：

$$S < L + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = L + \varepsilon。$$

所以，用任何分法分区間$[a, b]$，只要每一个部分区間之長満足不等式(9)，对于和 S 就有不等式：

$$L \leqslant S < L + \varepsilon。$$

因为所給的正数 ε 可以随意小，我們由此断定，L 就是和 S 的極限。

以上算作 $f(x)$ 所有的値都是正的。若不如此，在任何情形下，只要 $f(x)$ 是有界的，就可以加上一个正数 A，使新函数 $\psi(x) = f(x) + A$ 是正的。根据以上所述，我們的断語对于这新函数是已經証明的，就是对于这个新函数，和 S 有一个确定的極限。注意，显然，在区間$[x_{k-1}, x_k]$上，$\psi(x)$ 的上确界等于 $M_k + A$，我們看出，对于函数 $\psi(x)$，这个和有下面的样子：

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k+A)\delta_k=\sum_{k=1}^{n}M_k\delta_k+A\sum_{k=1}^{n}\delta_k=\sum_{k=1}^{n}M_k\delta_k+A(b-a),$$

其中 M_k 是 $f(x)$ 在区間 δ_k 上的上确界。

把这公式写成：

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k+A)\delta_k=\sum_{k=1}^{n}M_k\delta_k+A(b-a)。$$

如上所述，左边的和有一个确定的極限，等于这样的和的值的下确界。

右边有两項，其中之一 $A(b-a)$ 是个常量，于是我們可以肯定另一項

$$\sum_{k=1}^{n}M_k\delta_k$$

也有一个确定的極限，就等于这里写的和的值的下确界。

如此我們証明，在一个有限区間上，对于任何一个有界函数 $f(x)$，和 S 有一个确定的極限。同样可以証明，当 δ_k 中之最大的无限减小时，和(3)也趋向一个确定的極限 l。这个数 l，就是由区間 $[a, b]$ 的所有的可能的分法得到的所有的和 s 的值的上确界。此外，在同一个分法下，我們比較和 S 与 s 的表达式(2)与(3)，注意 $m_k\leqslant M_k$，我們看出，当分法相同时，在任何情形下，$s\leqslant S$。于是对于它們的極限，我們也得到同样的不等式，就是 $l\leqslant L$。把这結果写成下面的定理，这是法国数学家达尔补首先証明的。

达尔补定理 当分份的数目无限增加，而 δ_k 中之最大的无限减小时，对于任何一个在区間 $[a, b]$ 上有界的函数，和 s 与 S 各趋向确定的極限 l 与 L，并且 $l\leqslant L$。

以上我們說明，l 是 s 的值的上界，L 是 S 的值的下界。注意已經証明了的不等式 $l\leqslant L$，于是我們可以肯定，无論 s 与 S 是由怎样的分法得出来的，$s\leqslant S$。

116. 黎曼意义下的可积函数 如果我們回到一般的和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k \quad (\delta_k = x_k - x_{k-1}), \tag{11}$$

我們就不能肯定的說对于任何一个有界函数，这个和总有極限。

由于这些量 ξ_k 可以由区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 中随意选，于是 $f(\xi_k)$ 的値造成不定性。因此和(11)不是总有一个确定的極限。例如，設达尔补定理中談到的两个極限 l 与 L 不相同，就是 $l<L$。根据上确界与下确界的定义，我們可以选出 ξ_k，使得 $f(\xi_k)$ 与 m_k 差得任意小；也可以选出 ξ_k，使得 $f(\xi_k)$ 与 M_k 差得任意小。在第一种情形下，和(11)的値与对应的 s 的値相差可以任意小。在第二种情形下，它与对应的 S 的値相差可以是任意小。如此，我們可以对应的选出 ξ_k，使得当 δ_k 无限减小时，和(11)或者与 l（和 s 的極限）任意接近，或者与 L（和 S 的極限）任意接近。因为 l 与 L 两个数不等，由此我們看出，当 n 无限增加而 δ_k 中之最大的无限减小时，和(11)沒有一个确定的極限。所以，若 $l<L$，則和(11)沒有一个确定的極限。

現在証明，若 $l=L$，則和(11)有一个确定的極限，等于 $l=L$。实际上，根据上确界与下确界的定义，就有 $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$，于是可以写成：

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k。$$

当 δ_k 中之最大的无限减小时，这不等式的两端趋向同一个極限 $l=L$，于是推知，无論 ξ_k 怎样选擇，和 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k$ 也趋向这个極限。我們知道，这个和的極限叫做 $f(x)$ 沿区間 $[a, b]$ 的定积分，如果这个極限存在，这个函数叫做黎曼意义下的可积函数，或簡称可积函数。因为定积分概念有别的定义，那时，可积的条件就不同了。为要区别以上所述的定积分概念与其他的概念，我們說黎曼（十九世紀中，德国数学家）意义下的可积性。以下我們只用黎曼意义下的积分，所以不必再加說明，黎曼意义下的可积函数就簡称为可积函数。

由以上推知，$f(x)$ 可积的一个必要且充分条件是和 s 与 S 的極限 l 与 L 相同，就是当 n 无限增加而 δ_k 中之最大的无限减小时，这两个和之差：

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\delta_k \tag{12}$$

趋向零。和(12)是由非負的項組成的，而且它的值不小于 $L-l$，因为 L 是和(2)的下确界而 l 是和(3)的上确界。注意到这一点以及达尔补定理，可以肯定，可积性（即 l 与 L 相等）的必要充分条件可叙述如下：对于任意給定的正数 ε，存在着区間 $[a, b]$ 的这样的分法，使得和(12)小于 ε。下面我們举出几种满足这个条件的函数类，就是举出几种可积函数类。

I. 若 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上(包括两端)連續，則在这区間上一致連續。并且在每一个区間 δ_i 上，它达到一个最大值 M_i 与一个最小值 m_i。根据 $f(x)$ 的一致連續性，当 δ_i 中之最大的无限减小时，正的差 M_i-m_i 小于任意正数 ε，于是对于全部正的和，就有

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\delta_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\delta_i=\varepsilon(b-a)。$$

由于 ε 可以任意小，于是推知，和(12)趋向零，就是，任何一个連續函数是可积的。

II. 現在設 $f(x)$ 有界，而且有有限个間断点。为确定起見，設它在 (a, b) 內只有一个間断点 $x=c$。有有限个間断点的情形可以同样考虑。因为和(12)的極限不依賴于分区間 (a, b) 的方法，我們証明时，允許采取任何方法，只要每个 δ_i 都趋向零就成。在区間 (a, b) 中作一个区間 (a_1, b_1)，使点 c 在 (a_1, b_1) 內(圖 154)。以后我們再严格确定这个区間。

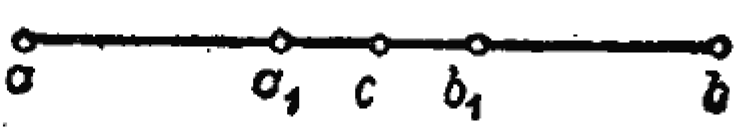


圖 154.

根据函数 $f(x)$ 的有界性，我們有 $|f(x)|<N$，就是所有的 $M_i<N$，而所有的 $m_i>-N$，就是

$$0\leqslant M_i-m_i\leqslant 2N。\tag{13}$$

設 ε 是一个任意給定的小正数。选定 (a_1, b_1) 使

$$2N(b_1-a_1)<\varepsilon。\tag{14}$$

分区間 (a, b) 时，讓 $x=a_1$ 与 $x=b_1$ 是两个分点。这时和(12)分为三部：和 S_1

对应于区間(a, a_1)；和S_2对应于区間(b_1, b)；以及和S_3对应于区間(a_1, b_1)。

函数$f(x)$在区間$[a, a_1]$上一致連續，如例一，和S_1趋向零。同理，和S_2也趋向零，所以当所有的δ_i足够小时，和S_1与S_2都$<\varepsilon$。

和S_3对应于分布在区間$[a_1, b_1]$上的δ_k，这些δ_k之和显然等于(b_1-a_1)。注意(13)就有：

$$0\leqslant S_3\leqslant\sum 2N\delta_k=2N\sum\delta_k=2N(b_1-a_1),$$

其中的和是对于上述的δ_k作的。根据(14)，就有$S_3<\varepsilon$，于是全部的和(12)就$<3\varepsilon$。因为ε可以任意小，由此可以証明这个和趋向零；就是，任何一个有有限个間断点的有界函数是可积的。[97]中第一个例是这样的函数。

III．設$f(x)$在区間$[a, b]$上是單調有界函数。为确定起見，設这函数不减，就是若$c_1<c_2$，则$f(c_1)\leqslant f(c_2)$。这时，在每个区間δ_i上，$M_i=f(x_i)$，$m_i=f(x_{i-1})$。和(12)就是：

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})](x_i-x_{i-1})。$$

用Δ記差(x_i-x_{i-1})中之最大的。当$n\to\infty$时，$\Delta\to 0$。根据$f(x_i)-f(x_{i-1})\geqslant 0$，可以写成：

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})](x_i-x_{i-1})\leqslant\Delta\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})],$$

就是

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})](x_i-x_{i-1})\leqslant\Delta[f(b)-f(a)]。$$

因为显然

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=[f(x_1)-f(a)]+[f(x_2)-f(x_1)]+$$
$$+\cdots+[f(b)-f(x_{n-1})]=f(b)-f(a)。$$

由此直接看出，和(12)趋向零，就是，任何一个單調有界函数是可积函数。注意單調函数可以有无穷多个間断点，所以(III)的情形不包括在(II)的情形中。可以用这样一个函数作特例，当$0\leqslant x<\frac{1}{2}$时，它等于零；当$\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{2}{3}$时，等于$\frac{1}{2}$；当$\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{3}{4}$时，等于$\frac{2}{3}$，……，最后，当$x=1$时，它等于1。

这个不减函数的間断点是：

$$x=\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\cdots。$$

要声明，單調有界函数，在任何一个間断点，有$f(c-0)$与$f(c+0)$两个极限。

这可以由單調有界序列的極限的存在性直接推知[30]。

在介紹可积性的条件时，我們一直假設 $f(x)$ 是有界的。可以証明这个条件是可积性的必要条件，就是，它是和(11)有确定的極限存在的必要条件。若不滿足有界这个条件，在某些情形下，$f(x)$ 沿 (a, b) 的积分仍然可以确定，但就不是和(11)的極限了。这样的积分叫做反常积分。在[97]中我們已經介紹过反常积分的基本概念。在第二卷中再仔細討論。

若积分区間 (a, b) 的一端或两端是无穷大，沿这区間的定积分的概念也不能直接由和(11)引出。在这情形下，我們也有反常积分(参考卷 II[98])。

117. 可积函数的性質 由以上得到的可积性的必要且充分条件，不难推出可积函数的基本性質。

I 設 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上可积，我們在 $[a, b]$ 中有限个点随意更换 $f(x)$ 的值，这样作成的新函数在 $[a, b]$ 上仍然可积，并且其积分值不变。

我們只考虑在一个点改变 $f(x)$ 的值的情形，例如，在点 $x=a$。新函数 $\varphi(x)$，除 $x=a$ 外，与 $f(x)$ 全同，而 $\varphi(a)$ 可以随意取値。設 m 与 M 各为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的下确界与上确界。若 $\varphi(a)\geqslant m$，$\varphi(x)$ 的下确界就 $\geqslant m$，若 $\varphi(a)<m$，下确界就是 $\varphi(a)$。同样，若 $\varphi(a)\leqslant M$，$\varphi(x)$ 的上确界就 $\leqslant M$，若 $\varphi(a)>M$，上确界就是 $\varphi(a)$。比較对于 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的和(12)，注意它們只是第一項($k=1$)可能不同。但是显然，对于 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$，这个第一項都趋向零，因为 $\delta_1\to 0$，而 M_1-m_1 有界。除第一項外，其余各項的和，显然也趋向零，因为 $f(x)$ 可积，对于 $f(x)$ 整个和(12)趋向零。于是証明了 $\varphi(x)$ 的可积性。至于 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的积分之値相同，是因为作和(11)时我們可以算作 ξ_1 不是 a，而除 $x=a$ 外，在所有的点 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的值相同。

II. 若 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上可积，则它在 $[a, b]$ 的任一部分区間 $[c, d]$ 上也可积。

計算 s 与 S 的極限 l 与 L 时，可以設点 c 与 d 是区間 $[a, b]$ 的分点。这时，对于区間 $[c, d]$ 的和(12)可以由对于区間 $[a, b]$ 的和(12)得

到，只要去掉对应于区間$[a, c]$与$[d, b]$的那些項就成了。注意，所有的項沒有負的，可以肯定，对于区間$[c, d]$的和(12)，小于或等于对于区間$[a, b]$的和(12)之值；而后者趋向零($f(x)$在$[a, b]$上可积)，所以前者也趋向零，就是$f(x)$在$[c, d]$上可积。注意这里c可以与a重合，d可以与b重合。像在[**94**]中完全一样，可以証明

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \quad (a<c<b)。$$

III．若$f(x)$在$[a, b]$上可积，则$cf(x)$在$[a, b]$上也可积，其中c是任何一个常数。

例如，算作$c>0$，可以肯定，对于函数$cf(x)$，要用cm_k与cM_k替代原来的m_k与M_k。和(12)只是多一个常因子c，于是仍趋向零。显然[**94**]中性質V可以像以前一样証明。

IV．若$f_1(x)$与$f_2(x)$在区間$[a, b]$上是可积函数，则它們的和$\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$也在$[a, b]$上可积。

設$f_1(x)$与$f_2(x)$在区間$[x_{k-1}, x_k]$上的下确界与上确界各为m_k'，M_k'，m_k''，M_k''。如此，$f_1(x)$在区間$[x_{k-1}, x_k]$上所有的值大于或等于m_k'，同样$f_2(x)$所有的值大于或等于m_k''。因此，在区間$[x_{k-1}, x_k]$上$\varphi(x)\geqslant m_k'+m_k''$。同理可証，在区間$[x_{k-1}, x_k]$上$\varphi(x)\leqslant M_k'+M_k''$。用$m_k$与$M_k$各記在区間$[x_{k-1}, x_k]$上$\varphi(x)$的下确界与上确界，如此，$m_k\geqslant m_k'+m_k''$而$M_k\leqslant M_k'+M_k''$，由此推出不等式：

$$M_k-m_k\leqslant(M_k'+M_k'')-(m_k'+m_k''),$$

就是

$$M_k-m_k\leqslant(M_k'-m_k')+(M_k''-m_k'')。$$

作对于$\varphi(x)$的和(12)，得到：

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\delta_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}(M_k'-m_k')\delta_k+\sum_{k=1}^{n}(M_k''-m_k'')\delta_k。$$

右边的两个和都趋向零，因为函数$f_1(x)$与$f_2(x)$可积。于是推知，对

于 $\varphi(x)$ 的和(12)，就是和

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\delta_k$$

趋向零，就是 $\varphi(x)$ 也可积。同样可証有限項代数和的情形。[94] 中性質 VI 可以像以前一样証明。

与以上类似可以証明以下的性質

V. 两个在 $[a, b]$ 上可积的函数之乘积 $f_1(x)f_2(x)$，也在 $[a, b]$ 上可积。

VI. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，而在 $[a, b]$ 上函数 $f(x)$ 的下确界 m 与上确界 M 同号，則 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上可积。

VII 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，則 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上也是可积函数。

像以上一样，可証 [95] 中不等式(10)。若 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是可积函数，[95] 中性質 VII 也可証明。中值定理讀作：若 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上可积，而 $\varphi(x)$ 在这区間上保持不变号，則

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\mu\int_a^b\varphi(x)dx,$$

其中 μ 是滿足不等式 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 的一个数，m 与 M 各为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的下确界与上确界。特别是当 $\varphi(x)=1$ 时，

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)。$$

証明也像以前 [95] 一样。应用这个公式，不难推出

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

是 x 的連續函数，而对于任何一个 x 的值，只要 $f(x)$ 在这点連續，則 $F'(x)=f(x)$，最后，我們建立計算可积函数的定积分的基本公式。設 $F_1(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上是連續函数，而对于区間 $[a, b]$ 內任何一个 x 的值，有导数 $F_1'(x)=f(x)$，其中 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上的一个可积函数。

这时基本公式：

$$\int_a^b f(x)dx = F_1(b) - F_1(a)$$

成立。

分区間(a, b)为部分区間(x_{k-1}, x_k)，由[**63**]中有限改变量的公式，可以写成：

$$F_1(x_k) - F_1(x_{k-1}) = F_1'(\xi_k)\delta_k = f(\xi_k)\delta_k \ (x_{k-1} < \xi_k < x_k)。\quad (15)$$

再依 k 求和，并注意[**116**]中 III：

$$\sum_{k=1}^{n} [F_1(x_k) - F_1(x_{k-1})] = F_1(b) - F_1(a),$$

我們得到：

$$F_1(b) - F_1(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k。$$

无論区間怎样分法，只要点 ξ_k 是依改变量的公式(15)选定的，上面这等式就成立。取極限，和换成积分，就得到：

$$F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

于是証完。注意，根据这一段的性質 I，在区間(a, b)两端的$f(x)$的值没有作用。

第四章 級数及其在近似計算中的应用

§ 12 无穷級数理論的基本概念

118．无穷級数的概念 設給定一个无穷数列：

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots。 \qquad (1)$$

作这序列前 n 項的和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad (2)$$

如此我們得到另一个无穷数列：

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots。$$

若当 n 无限增加时，s_n 趋向一个極限(有限的)：

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

我們就說，无穷級数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (3)$$

收斂而有和 s，并且写成：

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots。 \qquad (4)$$

若 s_n 不趋向一个極限，就說无穷級数(3)發散。

換句話說，若一个无穷級数的前 n 項和，当 n 无限增加时，趋向一个極限，这个級数叫做收斂級数，这个極限叫做这个級数的和。

只有在一个无穷級数收斂时，才能談得到这个級数的和，那时級数的前 n 項和叫做級数和 s 的近似表达式。这样的近似表达式的差誤 r_n，就是差

$$r_n = s - s_n,$$

叫做級数的余和。

显然，余和 r_n 就是由給定的級数中去掉前 n 項所得到的无穷級数的和：

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}+\cdots。$$

在很多情形下，这个余和的准确值是不知道的，所以这个余和的近似估計是非常重要的。

最簡單的无穷級数的例是等比級数：

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots \quad (a\neq 0)。 \tag{5}$$

我們分下列几种情形考慮：

$$|q|<1,\ |q|>1,\ q=1,\ q=-1。$$

我們知道[27]，当 $|q|<1$ 时，这等比級数有有限的和 $s=\dfrac{a}{1-q}$，所以是收斂級数，实际上，这时：

$$s_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q},$$

$$s-s_n=\frac{a}{1-q}-\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{aq^n}{1-q},$$

当 $n\to\infty$ 时，$s-s_n\to 0$，因为当 $|q|<1$ 时，$q^n\to 0$[26]。当 $|q|>1$ 时，由 s_n 的表达式看出，$n\to\infty$ 时，$s_n\to\infty$；因为 $|q|>1$ 时，$q^n\to\infty$[29]。当 $q=1$ 时，$s_n=an$，显然 $s_n\to\infty$，所以当 $|q|>1$ 与 $q=1$ 时，这个等比級数是發散級数。当 $q=-1$ 时，我們得到級数：

$$a-a+a-a+\cdots。$$

当 n 是偶数时，这級数的前 n 項和等于零；若 n 是奇数，就等于 a，就是，s_n 不趋向一个極限，于是这級数發散；但是，这与以上的情形不同，對于所有的 n 的值，級数的前 n 項和只取 0 与 a 两个值，所以是有界的。

若当 n 无限增加时，級数的前 n 項和 s_n（3）的絕對值趋向无穷大，則級数（1）叫做正常發散級数。以后，为簡單起見，我們談到正常發散

級数时，就簡称發散級数。

119. 无穷級数的基本性質 收斂无穷級数具有一些像有限項和那样的性質。

I. 若級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

有和 s，則每項乘一个常数 a 得到的級数：

$$au_1+au_2+\cdots+au_n+\cdots \tag{6}$$

有和 as，因为級数(6)的前 n 項和 σ_n 是

$$\sigma_n=au_1+au_2+\cdots+au_n=as_n,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}as_n=a\lim_{n\to\infty}s_n=as。$$

II. 收斂級数可以逐項相加或逐項相减，就是說若

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s,$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots=\sigma,$$

則級数

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots \tag{7}$$

也收斂，它的和等于 $s\pm\sigma$，因为这級数的前 n 項和

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)=s_n\pm\sigma_n,$$

当 $n\to\infty$ 时，它趋向 $s\pm\sigma$。

关于和的其他的性質，例如，和不依賴于項的排列次序，两个和相乘的法則等，如何应用于无穷級数将在下面 § 14 中考慮。現在只提出，这些并不是對于任何收斂級数都成立。显然，結合律對于任何收斂級数都成立，就是可以依序把任意几項作为一組先相加。这样作，不过是相当于由一部的 s_n 替代全部的 $s_n(n=1, 2, 3, \cdots)$，所以極限 s 不变。

III. 在級数前面加上有限項，或去掉前有限項，不影响級数的收斂性或發散性。实际上，考慮下面两个級数：

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots,$$

$$u_3+u_4+u_5+u_6+\cdots。$$

第二个是由第一个去掉前两項得到的。若用 s_n 記第一个級数的前 n 項和，用 σ_n 記第二个級数的前 n 項和，則显然：

$$\sigma_{n-2}=s_n-(u_1+u_2),\quad s_n=\sigma_{n-2}+(u_1+u_2),$$

并且若 $n\to\infty$，則 $(n-2)\to\infty$。由此看出，若 s_n 有極限，則 σ_{n-2} 也有極限，反之亦然。这两个極限 s 与 σ，也就是所取的两个級数之和，是不同的，而且 $\sigma=s-(u_1+u_2)$。

IV．当 n 无限增加时，任何一个收斂級数的一般項 u_n 趋向零：

$$\lim u_n=0, \tag{8}$$

因为显然

$$u_n=s_n-s_{n-1},$$

于是若級数收斂而有和 s，則

$$\lim s_{n-1}=\lim s_n=s,$$

因此

$$\lim u_n=\lim s_n-\lim s_{n-1}=s-s=0。$$

如此，条件(8)是收斂級数的必要条件，但不是充分条件；有的級数縱然一般項趋向零，仍然可能是發散的。

例 調和級数：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}。 \tag{9}$$

現在，当 $n\to\infty$ 时，

$$u_n=\frac{1}{n}\to 0。$$

不难証明級数(9)的前 n 項和无限增大。为此，自第二項起我們依序把一項，两項，四項，八項，…放在一起

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots,$$

如此在第 k 个括号里有 2^{k-1} 項。若把每个括号里所有的項都换成最末一項，就是这括号里的最小的一項，就得到一个級数：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 8+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots, \tag{10}$$

它的前 n 項和等于 $\left[1+\frac{1}{2}(n-1)\right]$，显然趋向 $(+\infty)$。項数足够多时，級数(9)中每个括号內的值比級数(10)的对应項大，于是取到 $(n-1)$ 个括号之和大于 $\left[1+\frac{1}{2}(n-1)\right]$，因此显然，对于級数(9)，$s_n\to+\infty$。

120. 正項級数。收斂性的判别法 特别重要的級数是正項級数，其中所有的数：

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots\geqslant 0。$$

以下我們講正項級数收斂与發散的判别法。

1. 正項級数一定是或者收斂，或者正常發散，就是

或者 $s_n\to s$，或者 $s_n\to+\infty$。

因此，正項級数收斂的一个必要且充分条件，是對任何的 n，它的前 n 項和，保持小于某一与 n 无关的常数 A。

实际上，對于这样的級数，当 n 增加时，s_n 不减小，因为总是加上新的正項，于是我們的断言可由以前所講的增加变量的性質[**30**]推出。

为要判断正項級数是收斂还是發散，常是拿它們与一个較簡單的級数比較，特别是与等比級数比較。

为此我們有下面的判别法：

2. 若正項級数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{11}$$

中，由某一項起，以后每一項都不大于一个收斂級数

$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots \tag{12}$$

的對应項，則級数(11)也收斂。

反之，若由某一項起，級数(11)的每一項都不小于一个正項發散級数(12)的對应項，則級数(11)也發散。

先設

$$u_n\leqslant v_n, \tag{13}$$

幷且級数 (12) 收斂。我們可以算作这不等式對于所有 n 的値都成立，这幷不失去一般性，因为有必要的話，我們可以把前面若干不滿足这不等式的項去掉([**119**] 性質 III)。用 s_n 記級数 (11) 的前 n 項和，σ_n 記級数(12)的前 n 項和，根据(13)就有

$$s_n \leqslant \sigma_n.$$

但是已知級数(12)收斂，用σ 記級数(12)的和，就有：

$$\sigma_n \leqslant \sigma,$$

所以

$$s_n \leqslant \sigma,$$

因此，根据 1，推出級数(11)收斂。

現在設滿足不等式

$$u_n \geqslant v_n. \tag{14}$$

显然就有

$$s_n \geqslant \sigma_n, \tag{15}$$

但是現在級数(12)發散，于是它的前 n 項和 σ_n 可以作的大于一个任意給定的数；根据(15)，s_n 就也有同样的性質，就是級数(11)也發散。

附注 若級数(12)收斂(或發散)，則級数

$$kv_1 + kv_2 + kv_3 + \cdots + kv_n + \cdots$$

也收斂(或發散)，其中 k 是任何一个正的常数。

实际上，根据 [**119**]I，由級数 $\sum v_n$ 收斂推知級数 $\sum kv_n$ 收斂。反之，若 $\sum v_n$ 發散，則級数 $\sum kv_n$ 也应当發散，因为，假設它收斂，各項乘以 $\frac{1}{k}$ 根据[**119**]I，$\sum v_n$ 就要收斂，所以不可能。由以上所述推出下面的判别法：

若

$$u_n \leqslant kv_n, \tag{16}$$

其中 k 是任意一个正数，而級数 $\sum v_n$ 收斂，則級数(11)也收斂，若

$$u_n \geqslant kv_n, \tag{17}$$

而級数 $\sum v_n$ 發散，則級数(11)也發散。

由給定的級数与等比級数来比較，我們得到正項級数收斂性的两个基本的判別法。

121．勾犀判別法与达朗倍尔判別法

3．勾犀判別法　若正項級数(11)：

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

由某一項起，其普遍項滿足不等式：

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1, \tag{18}$$

其中 q 不依賴于 n，則这級数收斂。

反之，若由某一項起，

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1, \tag{19}$$

則級数(11)發散。

我們可以設對于所有的 n 的值，都滿足不等式(18)或(19)，这并不失去一般性([**119**]性質III)。若滿足(18)，則

$$u_n\leqslant q^n,$$

就是，所給的級数的一般項不大于一个无穷减小等比級数的對应項，所以根据(2)，这个級数收斂。至于(19)的情形，我們有：

$$u_n\geqslant 1,$$

于是級数(11)的一般項不趋向零（大于一）所以不能收斂（[**119**] 性質IV)。

4．达朗倍尔判別法　若級数的相邻两項之比(后項比前項)

$$\frac{u_n}{u_{n-1}},$$

由某一項起，滿足不等式：

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q<1, \tag{20}$$

其中 q 不依賴于 n，則級数(11)收斂。

反之，若由某一項起，

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \geqslant 1, \tag{21}$$

則所給的級数發散。

像以前一样，我們設對于所有 n 的值，都滿足不等式(20)，就有：

$$u_n \leqslant u_{n-1}q, \quad u_{n-1} \leqslant u_{n-2}q, \quad u_{n-2} \leqslant u_{n-3}q, \quad \cdots, \quad u_2 \leqslant u_1 q,$$

由此，逐步代入，就得到：

$$u_n \leqslant u_1 q^{n-1},$$

就是，这級数的項不大于減小等比級数

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \cdots + u_1 q^{n-1} + \cdots \quad (0 < q < 1)$$

的對应項，于是根据 2，这級数收斂。至于(21)的情形：

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \cdots \leqslant u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant \cdots,$$

就是这級数的項从开始就不減小，于是推知，当 $n \to \infty$ 时，u_n 不趋向零，于是級数不能收斂([**119**]性質IV)。

系　若当 n 无限增加时

$$\sqrt[n]{u_n} \text{ 或 } \frac{u_n}{u_{n-1}} \tag{22}$$

趋向一个有限的極限 r，則級数：

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

当 $r < 1$ 时收斂，$r > 1$ 时發散。

先設 $r < 1$。选定一个这样小的正数 ε，使得

$$r + \varepsilon < 1。$$

当 n 相当大时，$\sqrt[n]{u_n}$ 或 $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ 与極限 r 之差就不大于 ε，就是由 n 的一个足够大的值起，我們有：

$$r - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant r + \varepsilon < 1 \tag{23$_1$}$$

或

$$r - \varepsilon \leqslant \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant r + \varepsilon < 1。 \tag{23$_2$}$$

应用勾犀，或达朗倍尔判别法，讓 $q=r+\varepsilon<1$，根据(23_1)或(23_2)，立刻断定所給的級数收斂。

类似这方法可証当 $r>1$ 时級数發散。若表达式 (22) 中有一个趋向$(+\infty)$，級数也一定發散。

例 1. 級数：

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}。\tag{24}$$

应用达朗倍尔判别法：

$$u_{n+1}=\frac{x^n}{n!},\ u_n=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{n},$$

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{x}{n}\to 0$，所以当 x 取任意一个有限值(正的)时，这級数收斂。

2. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}。\tag{25}$$

現在

$$u_n=\frac{x^n}{n},\ u_{n-1}=\frac{x^{n-1}}{n-1},\ \frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{n-1}{n}x\to x。$$

所以，依达朗倍尔判别法，当 $0\leqslant x<1$ 时，这級数收斂，当 $x>1$ 时發散。

3 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin^2 n\alpha。\tag{26}$$

应用勾犀判别法，

$$u_n=r^n\sin^2 n\alpha,\quad \sqrt[n]{u_n}=r\sqrt[n]{\sin^2 n\alpha}\leqslant r,$$

所以，若 $0\leqslant r<1$，所給的級数收斂。

在这情形下，用达朗倍尔判别法得不到結果，因为比

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=r\left[\frac{\sin n\alpha}{\sin(n-1)\alpha}\right]^2$$

不趋向一个極限，也不是总 <1 或 $\geqslant 1$。

一般而言，勾犀判别法比达朗倍尔判别法强，就是，可以用达朗倍尔判别法时，用勾犀判别法也可以解决，但是有时勾犀判别法可以解决，而达朗倍尔判别法不能。不过勾犀判别法用起来比达朗倍尔判别法复杂，由上面第一第二两个例就可以看出来。

还要注意，有的时候应用这两个判别法都不解决問題；例如，在

$$\sqrt[n]{u_n} \text{ 与 } \frac{u_n}{u_{n-1}} \to 1$$

时的情形，也就是当 $r=1$ 时的情形。这时我們遇到收斂或發散的可疑情形，应当另找方法解决。

例如，調和級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

由[119]我們知道，它是發散級数；这时

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n-1}{n} \to 1, \ \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}} \to 1, ①$$

如此，調和級数的收斂或發散問題，就不能用勾犀或达朗倍尔判別法解决。

从另一方面看，以后我們可以証明，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

是收斂級数。

但是对于它我們也有：

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \to 1, \quad \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 \to 1,$$

就是若应用勾犀或达朗倍尔判別法，也是可疑情形。

122. 勾犀积分判别法 設給定的級数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{27}$$

的項是正的，而且是不增的，就是

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \cdots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \cdots > 0。 \tag{28}$$

把級数的各項标記在圖上，自变量 n 取在横軸上，縱軸取對应的 u_n 的值（圖 155）。总可以作一个連續函数 $y=f(x)$，使得，当 $x=n$（整数）时，函数值取 u_n 的値；这只要过所有作出的点引一条連續曲綫，現在我們算作函数 $y=f(x)$ 是不增的。

在圖上，这級数的前 n 項和：

---

① 設 $x=\frac{1}{n}$，則 $x\to 0$，于是 $\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}=x\log x\to 0$[66]。因此 $e^{\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}}$ 趋向 1。

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

由高出的矩形的面积和表示，它把界于曲綫 $y=f(x)$, OX 軸与縱坐标 $x=1$, $x=n+1$ 之間的面积包在內，所以

$$s_n\geqslant\int_1^{n+1}f(x)\,dx。\qquad (29)$$

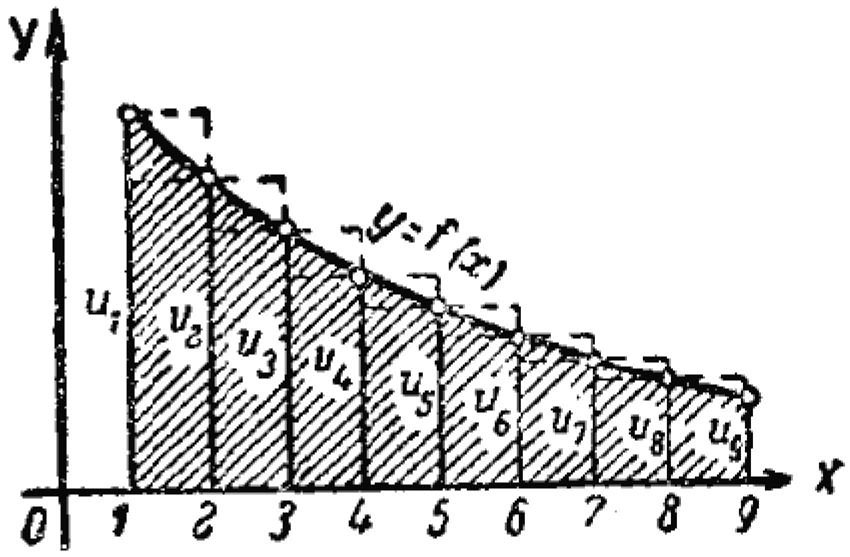


圖 155.

另一方面，曲綫下的面积包有它下面的那些矩形，它們的面积和等于：

$$u_2+u_3+u_4+\cdots+u_{n+1}=s_{n+1}-u_1, \qquad (30)$$

所以

$$s_{n+1}-u_1\leqslant\int_1^{n+1}f(x)\,dx。\qquad (31)$$

这两个不等式引导給我們下面这个判别法。

5. 勾犀积分判别法 若級数(27)：

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,\quad u_n=f(n)$$

的項是正的，而且当 n 增加时，$f(n)$ 不增，則这級数是收斂还是發散，要看积分

$$I=\int_1^{\infty}f(x)\,dx \qquad (32)$$

是有限值还是成为无穷大。

記住，这时 $f(x)$ 应当是减函数。

先設积分 I 有有限值，就是曲綫 $y=f(x)$ 下有有限面积[98]。由于 $f(x)$ 是正的，推知：

$$\int_1^{n+1}f(x)\,dx<\int_1^{\infty}f(x)\,dx,$$

所以，根据(31)：

$$s_n<s_{n+1}\leqslant u_1+I,$$

就是，對于所有的 n 的値，s_n 是有界的，于是，由[**120**]基本判别法 1，級数(27)是收斂的。

現在設 $I=\infty$，就是积分

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

当 n 增加时，可以作得大于任意一个給定的大数 N。这时，根据(29)，和 s_n 也可以作得大于 N，就是，級数(27)是正常發散的。

类似的可以証明，級数(27)的余和不大于积分

$$\int_n^{\infty} f(x)\,dx。$$

附注　应用勾犀积分判别法时，可以用积分

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

来替代 I，其中 a 是任何一个大于一的正数。

实际上，若由縱坐标 $x=1$ 算起，曲綫 $y=f(x)$ 下有有限面积，則由縱坐标 $x=a$ 算起，也有有限面积；反之亦然。若 $I=\infty$，則有时說积分(32)發散。

例 1. 調和級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}。$$

現在我們有

$$f(n)=\frac{1}{n},$$

所以可以設

$$f(x)=\frac{1}{x};$$

这时

$$I=\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}=\log x \Big|_1^{\infty},$$

积分發散，因为当 $x\to+\infty$ 时，$\log x\to+\infty$；如我們所知，給定的級数也發散。

2. 較普遍的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{33}$$

其中 p 是任意一个数 >0 (当 $p\leqslant 0$ 时,显然这級数發散)。現在我們有:

$$f(n)=\frac{1}{n^p},\ f(x)=\frac{1}{x^p},\ I=\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\left.\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right|_1^\infty, & 若\ p\neq 1,\\ \left.\log x\right|_1^\infty, & 若\ p=1。\end{cases}$$

由此看出,若 $p\leqslant 1$, 这积分發散,若 $p>1$, 收斂而等于 $\frac{1}{p-1}$。实际上,在后面这情形下, $1-p<0$, 当 $x\to+\infty$ 时, $x^{1-p}=\frac{1}{x^{p-1}}\to 0$, 于是推知

$$\left.\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right|_1^\infty=0-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1}。$$

于是,根据勾犀判別法,若 $p>1$, 則級数(33)收斂,若 $p\leqslant 1$, 則發散。

123. 交錯級数 在談任意項的級数之前,先考虑交错級数,它們的項是正負相間的。这样的級数可以写成下面的形状:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\pm u_n\mp u_{n+1}\pm\cdots, \tag{34}$$

其中的数

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

都算作正的①。

关于交錯級数,可以証明下面这个命題:

若当 n 增加时,交錯級数的項的絕對值,減小而趋向零,則这級数收斂。这样的級数的余和的絕對值不大于所去掉的項中第一項的絕對值。

先考虑这級数的前偶数項的和

$$s_{2n}=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2n-1}-u_{2n}。$$

因为当 n 增加时,这級数的項的絕對值減小(严格說是不增大),于是

$$u_k\geqslant u_{k+1}\ 而\ u_{2n+1}-u_{2n+2}\geqslant 0,$$

所以

---

① 这里我們算作級数的第一項是正的,若是負的,就把級数写成

$$-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots。$$

$$s_{2n+2}=s_{2n}+(u_{2n+1}-u_{2n+2})\geqslant s_{2n},$$

就是变量 s_{2n} 增加。另一方面,我們有:

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}\leqslant u_1,$$

因为所有括号里的差都 $\geqslant 0$; 就是,变量 s_{2n} 是有界的。由此推知, 当 n 无限增加时, s_{2n} 趋向一个有限的極限[30],我們記作 s:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n}=s。$$

我們又有:

$$当\ n\to\infty\ 时,\ s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}\to s,$$

因为

$$u_{2n+1}\to 0。$$

如此,我們看出,級数(34)的前偶数項和与奇数項和趋向同一个極限 s, 就是这級数收斂而有和 s。

还要估計这級数的余和 r_n。我們有:

$$r_n=\pm u_{n+1}\mp u_{n+2}\pm u_{n+3}\mp u_{n+4}\pm\cdots,$$

这里全取上面的号或是全取下面的号,換句話說:

$$r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\cdots),$$

因此,像上面一样,就有:

$$|r_n|=(u_{n+1}-u_{n+2})+(u_{n+3}-u_{n+4})+\cdots$$
$$=u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-(u_{n+4}-u_{n+5})-\cdots\leqslant u_{n+1},$$

于是証完。

公式

$$r_n=\pm[(u_{n+1}-u_{n+2})+(u_{n+3}-u_{n+4})+\cdots]$$

的方括号里面不負, 所以 r_n 的符号与方括号外边的符号相同, 就是与 $\pm u_{n+1}$ 的符号相同。所以,交錯級数的余和的符号,与所去掉的第一項的符号相同。

例 級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

是一个交錯級数，当 $n\to\infty$ 时，它的項的絕对值无限减小，所以它是收斂的。以后我們說明它的和等于 $\log 2$。可是由这級数实际計算 $\log 2$ 并不适用，因为若要它的余和小于 0.0001，就要取 10000 項

$$|r_n|<\frac{1}{n+1}\leqslant 0.0001,\ n\geqslant 10000。$$

所以这个級数收斂，但是收斂得很慢。因此，在实际上应用这样的級数时，須要先把它們由慢收斂改变成快收斂，或者說，要改善收斂性。

124. 絕对收斂級数 其他的任意項級数中，我們只注意絕對收斂級数。

若級数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{35}$$

中各項的絕對值組成的級数，就是級数

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{36}$$

收斂，則級数(35)收斂。

这样的級数叫做絕對收斂級数。

設級数(36)收斂，我們設：

$$v_n=\frac{1}{2}(|u_n|+u_n),\quad w_n=\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)。$$

v_n 与 w_n 一定 $\geqslant 0$，因为显然：

$$v_n=\begin{cases}u_n, & \text{如果 } u_n\geqslant 0,\\ 0, & \text{如果 } u_n\leqslant 0,\end{cases}\qquad w_n=\begin{cases}0, & \text{如果 } u_n\geqslant 0,\\ |u_n|, & \text{如果 } u_n\leqslant 0。\end{cases}$$

另一方面，v_n 与 w_n 都不大于 $|u_n|$，就是不大于級数 (36) 的對应項，所以，根据正項級数收斂的判別法 2[**120**]，这两个級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

都是收斂的。

由于

$$u_n=v_n-w_n,$$

所以級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

是收斂的[**119**]。

正項收斂級数是絕對收斂級数的特殊情形，由正項級数收斂的判別法可以得到一般級数的絕對收斂的判別法。

在[**120, 121, 122**]中講的正項級数收斂的判別法 1—5，只要把条件中的 u_n 換成 $|u_n|$，就可应用于任意項級数。并且这样作的話，發散的判別法 3，4 以及[**121**]中的系都仍然可用。

例如，在勾犀与达朗倍尔判别法的叙述中，应当把

$$\sqrt[n]{u_n} \text{ 与 } \frac{u_n}{u_{n-1}} \text{ 換成 } \sqrt[n]{|u_n|} \text{ 与 } \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|}。$$

若 $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < q < 1$，就是 $\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} < q < 1$，則依照达朗倍尔判别法[**121**]，正項級数(36)收斂，于是級数(35)絕對收斂。若

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \geqslant 1 \text{ 就是 } |u_n| \geqslant |u_{n-1}|,$$

則当 n 增加时，u_n 的絕對值不减小，所以不能趋向零，于是級数(35)發散。由此，像[**121**]中的系一样，推得，若 $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \to r < 1$，則級数 (35) 絕對收斂，若 $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \to r > 1$，則級数(35)發散。

附注　还要提出，若級数 (35) 的項的絕對值各不大于一个正数：$|u_n| \leqslant a_n$，而由这些数作成的級数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 收斂，則級数(36)收斂[**120**]，就是級数(35)絕對收斂。

例 1. 級数([**121**]例)：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

絕对收斂，无論 x 取任何有限值，正的負的都可以，因为只要 x 取有限值，則

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0。$$

2. 級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

当 $|x|<1$ 时,絕对收斂;当 $|x|>1$ 时,發散,因为

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|=\frac{n-1}{n}|x|\to|x|。$$

3. 級数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n\alpha,$$

当 $|r|<1$ 时,絕对收斂,因为这时:

$$\sqrt[n]{|u_n|}=\sqrt[n]{|r^n|\ |\sin n\alpha|}\leqslant\sqrt[n]{|r|^n}=|r|<1。$$

必須注意,并不是任何一个收斂級数都是絕对收斂的,就是有的收斂級数,每項換成它的絕对值后,并不收斂。例如交錯級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

我們知道是收斂的,若把每項換成它的絕对值,就得到發散的調和級数:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots。$$

絕對收斂級数具有很多重要的性質,我們在 §14 的小号字中再討論,例如,像有限項的和一样,其和不依賴于排列的順序等。

125. 收斂性的一般判別法 在这一段中我們講級数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

收斂的一个必要且充分条件。依定义,这級数收斂相当于序列:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots$$

有極限存在,其中 s_n 是級数的前 n 項和。但是这个極限存在有下面的勾犀的必要且充分条件[**31**]:

任意給定一个正数 ε,就有这样一个 N 存在,使得,当 m 与 $n>N$ 时,

$$|s_m-s_n|<\varepsilon。$$

为确定起見,設 $m>n$,而且 $m=n+p$,其中 p 是任意一个正整数,注意这时

$$s_m - s_n = s_{n+p} - s_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) -$$
$$-(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p},$$

我們就可以推出下面这个級数收斂性的一般判别法。

无穷級数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

收斂的一个必要且充分条件是，任意給定一个正数 ε 时，有这样一个数 N 存在，使得，只要 $n > N$，无論 p 是什么正整数，不等式

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

成立，就是，如果 $n > N$，由 u_{n+1} 起，这級数的任何多个相繼項之和的絕對值小于 ε。

須要提出，这个一般判别法，在理論方面是重要的，但是要实际应用，常是很困难的。

§13. 泰勒公式及其应用

126. 泰勒公式 考慮 n 次多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n;$$

給 x 一个改变量 h，計算對应的函数值 $f(x+h)$。用牛頓二項式公式展开 $(x+h)$ 的方冪，再依 h 的方冪整理好；把最后的結果依 h 的方冪排列时，系数就是 x 的多項式：

$$f(x+h) = A_0(x) + hA_1(x) + h^2 A_2(x) + \cdots + h^k A_k(x) + \\ + \cdots + h^n A_n(x)。 \quad (1)$$

然后再确定这些多項式：

$$A_0(x), A_1(x), \cdots, A_n(x)。$$

为此，我們換換記号，把恒等式（1）中的 x 換成 a，$x+h$ 換成 x。这时

$$h = x - a,$$

代入（1）中，就成为：

$$f(x)=A_0(a)+(x-a)A_1(a)+(x-a)^2A_2(a)+\cdots+$$
$$+(x-a)^kA_k(a)+\cdots+(x-a)^nA_n(a)。\qquad (2)$$

为要确定这恒等式中的 $A_0(a)$，讓 $x=a$，就得到:

$$f(a)=A_0(a)。$$

为要确定 $A_1(a)$，求出恒等式(2)對 x 的导数，再讓 $x=a$:

$$f'(x)=1\cdot A_1(a)+2(x-a)A_2(a)+\cdots+$$
$$+k(x-a)^{k-1}A_k(a)+\cdots+n(x-a)^{n-1}A_n(a),$$
$$f'(a)=1\cdot A_1(a)。$$

再求對 x 的导数，再讓 $x=a$，就得到 $A_2(a)$:

$$f''(x)=2\cdot 1A_2(a)+\cdots+k(k-1)(x-a)^{k-2}A_k(a)+\cdots+$$
$$+n(n-1)(x-a)^{n-2}A_n(a),$$
$$f''(a)=2\cdot 1A_2(a)。$$

这样作下去，求出 k 阶导数，再讓 $x=a$，就得到:

$$f^{(k)}(x)=k(k-1)\cdots 2\cdot 1A_k(a)+\cdots+$$
$$+n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}A_n(a),$$
$$f^{(k)}(a)=k!A_k(a)。$$

所以我們有:

$$A_0(a)=f(a),\quad A_1(a)=\frac{f'(a)}{1!},\quad A_2(a)=\frac{f''(a)}{2!},\quad \cdots,$$
$$A_k(a)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\quad \cdots,\quad A_n(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

于是公式(2)就是:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n。\qquad (3)$$

上面这个公式，只是当多項式 $f(x)$ 的次数不超过 n 时，才能展开成这样的 $(x-a)$ 的多項式。若 $f(x)$ 是任意一个函数，而且它的一直到

n 阶的导数都存在;公式(3)并不對。我們把 $f(x)$ 与等式(3)右边之差記作 $R_n(x)$，就是設:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)。\qquad (4)$$

設函数 $f(x)$ 有連續的 $(n+1)$ 阶导数，我們可以用这导数来表示 $R_n(x)$，求出恒等式(4)的一阶,二阶以至 n 阶导数,我們得到:

$$\left.\begin{aligned}
f'(x)&=f'(a)+\frac{f''(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n'(x),\\
f''(x)&=f''(a)+\frac{f'''(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}+R_n''(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f^{(n)}(x)&=f^{(n)}(a)+R_n^{(n)}(x)。
\end{aligned}\right\}(4_1)$$

在(4)与(4_1)中,讓 $x=a$, 就有:

$$R_n(a)=0,\ R_n'(a)=0,\ \cdots,\ R_n^{(n)}(a)=0。\qquad (5)$$

把(4_1)中最后一个等式再求一次导数,我們得到:

$$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)。\qquad (6)$$

由关系式(5)与(6),不难得到 $R_n(x)$ 的表达式,因为依照計算积分的基本公式:

$$R_n(x)-R_n(a)=\int_a^x R_n'(t)\,dt,$$

由此,注意(5),作分部积分,求得:

$$R_n(x)=\int_a^x R_n'(t)\,dt=-\int_a^x R_n'(t)\,d(x-t)=$$

$$=-R_n'(t)(x-t)\Big|_a^x+\int_a^x R_n''(t)(x-t)\,dt=-\int_a^x R_n''(t)\,d\frac{(x-t)^2}{2!}=$$

$$=-R_n''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big|_a^x+\int_a^x R_n'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\,dt=-\int_a^x R_n'''(t)\,d\frac{(x-t)^3}{3!}=$$

$$= -R_n'''(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\bigg|_a^x + \int_a^x R_n^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}dt =$$

$$= \cdots = \int_a^x R_n^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt。$$

在以上作的演算中要注意下面这一点。积分变量記作 t，所以积分号下的 x 要算作常量，于是 x 的微分等于零，例如：

$$d\frac{(x-t)^3}{3!} = \frac{3(x-t)^2}{3!}d(x-t) = -\frac{(x-t)^2}{2!}dt,$$

一般来講：

$$d\frac{(x-t)^k}{k!} = \frac{k(x-t)^{k-1}}{k!}d(x-t) = -\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt。$$

同时，表达式

$$R_n^{(k)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}\bigg|_a^x \quad (k \leqslant n)$$

等于零，因为当用 $t=x$ 代入时，因子 $(x-t)^k$ 等于零，而当用 $t=a$ 代入时，根据(5)，因子 $R_n^{(k)}(a)=0$。

如此我們得到下面一个重要的結果：

泰勒公式 任意一个函数 $f(x)$，如果在某一区間內，一直到 $(n+1)$ 阶导数都存在而且連續，設点 $x=a$ 是这区間的一个內点，則当 x 取这区間內任何值时，$f(x)$ 可以依 $(x-a)$ 的方幂展开成：

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots +$$
$$+ (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_n(x), \tag{7}$$

其中 $R_n(x)$ 叫做这公式的余項，它有下面的形状：

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt。 \tag{8}$$

在应用中，常用这余項的别的形状，利用中値定理 [**95**]，可以由(8)直接得到。公式(8)右边积分号下的函数 $(x-t)^n$ 不变号，所以依中値定理就有：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x。$$

代入上下限，得到：

$$-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^x=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

因为当 $t=x$ 时，这表达式等于零。代到上面的公式中，就有：

$$R_n(x)=(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{9}$$

其中 ξ 是在 a 与 x 之間的一个値。余項的这个形状叫做拉格朗日式余項，于是，用拉格朗日式余項的泰勒公式就是：

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\cdots+$$
$$+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{7_1}$$

(ξ 在 a 与 x 之間)。

127. 泰勒公式的其他形状 当 $n=0$ 时，我們由 (7_1) 得到以前講的拉格朗日的改变量公式[**63**]：

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi)。$$

如此，泰勒公式是改变量公式的直接推广。

回到以前的記法，用 x 替代 a，$(x+h)$ 替代 x，泰勒公式(7)就成为

$$f(x+h)-f(x)=\frac{hf'(x)}{1!}+\frac{h^2f''(x)}{2!}+\cdots+\frac{h^nf^{(n)}(x)}{n!}+R_n, \tag{10}$$

因为在这个記法中要用 h 替代 $(x-a)$。在以前的記法中，ξ 是在 a 与 x 之間，于是現在要在 x 与 $x+h$ 之間，所以可以記作 $x+\theta h$，其中 $0<\theta<1$。如此，根据(9)，公式(10)的余項可以写成：

$$R_n=h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}\quad (0<\theta<1)。\tag{11}$$

公式(10)的左边是對应于自变量的改变量或微分 h，函数 $y=f(x)$ 应有的改变量 Δy。回忆高阶微分的表达式[**55**]，就有：

$$dy=y'dx=f'(x)\cdot h,\quad d^2y=y''(dx)^2=f''(x)\cdot h^2,\quad \cdots,$$
$$d^ny=y^{(n)}(dx)^n=f^{(n)}(x)\cdot h^n,$$

因此

$$\Delta y=\frac{dy}{1!}+\frac{d^2y}{2!}+\cdots+\frac{d^ny}{n!}+\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}\bigg|_{x+\theta h},\qquad(12)$$

这里的記号:

$$\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}\bigg|_{x+\theta h}$$

表示在表达式 $\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}$ 中用 $x+\theta h$ 替代 x 所得到的結果。

这个泰勒公式，当自变量的改变量是无穷小时，特別有用。公式(12)使我們可能自改变量 Δy 选出关于 h 的各阶无穷小項。

当自变量的值 a 是零时，在这特殊情形下，泰勒公式(7)有下面的形状:

$$f(x)=f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+x^2\frac{f''(0)}{2!}+\cdots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+R_n(x),\qquad(13)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n dt=$$
$$=\frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=\frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!},\qquad(14)$$

因为 ξ 在 0 与 x 之間，所以可以記作 $\xi=\theta x$，其中 θ 是滿足不等式 $0<\theta<1$ 的某一个值。这里写的公式(13)叫做麦克劳林公式。

128. 泰勒級数与麦克劳林級数 若給定的函数 $f(x)$ 的各阶导数都存在，則對于任何 n 的值，可以写出泰勒公式与麦克劳林公式。把公式(7)写成:

$$f(x)-\left[f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\cdots+\right.$$
$$\left.+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right]=f(x)-S_{n+1}=R_n(x),$$

其中用 S_{n+1} 記无穷級数

$$f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\cdots+$$

$$+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}+\cdots$$

的前$(n+1)$項和。

若当 n 无限增加时，

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0, \tag{15}$$

则根据[**118**]中所述，这个級数收斂，而$f(x)$就等于这个級数的和 S。如此，我們得到把函数 $f(x)$ 写成泰勒无穷冪級数的展开式：

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+\cdots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\cdots。\tag{16}$$

同样的，当满足条件(15)时，由麦克劳林公式得到：

$$f(x)=f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+x^2\frac{f''(0)}{2!}+\cdots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\cdots。\tag{17}$$

实际上，計算函数 $f(x)$ 的近似值时，借助于这函数的冪級数展开式，是一个最有用的方法；而余項 R_n 是这級数和与它前 $(n+1)$ 項和之差；所以 R_n 的估計在这近似計算中是很重要的。

应用上面所述，作几个簡單函数的展开式与近似計算。

129. e^x 的展开式 首先我們有

$$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ \cdots,\ f^{(k)}(x)=e^x,\ \cdots,$$

所以

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(k)}(0)=1,$$

于是由带有余項(14)的麦克劳林公式得到：

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\quad(0<\theta<1)。$$

我們知道([**121**]例)，級数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

当 x 取任何有限值时，是絕對收斂的，所以對于任何的 x，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,$$

因为这表达式是一个收斂級数的一般項①。另一方面，余項表达式中的因子 $e^{\theta x}$，当 $x>0$ 时，不大于 e^x，当 $x<0$ 时，不大于 1；所以当 x 取所有的值时，这余項总趋向零，于是我們得到展开式：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \tag{18}$$

这里 x 取任何值都成立。

特别是当 $x=1$ 时，得到 e 的表达式，于是可以計算 e 准确到任何程度，

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots。$$

应用这个公式，計算 e 到六位小数。若我們設：

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

則差誤就是：

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right]=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n},$$

其中 $<$ 号成立，是因为把各分数的分母中 $(n+2)$，$(n+3)$，…諸因子換成較小的数 $(n+1)$ 时，各分数都增大。

所以可以說 e 这个数界于下面两个数之間：

$$2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<e<2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}。$$

若要得到 e 的一个近似值，与它的眞正值之差不大于 0.000001，我們設 $n=10$，这时

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!},$$

---

① 参考[124]例。

而差誤不大于 $\frac{1}{10!10}<3\times10^{-8}$。在这公式中，前两項可以計算准确，其余各項应当算到七位小数，因为这样作每一項的差誤不大于 0.5×10^{-7}，而全部差誤不大于

$$10^{-7}\times0.5\times8=4\times10^{-7},$$

所以总差誤的絕对值就不大于 $4\times3\times10^{-7}$。我們就有：

$2 \quad =2.000000$	0 （准）	
$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}=0.500000$	0 （准）	
$\frac{1}{3!}=\frac{1}{2!3}=0.166666$	7 （盈）	
$\frac{1}{4!}=\frac{1}{3!4}=0.041666$	7 （盈）	
$\frac{1}{5!}=\frac{1}{4!5}=0.008333$	3 （亏）	$e\approx2.7182818$
$\frac{1}{6!}=\frac{1}{5!6}=0.001388$	9 （盈）	
$\frac{1}{7!}=\frac{1}{6!7}=0.000198$	4 （亏）	
$\frac{1}{8!}=\frac{1}{7!8}=0.000024$	8 （亏）	
$\frac{1}{9!}=\frac{1}{8!9}=0.000002$	8 （盈）	
$\frac{1}{10!}=\frac{1}{9!10}=0.000000$	3 （盈）	

e 的值到十二位小数是 2.718281828459。

130. $\sin x$ 与 $\cos x$ 的展开式 我們有[53]：

$$f(x)=\sin x,\ f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \cdots,\ f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),$$

因此，

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad \cdots,$$

$$f^{(2m)}(0)=0,\quad f^{(2m+1)}(0)=(\ \ 1)^m,$$

于是由公式(13)得到：

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+$$

$$+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left[\theta x+\frac{2n+3}{2}\pi\right]。$$

以上我們知道，当 $n\to\infty$ 时，余項中的因子 $\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$ 趋向零，而正弦函数的絕對值不大于一；于是推知，当 x 取任何值时，这余項趋向零，就是展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \tag{19}$$

当 x 取任何值时都成立。

类似的可以証明，展开式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \tag{20}$$

也是当 x 取任何值时都成立。

当角度 x 的值很小时，由級数(19)与(20)計算函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的值是很方便的。当 x 取任何值时，无論是正的还是負的，这两个級数都是交錯的，所以若由某一項起，以后各項的絕对值漸減，則差誤的絕对值不大于所去掉的項中第一項的絕对值[**123**]。

当 x 取大的值时，級数(19)与(20)仍然收斂，但是很慢，于是用以計算函数值就不大适用。圖156上指明，$\sin x$ 的准确曲綫与前三个近似曲綫

$$x,\ x-\frac{x^3}{6},\ x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

的相互位置。

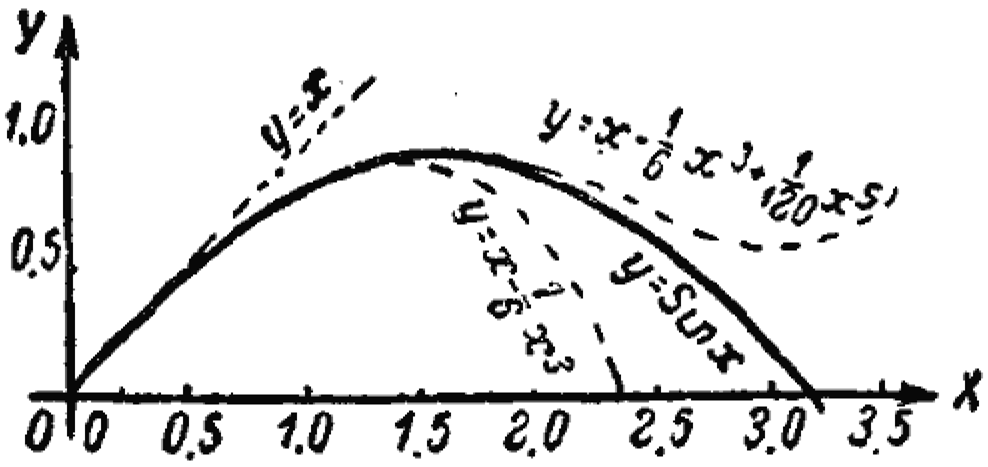


圖 156.

在近似公式中取的項愈多，近似曲綫就可以在較大区間上比較准确。还要注意，以上所有的公式中，角度 x 都是要用弧度作單位来測量的[**33**]。

例 計算 $\sin 10°$ 准确到 10^{-5}。首先要化为弧度：

$$10°=\frac{2\pi}{360}\times 10=\frac{\pi}{18}=0.17\cdots。$$

代入近似公式

$$\sin\frac{\pi}{18}\approx\frac{\pi}{18}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3,$$

这时差誤不大于

$$\frac{1}{120}\cdot(0.2)^5<4\times10^{-6}\quad\left(\frac{\pi}{18}<0.2\right)。$$

上面 $\sin\dfrac{\pi}{18}$ 的近似公式的右边，每一项要計算到六位小数，因为这时全部差誤就不大于

$$2\times0.5\times10^{-6}+4\times10^{-6}=5\times10^{-6}。$$

我們就有：

$$\frac{\pi}{18}=0.174533,\quad \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3=0.000886,\quad \sin\frac{\pi}{18}=0.173647,$$

这里到第四位小数一定正确。

131. 牛頓二項式 現在算作 $x>-1$，就是 $1+x>0$，我們有：

$$f(x)=(1+x)^m,\quad f'(x)=m(1+x)^{m-1},\quad\cdots,$$
$$f^{(k)}(x)=m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$
$$f(0)=1,\quad f'(0)=m,\quad\cdots,\quad f^{(k)}(0)=m(m-1)\cdots(m-k+1),$$

其中 m 是任意一个实数，于是由公式(13) 得到：

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),\qquad(21)$$

其中余项可以由公式(8)确定，这里 $a=0$:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt。$$

注意，在这情形下：

$$f^{(n+1)}(t)=m(m-1)\cdots(m-n)(1+t)^{m-n-1},$$

于是可以写成：

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!}\int_0^x(x-t)^n(1+t)^{m-n-1}dt。\qquad(22)$$

应用积分的中値定理（[95](13)），并用 $\theta x\,(0<\theta<1)$ 記 t 在 0 与 x 之

間的某一个値，就得到：

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!}(x-\theta x)^n(1+\theta x)^{m-n-1}\int_0^x dt=$$

$$=\frac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1}mx。\qquad(23)$$

如果 $R_n\to 0$，則級数：

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\qquad(24)$$

应当收斂[**118**]。当 $n\to\infty$ 时

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{m-n+1}{n}x\right|\to|x|,$$

所以这級数当 $|x|<1$ 时，絕对收斂，当 $|x|>1$ 时發散[**124**]。縱然級数(24)当 $|x|<1$ 时收斂，并不能就說它的和等于 $(1+x)^m$，还要証明，当 $|x|<1$ 时，$R_n\to 0$。在 R_n 的表达式(23)中，因子

$$\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{n!}x^n$$

可以看作是收斂級数 (24) 的一般項，这里 m 換成了 $m-1$，所以当 $n\to\infty$ 时，它趋向零[**118**]。

当 n 取任何値时，因子 $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ 不大于 1。因为在所考慮的情形下，$-1<x<+1$，所以无論 x 取正値还是負値，$0<1-\theta<1+\theta x$，因此：

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1,$$

于是

$$0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1。$$

最后的因子 $mx(1+\theta x)^{m-1}$ 也是有界的，因为 $(1+\theta x)$ 在 1 与 $1+x$ 之間，于是 $mx(1+\theta x)^{m-1}$ 在 mx 与 $mx(1+x)^{m-1}$ 之間，而后面两个数

并不依赖于n。

由以上所述，依公式(23)，$R_n(x)$可以看作三个因子的乘积，当n无限增加时，其中一个因子趋向零，另外两个都是有界的，所以

$$当\ n\to\infty\ 时，\quad R_n(x)\to 0。$$

所以，展开式

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \tag{25}$$

当x取满足条件

$$|x|<1$$

的任何值时，成立。

当m是正整数时，級数(25)到$n=m$项为止，于是成为牛頓二項式公式。在一般情形下，m取任何值时，展开式(25)就是牛頓二項式的推广。

下面提出二項式的几个特殊情形：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \tag{26}$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\cdots, \tag{27}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4-\cdots。 \tag{28}$$

注意，当$x>-1$时，函数$(1+x)^m$有正值[**19**, **44**]，就是，当$-1<x<+1$时，級数(24)的和是正的。例如，級数(27)在这区間上給出$\sqrt{1+x}$的正值。

例 1. 开方 公式(25)可用以求任何次开方。設要求一个整数A的m次根，$\sqrt[m]{A}$。总可以找到一个整数a，使得a的m次幂与A很近，于是$A=a^m+b$，其中$|b|<a^m$，我們就有：

$$\sqrt[m]{A}=\sqrt[m]{a^m+b}=a\sqrt[m]{1+\frac{b}{a^m}}。$$

因为这里$\left|\frac{b}{a^m}\right|<1$，所以把比$\frac{b}{a^m}$記作$x$，就可以依牛頓二項式公式計算，当$\frac{b}{a^m}$的絕对值愈小时，这級数收斂得愈快。

例如，計算$\sqrt[5]{1000}$，准确到10^{-5}。現在

$$\sqrt[5]{1000}=\sqrt[5]{1024-24}=4\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}}=$$

$$=4\left[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{128}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3-\cdots\right]。$$

先估計，算到上面写的这些項时，差誤是多少，在公式(23)中代入：

$$m=\frac{1}{5},\quad n=3,\quad x=-\frac{3}{128}。$$

如上所述，因子$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$在零与一之間。因子$(1+\theta x)^{m-1}$是

$$\left(1-\theta\frac{3}{128}\right)^{-\frac{4}{5}}<\left(1-\frac{3}{128}\right)^{-\frac{4}{5}}=\left(\frac{128}{125}\right)^{\frac{4}{5}}<\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{4}{5}}=\left(\sqrt[5]{\frac{6}{5}}\right)^4<\left(\frac{4}{3}\right)^4,$$

因为

$$\sqrt[5]{\frac{6}{5}}<\frac{6}{5}<\frac{4}{3}。$$

最后由公式(23)得到：

$$4|R_n|<\frac{4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\left(\frac{4}{128}\right)^4<$$

$$<2(0.2)(0.8)(0.6)(2.8)(0.03)^4<5\times10^{-7}。$$

計算各項时，应当作到六位小数，因为这时全部差誤就不大于

$$4\times3(0.5)10^{-6}+5\times10^{-7}=(6.5)10^{-6}<10^{-5}。$$

計算时可以排列成下面的样子：

$\frac{1}{5}=0.2$	$\times\frac{3}{128}=0.0234375\times0.2=0.004687$
$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}=0.08$	$\times\left(\frac{3}{128}\right)^2=0.000549\times0.08=0.000044$
$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15}=0.048$	$\times\left(\frac{3}{128}\right)^3=0.000013\times0.048=0.000001$

0.004732

$$1-0.004732=0.995268$$

$$\begin{array}{r} \times 4 \\ \hline 3.981072 \end{array}$$

2. 橢圓周界長的近似計算 在 [103] 中，我們得到半軸为 a 与 b 的橢圓的周界長 l 的表达式：

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+\frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\;dt\text{。}$$

[公式(22)]。引入橢圓的离心率 ε：

$$\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},\quad \frac{b^2}{a^2}=1-\varepsilon^2,$$

得到：

$$l=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt\text{。} \tag{29}$$

这个积分准确計算是不可能的，但可以計算它准确到任何程度，把这被积函数依 ε 的方幂展成級数①：

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}=1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\varepsilon^4\cos^4 t-$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^6\cos^6 t+\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 t-\frac{1}{8}\varepsilon^4\cos^4 t-\frac{1}{16}\varepsilon^6\cos^6 t+R_3,$$

其中差誤 R_3，依公式(23)估計，满足不等式：

$$|R_3|=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^8\cos^8 t\left(\frac{1-\theta}{1-\theta\,\varepsilon^2\cos^2 t}\right)^3\times$$

$$\times(1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}-1}<\frac{5}{32}\frac{\varepsilon^8\cos^8 t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{30}$$

因为

$$0<\left(\frac{1-\theta}{1-\theta\,\varepsilon^2\cos^2 t}\right)^3<1,$$

而

① 这个展开式成立，因为橢圓的离心率 $\varepsilon<1$，所以这时在牛頓二項式公式中占有 x 的地位的 $\varepsilon^2\cos^2 t$ 的絕对值小于 1。

$$(1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}-1}<(1-\varepsilon^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}。$$

代入 l 的表达式(29)中，回忆[**100**]公式(27)，作积分，就求得

$$l=4a\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt-\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt-\frac{1}{8}\varepsilon^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt-\frac{1}{16}\varepsilon^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}}R_3\,dt\right]=2\pi a\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{64}\varepsilon^4-\frac{5}{256}\varepsilon^6+\rho\right], \tag{31}$$

其中根据[**95**]公式(10_1)与不等式(30)：

$$|\rho|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R_3\,dt\right|<\frac{5}{32}\frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 t\,dt=\frac{175}{2^{12}}\frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}<$$

$$<\frac{0.05\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}。$$

公式(31)可用以計算橢圓的周界長，特別是当离心率很小时較合用。以它为基础，只要用到圓周，就可以得到橢圓周界長的簡單的几何的近似表达法。

用 l_1 与 l_2 各記橢圓的半軸的等差中項与等比中項：

$$l_1=\frac{a+b}{2},\quad l_2=\sqrt{ab},$$

比較以 l_1 与 l_2 为半徑的两个圓周長 $2\pi l_1$，$2\pi l_2$ 以及橢圓的周界長 l。

注意，

$$b=a\sqrt{1-\varepsilon^2},\quad \frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}[1+\sqrt{1-\varepsilon^2}],\quad \sqrt{ab}=a\sqrt[4]{1-\varepsilon^2},$$

依牛頓二項式公式展成級数，我們不难得到表达式：

$$2\pi l_1=2\pi a\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{1}{16}\varepsilon^4-\frac{1}{32}\varepsilon^6+\rho_1\right], \tag{32}$$

$$2\pi l_2=2\pi a\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{32}\varepsilon^4-\frac{7}{128}\varepsilon^6+\rho_2\right], \tag{33}$$

其中差誤 ρ_1 与 ρ_2，依公式(23)估計，滿足不等式：

$$|\rho_1|<\frac{5}{32}\frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},\quad |\rho_2|<\frac{77}{512}\frac{\varepsilon^8}{(1-\varepsilon^2)^{7/4}}。$$

由此显然，当离心率很小时，若比 ε^2 再高的 ε 的方幂可以忽略不計，就可以取以橢圓两半軸的等差中項或等比中項为半徑的圓周長作为这橢圓的周界長。若要更准确些，我們作表达式：

$$\alpha\cdot 2\pi l_1+\beta\cdot 2\pi l_2, \tag{34}$$

再选定因子 α 与 β，使得表达式(31)与(34)中有更多的項相同。由于表达式(31)，

(32) 与 (33) 的前两項都一样，所以首先須要

$$\alpha+\beta=1。$$

再讓表达式 (31) 与 (34) 中 ε^4 的系数相等，就要

$$\frac{\alpha}{16}+\frac{3\beta}{32}=\frac{3}{64} \quad 或 \quad 4\alpha+6\beta=3。$$

解这两个关于 α 与 β 的方程，求得：

$$\alpha=\frac{3}{2}, \quad \beta=-\frac{1}{2}。$$

代入到 (34) 中，就有：

$$\alpha\cdot 2\pi l_1+\beta\cdot 2\pi l_2=2\pi\left(\frac{3}{2}l_1-\frac{1}{2}l_2\right)=$$

$$=2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{64}\varepsilon^4-\frac{5}{256}\varepsilon^6+\frac{3}{2}\rho_1-\frac{1}{2}\rho_2\right), \qquad (35)$$

就是說，不仅是 ε^4 的項相同，ε^6 的項也相同，于是公式 (31) 与 (35) 由 ε^8 的項开始才不同。注意以上求得的 ρ，ρ_1 以及 ρ_2 的估計，再注意

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} 与 \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/4}}<\frac{1}{1-\varepsilon^2}, \quad \frac{175}{2^{12}}+\frac{5}{32}\cdot\frac{3}{2}+\frac{77}{512}\cdot\frac{1}{2}<0.4,$$

最后可以說，設橢圓的两半軸各为 a 与 b，离心率为 ε，則取半徑为

$$r=\frac{3}{2}\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{ab}$$

的圓周長作这橢圓的周界長时，差誤不大于 $\dfrac{0.4\varepsilon^8}{1-\varepsilon^2}$。

132. $\log(1+x)$ 的展开式[①] 这个展开式可以由普遍定理得到，但是現在我們用另一个方法，这个方法在很多别的情形下是可用的。

把 $\log(1+x)$ 表示成定积分的样子，显然，当 $x>-1$ 时，我們有：

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\log(1+t)\Big|_0^x=\log(1+x)-\log 1=\log(1+x),$$

就是

① 函数 $\log x$ 不能展成 x 的冪級数，因为当 $x=0$ 时，这个函数与它的导数都不連續而且成为无穷大。

$$\log(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}。$$

但是，恒等式：

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

成立，这可以由$(1+t)$除1，余$(-1)^n t^n$直接得到。如此：

$$\log(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}=$$

$$=\int_0^x \left[1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right]dt=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=(-1)^n\int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}。\tag{36}$$

对于級数：

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots,$$

当$n\to\infty$时，

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|=\frac{n-1}{n}|x|\to|x|,$$

当$|x|>1$时，这級数發散（[**121**]系），所以只要考虑下面的情形：

$$|x|<1,\ x=\pm 1。$$

$x=-1$的情形也应当去掉，因为当$x=-1$时，函数$\log(1+x)$成为无穷大。

所以只剩下两种情形：(1) $|x|<1$, (2) $x=1$。在情形(1)中，我們应用中値定理[**95**]到$R_n(x)$的表达式(36)，并注意当t由0变到x时，t^n不变号，于是就有：

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{1+\theta x}\int_0^x t^n\,dt=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}\quad(0<\theta<1),\tag{37}$$

由此，根据条件$|x|<1$，推知：

$$|R_n(x)|<\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\theta x}。$$

这不等式右边的因子$\frac{1}{|1+\theta x|}$，对一切 n 是有界的，因为它在

$$1 \text{ 与 } \frac{1}{1+x}$$

之間，而这两个数不依賴于 n，所以对于考虑的 x 的值，当 $n\to\infty$ 时，

$$R_n(x)\to 0。$$

在情形(2)中，$x=1$ 时，我們得到同样的結果。因为当 $x=1$ 时，由公式(37)說明：

$$|R_n(1)|=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\theta}<\frac{1}{n+1},$$

于是当 $n\to\infty$ 时，

$$R_n(1)\to 0。$$

所以，展开式

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots, \tag{38}$$

当 x 取滿足不等式

$$-1<x\leqslant 1 \tag{39}$$

的任何值时，成立。

特别是当 $x=1$ 时，有等式：

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots,$$

我們在[122]已經講过。由公式(38)直接計算对数，并不适用，因为其中的 x 須要滿足不等式(39)，并且右边的級数收斂得非常慢。可以把它化为計算起来比較方便的形式，为此，我們在等式：

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

中，用$(-x)$替代 x，得到：

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\quad(|x|<1),$$

再由上面的等式减去它，就得到：

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)\quad(|x|<1)。$$

現在設

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{z}{a}=\frac{a+z}{a},\quad x=\frac{z}{2a+z},\tag{40}$$

就有：

$$\log\frac{a+z}{a}=2\left[\frac{z}{2a+z}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{(2a+z)^3}+\frac{1}{5}\frac{z^5}{(2a+z)^5}+\cdots\right],$$

或

$$\log(a+z)=\log a+2\left[\frac{z}{2a+z}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{(2a+z)^3}+\cdots\right]。\tag{41}$$

这个公式，当 a 与 z 取任何正值时，都成立，因为这时 $x=\frac{z}{2a+z}$ 在零与 1 之間。如果 $\frac{z}{2a+z}$ 很小，或是 z 比 a 小得多，計算起来就更方便。

公式 (41) 在計算对数时很有用。虽然实际用的对数表不是由級数算的，因为在聶倍尔与卜利格时代还不知道这个方法，但是公式 (41) 还可以用以校对或是計算对数表。在(41)中設 $z=1$，再相繼取

$$a=15,\ 24,\ 80,$$

我們得到：

$$\log 16-\log 15=2\left[\frac{1}{31}+\frac{1}{3\cdot 31^3}+\cdots\right]=2P,$$

$$\log 25-\log 24=2\left[\frac{1}{49}+\frac{1}{3\cdot 49^3}+\cdots\right]=2Q,$$

$$\log 81-\log 80=2\left[\frac{1}{161}+\frac{1}{3\cdot 161^3}+\cdots\right]=2R,$$

其中用 P, Q, R 記的三个級数收斂得很快。由这三个等式得到三个方程：

$$4\log2-\log3-\log5=2P,$$

$$-3\log2-\log3+2\log5=2Q。$$

$$-4\log2+4\log3-\log5=2R,$$

由此可以确定

$$\log 2,\ \log 3,\ \log 5,$$

解方程，不难求得：

$$\log 2 = 14\,P + 10\,Q + \ 6\,R,$$
$$\log 3 = 22\,P + 16\,Q + 10\,R,$$
$$\log 5 = 32\,P + 24\,Q + 14\,R。$$

如此得到的是自然对数，由它們可以求出常用对数(以 10 为底)的模 M；

$$M = \frac{1}{\log 10} = 0.4342944819\cdots,$$

于是依公式

$$\log_{10} x = M \log x$$

可以由自然对数求得常用对数。

类似的方法，应用这展开式，取

$$a = \ \ 2400 = 100\cdot 2^3\cdot 3, \qquad a+z = \ \ 2401 = 7^4,$$
$$a = \ \ 9800 = 100\cdot 2\cdot 7^2, \qquad a+z = \ \ 9801 = 3^4\cdot 11^2,$$
$$a = 123200 = 100\cdot 2^4\cdot 7\cdot 11, \qquad a+z = 123201 = 3^6\cdot 13^2,$$
$$a = \ \ 2600 = 100\cdot 2\cdot 13, \qquad a+z = 2601 \ = 3^2\cdot 17^2,$$
$$a = \ 28899 = 3^2\cdot 13^2\cdot 19, \qquad a+z = 28900 \ = 100\cdot 17^2,$$

可以計算出：

$$\log 7,\ \log 11,\ \log 13,\ \cdots。$$

如此我們借助于級数确定了素数的对数，至于复合数的对数，因为它們可以分解成素因子之积，所以只要再用加法或乘以整数就可以計算出来。

133. $\operatorname{arc\,tg} x$ **的展开式** 像作 $\log(1+x)$ 的展开式时那样。我們有：

$$d \operatorname{arc\,tg} t = \frac{dt}{1+t^2}。$$

于是

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t\Big|_0^x = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} 0 = \operatorname{arc\,tg} x,$$

其中 $\operatorname{arc\,tg} x$，像在[**98**]例中一样，取主値。于是就有

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \Big[1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} +$$

$$+\frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\Big]dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}dt}{1+t^2}。 \tag{42}$$

对于級数:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots,$$

当 $n\to\infty$ 时,比:

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \frac{2n-3}{2n-1}\ x^2 \to x^2,$$

于是当 $x^2>1$ 时發散,所以只要討論 $x^2\leqslant 1$ 的情形,就是

$$-1\leqslant x\leqslant +1。 \tag{43}$$

先算作 $x>0$, 由公式(42),根据 [**95**]VII, 得到:

$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt < \int_0^x t^{2n}\,dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+1} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

因为显然:

$$\frac{t^{2n}}{1+t^2} < t^{2n}。$$

若 $x<0$, 則用 $t=-\tau$ 替换,得到:

$$R_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^{-x} \frac{\tau^{2n}}{1+\tau^2}d\tau。$$

現在上限 $(-x)$ 是正的,所以上面对 $|R_n(x)|$ 的估計仍然成立, 就是展开式:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \tag{44}$$

当 x 取絕对值不大于一的値时,成立。

特别是当 $x=1$ 时,我們得到:

$$\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots。$$

这个級数收斂得很慢，用它計算 π 很不合适，x 愈小时，級数(44)收斂得愈快。例如，設

$$x=\frac{1}{5},\quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}。$$

就有：

$$\operatorname{tg} 2\varphi=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},\quad \operatorname{tg} 4\varphi=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}。$$

因为 $\operatorname{tg} 4\varphi$ 与 1 差得很少，所以 4φ 与 $\frac{\pi}{4}$ 差得很少，我們引用这个差：

$$\psi=4\varphi-\frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{4}=4\varphi-\psi。$$

由此求得：

$$\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\left(4\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg} 4\varphi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg} 4\varphi\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239},$$

于是

$$\frac{\pi}{4}=4\varphi-\psi=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

$$=4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\cdots\right]-\left[\frac{1}{239}-\cdots\right]。$$

两个方括号里边的級数都是交錯級数 [123]，于是到写出的項为止，差誤不大于

$$\frac{4}{9\cdot 5^9}+\frac{1}{3\cdot 239^3}<0.5\times 10^{-6}。$$

为要計算 π，准确到 10^{-5}，每一項要算到七位小数，因为这时确定的 $\frac{\pi}{4}$，差誤不大于

$$4\times 4\times 0.5\times 10^{-7}+0.5\times 10^{-7}+0.5\times 10^{-6}<2\times 10^{-6},$$

而所确定的 π 的差誤就不大于 8×10^{-6}。

計算如下：

$\frac{1}{5}=0.2000000$	$\frac{1}{3\cdot5^3}=0.0026667$
$\frac{1}{5\cdot5^5}=0.0000640$	$\frac{1}{7\cdot5^7}=0.0000018$
$+0.2000640$	-0.0026685

$$
\begin{array}{rr}
 & 0.1973955 \\
 & \times\qquad 4 \\
\hline
 & 0.7895820 \\
-\frac{1}{239}=- & 0.0041841 \\
\hline
 & 0.7853979 \\
 & \times\qquad 4 \\
\hline
 & \pi\approx3.1415916
\end{array}
$$

π 的值到八位小数是 3.14159165。

当 $|x|\leqslant1$ 时，可以得到展开式：

$$
\begin{aligned}
\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{x^5}{5}+\cdots+ \\
+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots。
\end{aligned}
\tag{45}
$$

134. 近似公式 $f(x)$ 展成的麦克劳林級数

$$
f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+x^2\frac{f''(0)}{2!}+\cdots
$$

在收斂时，取它前有限項，可用以計算函数 $f(x)$ 的近似值。

在一定的准确度下，計算 $f(x)$ 的近似值时，x 愈小，在展开式中取的項数就可以愈少。若 x 非常小，則只取前两項就够了，其余的項可以都去掉。如此就得到 $f(x)$ 的一个很簡單的近似公式，当 x 很小时，可用以替代 $f(x)$ 的复杂的表达式。

我們介紹几个最重要函数的这样的近似公式：

$$
\sqrt[n]{1\pm x}\approx1\pm\frac{x}{n},\qquad \sin x\approx x,
$$

$$
\frac{1}{\sqrt[n]{1\pm x}}\approx1\mp\frac{x}{n},\qquad \cos x\approx1-\frac{x^2}{2},
$$

$$
(1\pm x)^n\approx1\pm nx,\qquad \operatorname{tg}x\approx x,
$$

$$
a^x\approx1+x\log a,\qquad \log(1\pm x)\approx\pm x。
$$

当x与零很近时，应用这些近似公式可以有效的簡化复杂的表达式。

例

1. $$\left(\frac{1+\frac{m}{n^2}x}{1-\frac{n-m}{n^2}x}\right)^n=\frac{\left(1+\frac{m}{n^2}x\right)^n}{\left(1-\frac{n-m}{n^2}x\right)^n}\approx\left(1+\frac{m}{n}x\right)\left(1+\frac{n-m}{n}x\right)\approx$$
$$\approx 1+\frac{m}{n}x+\frac{n-m}{n}x=1+x。$$

2. $$\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\log(1-x)-\frac{1}{2}\log(1+x)\approx-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=-x。$$

3. 确定物体被加热时容积的改变量（容积膨脹），設已知綫膨脹系数α。若当$0°$时物体一边的長是l_0，则加热到$t°$时，就是
$$l=l_0(1+\alpha t),$$
大部分物体的綫膨脹系数是很小的（$<10^{-5}$）。因为容积分布在三維空間，于是可以写成：
$$\frac{v}{v_0}=\frac{(1+\alpha t)^3}{1};\ v=v_0(1+\alpha t)^3\approx v_0(1+3\alpha t),$$
就是，3α可以算作容积膨脹系数。由于密度与容积成反比，类似的求出关系式：
$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1}{(1+\alpha t)^3},\ \rho=\rho_0(1+\alpha t)^{-3}\approx\rho_0(1-3\alpha t)。$$

認清楚，所有这些近似公式只有当x足够小时才合用，否則就不准确，就要算到展开式中以后的項才成。

135. 極大値，極小値与扭轉点 应用泰勒公式可以对[58]中所述的求函数極大値与極小値的方法作重要的补充。以下我們認为$f(x)$在$x=x_0$及其邻域具有直到n阶的連續导数。

設当$x=x_0$时，函数$f(x)$的前$(n-1)$阶导数都等于零：
$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$
而n阶导数$f^{(n)}(x_0)$不等于零；若n，亦即第一个不等于零的导数的阶，是偶数，则x_0对应于曲綫的一个頂点，并且

当$f^{(n)}(x_0)<0$时，是个極大値，

当$f^{(n)}(x_0)>0$时，是个極小値；

若 n 是奇数，则 x_0 不对应于一个頂点，而对应于一个拐点。

为要証明，应当考虑差：

$$f(x_0+h)-f(x_0) \text{ 与 } f(x_0-h)-f(x_0),$$

其中 h 是足够小的正数。依[58]極大值与極小值的定义，若这两个差总小于 0，则 x_0 对应于一个極大值；若它們大于 0，则对应于極小值。若不管正数 h 多么小，这两个差总异号，则 x_0 不对应于極大值或極小值。为此可以在泰勒公式中用 x_0 替代 a，$\pm h$ 替代 h①：

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-\frac{h}{1!}f'(x_0)+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{(-1)^n h^n}{n!}f^{(n)}(x_0-\theta_1 h),$$

$$(0<\theta<1,\ 0<\theta_1<1)。$$

由条件：

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0;$$

推出：

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

$$f(x_0-h)-f(x_0)=\frac{(-1)^n h^n}{n!}f^{(n)}(x_0-\theta_1 h)。$$

当 h 足够小时，根据 $f^{(n)}(x)$ 为連續的假定，因子

$$f^{(n)}(x_0+\theta h) \text{ 与 } f^{(n)}(x_0-\theta_1 h)$$

同号，并且就是 $f^n(x_0)$ 这个数的号，这里 $f^n(x_0)$ 不等于零。

我們知道，当差

① 余項我們取拉格朗日式，θ 在 0 与 1 之間，因为对于 $(+h)$ 与 $(-h)$，θ 代表的值不相同，所以在第二个公式中，我們写成 θ_1。

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0)$$

同号时而且只有这时候，点 x_0 是个顶点，根据以上所述，推知只有当 n 是偶数时，才是顶点；因为这时表达式：

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0)$$

同号；不然的話，若 n 是奇数，因子 h^n 与 $(-1)^n h^n$ 就不同号，于是这两种差也不同号。

現在設 n 是偶数；这时差

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0)$$

的符号与 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号全相同。若 $f^{(n)}(x_0) < 0$，則

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0) < 0,$$

于是就有一个極大值；若 $f^{(n)}(x_0) > 0$，則

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0) > 0,$$

就得到一个極小值。

若 n 是奇数，則当 $n \geqslant 3$ 时，依泰勒公式，我們得到二阶导数 $f''(x)$ 的表达式：

$$f''(x_0 + h) = \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(x_0 + \theta_2 h);$$

$$f''(x_0 - h) = \frac{(-1)^{n-2} h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(x_0 - \theta_3 h),$$

由此，像以上一样討論，当 $x = x_0$ 时，函数 $f''(x)$ 等于零，而 $(n-2)$ 是奇数，所以 $f''(x_0 \pm h) - f''(x_0)$ 不同号，就是說 x_0 对应一个拐点[**71**]，于是証完。

136. 定未定式 設有函数比

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

当 $x = a$ 时，分子分母都等于零。为要定未定式：

$$\left.\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right|_{x=a},$$

把分子分母依泰勒公式展开：

$$\varphi(x)=(x-a)\varphi'(a)+\frac{(x-a)^2\varphi''(a)}{2!}+\cdots+\frac{(x-a)^n\varphi^{(n)}(a)}{n!}+$$
$$+\frac{(x-a)^{n+1}\varphi^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!},$$
$$\psi(x)=(x-a)\psi'(a)+\frac{(x-a)^2\psi''(a)}{2!}+\cdots+\frac{(x-a)^n\psi^{(n)}(a)}{n!}+$$
$$+\frac{(x-a)^{n+1}\psi^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!},$$

于是可以消去$(x-a)$的若干次幂，再讓 $x\to a$。

例

1. $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{e^{3x}-1-3x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\left(1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}-\cdots\right)}{\left(1+3x+\frac{9x^2}{2}+\frac{27x^3}{6}+\cdots\right)-1-3x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2-\frac{16}{24}x^2+\cdots}{\frac{9}{2}+\frac{27}{6}x+\cdots}=\frac{4}{9}。$$

同样可用以定别种型的未定式。我們考虑一个例：

2 $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x)。$$

这是 $\infty-\infty$ 型的不定式。我們有

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x=x\left[\sqrt[3]{1-\frac{5x^2-1}{x^3}}-1\right]=$$
$$=x\left\{\left[1-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}-1\right\}。$$

当 x 的絕对值足够大时，差 $\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}$ 与零很近，于是我們可以应用牛頓二項式公式(25)，这时 $m=\frac{1}{3}$，$-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$ 据有(25)中 x 的地位：

$$\left[1-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2+\cdots。$$

代入上面的大括号中，再消去 1，得到：

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x=x\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2+\cdots\right]=$$

$$=\left(-\frac{5}{3}+\frac{1}{3x^2}\right)+\cdots,$$

其中所有沒有写的項都带有 x 的負方冪，当 $x\to\infty$ 时，取極限，都趋向零，于是推知：

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x)=-\frac{5}{3}。$$

这一段中，所用到的无穷級数，取極限的可能性，都很容易断定，我們沒有詳述。

§14. 級数理論的补充知識

137. 絕对收斂級数的性質 [**124**]中已經講过絕对收斂級数的概念。現在我們叙述它的重要的性質。

絕对收斂級数之和不依賴于它的項的排列順序。

証明时，先考虑正項級数，我們知道[**120**]，正項級数只能收斂（于是絕对收斂）或正常發散。

設給定一个正項收斂級数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots。\qquad (1)$$

用 s_n 記它的前 n 項和，s 記它的和，显然就有：

$$s_n<s。$$

任意换动級数（1）的項的順序，得到各項的另一种排列，对应于級数

$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots \qquad (2)$$

其中各項都是級数（1）的項，不过順序不同，于是級数（1）中每一項在級数（2）中有一定的位置，反之亦然。級数（2）的前 n 項和記作 σ_n。对于任何的 n，可以求出一个足够大的 m，使得和 σ_n 中所有的項，都在 s_m 中，于是

$$\sigma_n\leqslant s_m\leqslant s。$$

如此，我們已証明存在不依賴于 n 的常数 s，对于任何的 n，我們有：

$$\sigma_n\leqslant s;$$

由此推知級数（2）收斂[**120**]。用 σ 記它的和。显然

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sigma_n\leqslant s。$$

在以上的討論中，把級数（1）与（2）的地位互换，同样可以証明

$$s \leqslant \sigma,$$

由不等式 $\sigma \leqslant s$，$s \leqslant \sigma$ 推知

$$s=\sigma。$$

再討論任意項的級数。由所給条件，級数（1）絕对收斂，所以正項級数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \tag{3}$$

收斂，由以上所述，它的和 s' 不依賴于項的排列順序。另一方面，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|+u_n) \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$$

两个級数也是正項的而且收斂（参考[**124**]），因为它的每一項不大于 $|u_n|$，就是收斂級数（3）的对应項。

根据以上所述，这两个級数的和也不依賴于各項的排列順次，所以逐項相减得到的級数，就是級数（1），其和也就不依賴于項的排列順序，于是証完。

系 对于絕对收斂級数，可以先把它的項任意組合起来，再依組相加，因为这样分組不过是改变項的排列順序，所以級数的和不变。

附注 若由絕对收斂級数中剔去任何一序列的項，这样得到的級数也是絕对收斂的，因为这样作对应于在正項級数（3）中剔去一序列的項，显然，它仍然收斂，不过和减小些就是了。特別是，絕对收斂級数的正項組成的級数与負項組成的級数都是收斂的。用 s' 記正項組成的級数之和，$(-s'')$ 記負項組成的級数之和。当 n 无限增加时，原級数的前 n 項和将含有上述两級数中任意多項，取極限，显然得到：

$$s=\lim s_n=s'-s''。$$

不难証明，当級数收斂而不絕对收斂时，它的正項組成的級数与負項組成的級数，都是正常發散的。例如，級数[**124**]：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

不是絕对收斂，而級数

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots \quad \text{与} \quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\cdots$$

都發散。当 n 无限增加时，前一級数的前 n 項和趋向 $(+\infty)$，后一級数的趋向 $(-\infty)$。利用上述的情況，黎曼証明了适当的变动一个非絕对收斂級数的項的排列順序，可以使它的和等于任意一个数。如此，絕对收斂級数与和不依賴于項的順

序的級数，这两个概念是一致的。

还要提出，若变动任何一个收斂級数(不是絕对收斂)中有限項的位置，則当 n 足够大时，前 n 項和 s_n 不变，就是說，級数仍然收斂，而級数之和不变。上面的討論与結果是在变动无穷多項的情形。

138. 絕对收斂級数的乘法 两个絕对收斂无穷級数相乘时，可以应用有限項和相乘的法則：乘积等于，由一个級数中每一項乘另一級数中每一項，所得到的諸乘积相加作成的級数之和。这时項的排列順序沒有关系，因为这样作出的級数也是絕对收斂的。

設給定絕对收斂級数：

$$\left.\begin{aligned} s&=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \\ \sigma&=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots。\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

先考虑特殊情形，設两个都是正項的，我們把乘积排列成下面的順序：

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1+\cdots+u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1+\cdots。 \tag{5}$$

首先我們証明正項級数(5)是收斂的，而且它的和 S 等于 $s\sigma$。

用 S_n 記級数(5)的前 n 項和。我們总可以选出一个足够大的数 m，使得 S_n 所有的項都在

$$s_m=u_1+u_2+\cdots+u_m \text{ 与 } \sigma_m=v_1+v_2+\cdots+v_m$$

的乘积內出現，就是使得 $S_n\leqslant s_m\sigma_m$，也就是

$$S_n<s\sigma, \tag{6}$$

因为 $s_m\leqslant s$，$\sigma_m\leqslant\sigma$；由此推知級数(5)收斂[**120**]。

用 S 記級数(5)的和，由不等式(6)，显然就有：

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n\leqslant s\sigma。$$

現在考虑乘积 $s_n\sigma_n$，当給定 n 时，显然可以找出一个足够大的数 m，使得 s_n 与 σ_n 乘积中所有的項都在 S_m 中出現；这时我們得到

$$s_n\sigma_n\leqslant S_m\leqslant S,$$

所以，当 $n\to\infty$ 时，取極限，

$$s_n\sigma_n\to s\sigma\leqslant S。 \tag{7}$$

由这不等式与(6)相联系，就得到 $S=s\sigma$，于是証完。

現在設級数(4)是任意項的，但是絕对收斂。于是推知，正項級数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \text{ 与 } |v_1|+|v_2|+\cdots+|v_n|+\cdots$$

收斂，所以，根据以上的証明，級数

$$|u_1||v_1| + |u_2||v_1| + |u_1||v_2| + |u_2||v_2| + \cdots + \\ + |u_n||v_1| + \cdots + |u_1||v_n| + \cdots$$

收斂。

由此看出，依上述法則作出的級数（5）絕对收斂。現在用

$$a_1', a_2', \cdots, a_n', \cdots; \quad a_1'', a_2'', \cdots, a_n'', \cdots$$

$$b_1', b_2', \cdots, b_n', \cdots; \quad b_1'', b_2'', \cdots, b_n'', \cdots$$

各記（4）中級数的正項与負項的絕对值。我們知道（[**137**]附注），由这些項作成的級数收斂，設

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n', \quad \sigma' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n', \quad s'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'', \quad \sigma'' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n''。 \tag{8}$$

就有[**137**]：

$$s = s' - s'', \quad \sigma = \sigma' - \sigma''。$$

已經証明，（8）中正項級数可以彼此逐項相乘，乘得的級数之和各等于

$$s'\sigma', \; s''\sigma'', \; s'\sigma'', \; s''\sigma',$$

而这些乘得的級数相加減就組成級数（5），所以

$$S = s'\sigma' + s''\sigma'' - s'\sigma'' - s''\sigma' = (s' - s'')(\sigma' - \sigma'') = s\sigma,$$

于是証完。

例 級数

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-q},$$

当 $|q| < 1$ 时，絕对收斂，所以：

$$\frac{1}{(1-q)^2} = (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots)(1 + q + \cdots + q^{n-1} + \cdots) = \\ = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots。$$

139. 枯莫尔判別法 勾犀与达朗倍尔关于級数的收斂与發散的判別法[**121**]，虽然在实用上是很重要的，不过仍是在特殊情形下才能用，在很多比較簡單的情形中，就不能应用。下面这个判別法适用的范圍更广泛些。

枯莫尔判別法 設有正項級数：

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{9}$$

若可以求得这样一个正数的序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$，使得由某一項起，对于所有 n 的值，滿足条件

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} \geqslant \alpha > 0, \tag{10}$$

原书缺页

收斂，我們就有

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}}, \quad \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leqslant \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}, \quad \cdots, \quad \frac{u_2}{u_1} \leqslant \frac{v_2}{v_1},$$

由此相乘求得

$$\frac{u_n}{u_1} \leqslant \frac{v_n}{v_1} \quad 或 \quad u_n \leqslant \frac{u_1}{v_1} v_n。$$

由最后的不等式，并注意[120]（当 $k=\frac{u_1}{v_1}$ 时），推知級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂。类似的可以証明，若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$，而且級数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 發散。則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 發散。

140. 高斯判別法 这是一个很有用的判别法①

若正項級数(9)：

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

中，比 $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ 可以表現成

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+\frac{\omega_n}{n^p}, \tag{14}$$

其中 $p>1$，$|\omega_n|<A$，而且 A 不依賴于 n，就是說 ω_n 是有界的；則当 $\mu>1$ 时，級数(9)收斂；$\mu\leqslant 1$ 时，發散。

注意，在达朗倍尔判別法不能用的情形，这个判别法可以解决。公式(14)可以把比 $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ 依 $\frac{1}{n}$ 的冪展开得到，也就是，如果可能的話，把比 $\frac{1}{n}$ 次数低的項分开。

現在証明，我們分两种情形：(1) $\mu\neq 1$，(2) $\mu=1$。在情形(1)，应用枯莫尔判别法，設

$$\alpha_n=n,$$

注意这时 $\alpha_n>0$ 而且 $\Sigma\frac{1}{n}$ 發散[119]。显然，在給定的情形下，我們有：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\alpha_n\cdot\frac{u_n}{u_{n+1}}-\alpha_{n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{\omega_n}{n^p}\right)-n-1\right]=\mu-1。$$

若 $\mu>1$，則由某一項起就有：

$$\alpha_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-\alpha_{n+1}>\alpha>0,$$

其中 α 是任何一个小于 $\mu-1$ 的正数，于是級数(9)收斂。若 $\mu<1$，則由某一項起，我們有：

① 实际上是高斯所建立的判别法的推广。

$$\alpha_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-\alpha_{n+1}<0,$$

于是級数(9)發散[139]。

在情形(2),我們有:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\omega_n}{n^p}。$$

应用枯莫尔判别法,設

$$\alpha_n=n\log n,$$

并作級数

$$\Sigma\frac{1}{\alpha_n}=\Sigma\frac{1}{n\log n},\tag{15}$$

这个和可以由任何一个正整数作起,因为前有限項不影响收斂性[118]。先用勾犀积分判别法証明級数(15)發散,就是須要証明积分:

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x\log x}\quad(a>1)$$

發散。

我們有:

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x\log x}=\int_a^\infty\frac{d(\log x)}{\log x}=\int_{\log a}^\infty\frac{dt}{t}=\log(\log x)\Big|_a^\infty,$$

当 x 增加时,函数 $\log(\log x)$ 无限增加,就是这个积分是發散的,于是級数(15)發散。現在作差 $\alpha_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-\alpha_{n+1}$,应用(14):

$$\begin{aligned}\alpha_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-\alpha_{n+1}&=n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\omega_n}{n^p}\right)\log n-(n+1)\log(n+1)=\\&=(n+1)\log n+\frac{\omega_n\log n}{n^{p-1}}-(n+1)\log(n+1)=\\&=\frac{\omega_n\log n}{n^{p-1}}+(n+1)\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)。\end{aligned}\tag{16}$$

因子 ω_n 是有界的,当 $n\to\infty$ 时,比 $\frac{\log n}{n^{p-1}}$ 趋向零,因为由条件 $p-1>0$,而 $\log n$ 比 n 的任何正冪增加得慢([66]例2)。再設 $\frac{1}{n+1}=-x$,則 $x\to0$,而且右边第二項是

$$(n+1)\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{\log(1+x)}{x},$$

于是趋向(-1)[38]，如此我們看出，在这情形下，級数$\sum \frac{1}{\alpha_n}$發散，而且当$n\to\infty$时，$\left(\alpha_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-\alpha_{n+1}\right)\to -1$，所以当$n$足够大时，$\alpha_n\frac{v_n}{u_{n+1}}-\alpha_{n+1}<0$，因此級数(9)發散[139]，于是証完。

这个收斂性的判別法，也可以用于任意項級数，只要把v_n換成$|u_n|$。不过在这情形下，只能判断級数是否絕对收斂。由此只能求出絕对收斂的条件，而不能得到發散的条件，因为我們知道有的級数可能不是絕对收斂，但是也不發散[124]。如此我們得到：

高斯判別法的补充　設任意項級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{17}$$

中，

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1+\frac{\mu}{n}+\frac{\omega_n}{n^p}, \tag{18}$$

其中$p>1$而$|\omega_n|<A$，則当$\mu>1$时，級数(17)絕对收斂。

不难証明，当$\mu<0$时，它發散。实际上，在这情形下，注意ω_n是有界的，于是当$n\to\infty$时，

$$\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}\to 0,\quad 1+\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}\to 1,$$

所以由某一項起，根据条件$\mu<0$，

$$\frac{\mu}{n}+\frac{\omega_n}{n^p}=\frac{\mu}{n}\left(1+\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}\right)<0,$$

于是

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|<1,$$

就是由某一項起，这級数的項的絕对值增大，于是当$n\to\infty$时，这級数的一般項u_n不趋向零，所以級数(17)發散。

141. 超越几何級数　現在我們应用以上所述来討論超越几何級数或高斯級数：

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots。\tag{19}$$

实用中有些函数可以化为这样的級数。直接代入α，β与γ，很容易得到下面这些等式：

$$F(1,\beta,\beta;x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

$$F(-m,\ \beta,\ \beta;\ -x)=(1+x)^m,$$

$$\left.\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \beta;\ -x)-1}{\alpha}\right|_{\alpha=0}=-\log(1+x)。\tag{20}$$

为要討論級数(19)的收斂性,作出后項与相邻前項之比:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\alpha+n)\ (\beta+n)}{(n+1)\ (\gamma+n)}x\to x\ \text{当}\ n\to\infty,\tag{21}$$

由[121]系,級数(19)当 $|x|<1$ 时收斂,$|x|>1$ 时發散。于是只剩下两种情形:(1) $x=1$,(2) $x=-1$。还要注意,当 n 足够大时,$(\alpha+n)$,$(\beta+n)$ 与 $(\gamma+n)$ 都是正的;所以当 n 足够大时,若 $x=1$,級数(19)的項都同号;若 $x=-1$,它是交錯級数。

在第一个情形下,依二項式公式展开(算作 n 足够大),再把得到的絕对收斂級数相乘[138]得到:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)\ (\gamma+n)}{(\alpha+n)\ (\beta+n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}-\frac{\alpha^3}{n^3}+\cdots\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}-\frac{\beta^3}{n^3}+\cdots\right)=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

其中 ω_n 是有界的。再者,在这情形下,級数:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}+\cdots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}+\cdots$$

中,前面可以去掉足够多的項,使得剩下的項都同号,于是应用高斯判别法,得到:

当 $\gamma-\alpha-\beta+1>1$ 就是 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时,

这級数絕对收斂,

当 $\gamma-\alpha-\beta+1\leqslant1$ 就是 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant0$ 时,

它發散。

在第二个情形下,$x=-1$,由某一項起是交錯級数:

$$1-\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}-\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}+\cdots。$$

像以上一样,我們有:

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

应用高斯判别法的补充，得到：

当 $\gamma-\alpha-\beta+1>1$ 就是 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，

它收斂，

当 $\gamma-\alpha-\beta+1<0$ 就是 $\gamma-\alpha-\beta<-1$ 时，

發散。

在

$$\gamma-\alpha-\beta=-1$$

的情形下，可以証明，这級数的一般項趋向一个極限不是零，所以是發散的[**119**]。最后，在

$$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$$

的情形下，可以証明，这級数的項的絕对值漸减，而且当 $n\to\infty$ 时，趋向零，于是級数收斂[**123**]，但不是絕对收斂。最后两个肯定的証明我們不再詳述了。

应用这个于二項式的展开式：

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

这可以在(19)中，用 $(-m)$ 替代 α，讓 $\beta=\gamma$，再用 $(-x)$ 替代 x，就得到了。我們知道，这級数当 $|x|<1$ 时收斂，$|x|>1$ 时發散，并且

当 $m>0$, $x=-1$ 时，絕对收斂，

$m<0$, $x=-1$ 时，發散，

$m>0$, $x=1$ 时，絕对收斂，

$-1<m<0$, $x=1$ 时，非絕对收斂，

$m\leqslant -1$, $x=1$ 时，發散，

m 是正整数时，成为多項式。

以后[**149**]我們証明，若二項式的級数当 $x=\pm 1$ 时收斂，則它的和等于 $(1\pm 1)^m$，就是 2^m 或 0。

注意，以上我們算作 α, β 与 γ 不是零或負整数。对于 γ 尤其重要，因为那时級数的項沒有意义（分母等于零），若 α 或 β 是零或負整数，則級数成了有限項的和。

142. 二重級数 考慮下面这样的矩形数陣，上边与左边有头，下边与右边无尾：

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\
\hline
1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & \cdots \\
2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} & \cdots \\
3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} & \cdots \\
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m & u_{m1} & u_{m2} & u_{m3} & \cdots & u_{mn} & \cdots \\
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \tag{22}
$$

我們用 u 右下角的第一个附标記它在第几列，第二个附标記它在第几行。如此 u_{ik} 記表中位于第 i 列与第 k 行交点的数。

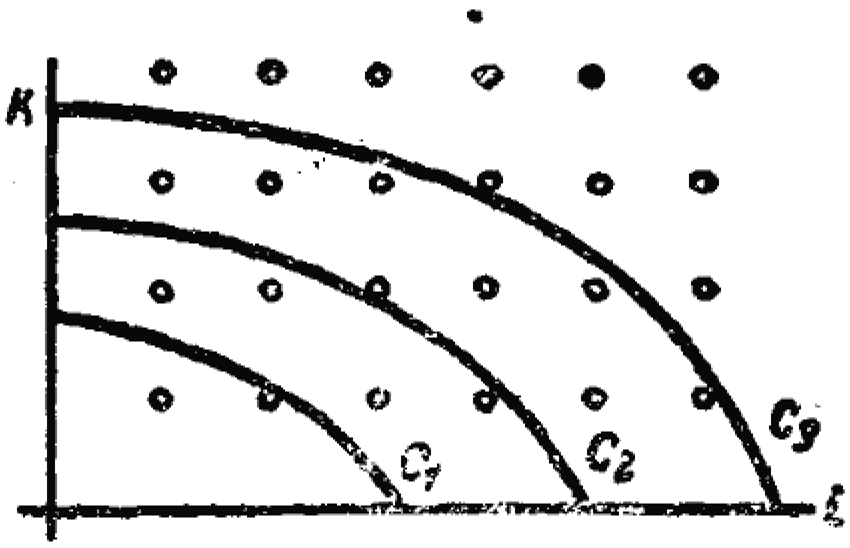


圖 157.

先設所有的数 u_{ik} 都是正的。

为要确定表 (22) 中所有的数的和的概念，在平面上标記出坐标为正整数的点 $M(i, k)$，再在第一象限中作这样的一串曲綫：

$$C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$$

与坐标軸相交，使得每一个点 M，当 n 足够大时，出現在以曲綫 C_n 与两坐标軸为界的区域 (C_n) 之內（圖 157），而且 (C_n) 包含在 (C_{n+1}) 內。作出对应于 (C_n) 內所有的点 M 的数 u_{ik} 之和 S_n，当 n 增大时，显然，这个和也增大，所以只能有两种情形

(1) 和 S_n，对于所有的 n 的值，是有界的，这时有一个有限的極限存在：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

(2) 当 n 增大时，和 S_n 无限增大。

在第一种情形下，我們說二重級数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} u_{ik} \tag{23}$$

收斂而和为 S。在第二种情形下，我們說二重級数 (23) 發散。

正項收斂級数的和与怎样加无关，就是与曲綫 C_n 的选擇无关，并且也可以依列相加或是依行相加：

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\right), \tag{24}$$

就是先作出表中每一列（或行）的和，再把这些得到的和相加。

实际上，任意作一串曲綫 $C_1', C_2', \cdots, C_n', \cdots$，具有 $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ 的性

質。用 S'_n 記对应于区域 (C'_n) 内所有的点的数之和。給定 n 时，总可以选出一个足够大的 m，使得 (C'_n) 包含在 (C_m) 内，于是

$$S'_n \leqslant S_m \leqslant S,$$

所以，根据以前，一定有一个有限的極限存在：

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S' \leqslant S_{\circ}$$

若把 C_n 与 C'_n 的地位互换，同样可以証明，

$$S \leqslant S',$$

于是只可能

$$S = S'_{\circ}$$

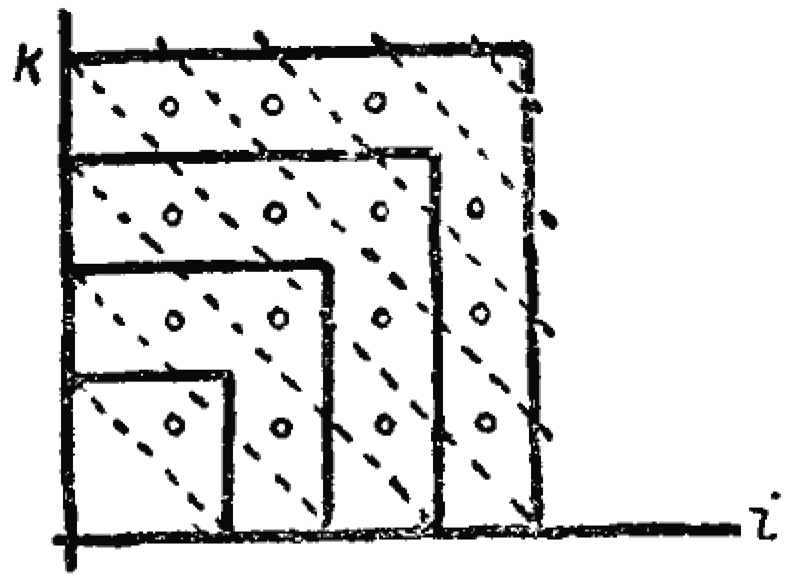


圖 158.

二重級数(23)的和可以取由綫段(圖 158)：

$$i = \text{常数}, \qquad k = \text{常数}$$

連成的折綫作 C_n 得到。

这样作叫做"依方塊"相加：

$$S = u_{11} + (u_{12} + u_{22} + u_{21}) + \cdots + (u_{1n} + u_{2n} + \cdots + u_{nn} + u_{n\,n-1} + \cdots + u_{n1}) + \cdots_{\circ}$$

还可以"依对角綫"相加；

$$S = u_{11} + (u_{12} + u_{21}) + (u_{13} + u_{22} + u_{31}) + \cdots + \\ + (u_{1n} + u_{2n-1} + \cdots + u_{n1}) + \cdots_{\circ} \tag{25}$$

为要証明公式(24)，首先我們指出，表(22)中任意多項的和小于 S，所以任何一列或一行內的項之和也是总小于 S，由此推知每个級数：

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} = s'_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} u_{ik} = s''_k$$

收斂。

并且当 m 与 n 是任何有限值时，我們可以証明：

$$\left.\begin{aligned} s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_m &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\right) \leqslant S, \\ s''_1 + s''_2 + \cdots + s''_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\right) \leqslant S_{\circ} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

实际上，先只考慮表(22)中前 m 列，再取出它們的前 p 行，显然就有：

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\right) \leqslant S_{\circ}$$

根据級数相加的法則[**119**]，就有

$$s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_m = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\right) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\right) \leqslant S,$$

因为極限号下的表达式不大于 S。

类似的方法可証 (26) 中第二个不等式。

由不等式(26)推知这两个級数：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_{ik}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}s'_i=\sigma',\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}u_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}s''_k=\sigma''$$

收斂，而且它們的和 $\leqslant S$，就是

$$\sigma'\leqslant S,\quad \sigma''\leqslant S。$$

从另一方面看，选出一串曲綫 C_r，当 m 足够大时，和 S_r 中所有的項都在

$$s'_1+s'_2+\cdots+s'_m \text{ 与 } s''_1+s''_2+\cdots+s''_m$$

中出現，就是

$$S_r\leqslant s'_1+s'_2+\cdots+s'_m\leqslant\sigma',\quad S_r\leqslant s''_1+s''_2+\cdots+s''_m\leqslant\sigma'',$$

于是取極限

$$S=\lim_{r\to\infty}S_r\leqslant\sigma' \text{ 而且 } S\leqslant\sigma''。$$

根据 $\sigma'\leqslant S$ 与 $\sigma''\leqslant S$，只可能

$$\sigma'=\sigma''=S,$$

于是証完。

对于任意項二重級数，我們只討論絕对收斂級数，就是取各項的絕对值作成的二重級数是

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}|u_{ik}|$$

收斂的。

与[**124**]的理由类似，可以証明，这样的級数有和：

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}u_{ik}\right),\tag{27}$$

存在，并且这个和不依賴于加的方式，特別是可以依列或依行相加。

附注 很多絕对收斂級数的性質可以推广到絕对收斂二重級数。重要的如[**124**]中的附注：若一个二重級数每一項的絕对值不大于一个收斂二重正項級数的对应項，則所給的二重級数絕对收斂。

[**120**]中性質 2 也可以同样推广。

例 1. 級数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{i^{\alpha}k^{\beta}}\tag{28}$$

当 $\alpha>1$, $\beta>1$ 时，收斂；因为依方塊相加，就有：

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{i^\alpha k^\beta}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^\alpha}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta}\right)<AB,$$

其中 A, B 各記收斂級数([**122**], $\alpha>1$, $\beta>1$):

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^\alpha},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\beta},$$

的和。

2. 級数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{(i+k)^\alpha},\tag{29}$$

当 $\alpha>2$ 时收斂,当 $\alpha\leqslant 2$ 时發散;因为依对角綫相加,就有:

$$S_n=\frac{1}{2^\alpha}+2\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+(n-1)\frac{1}{n^\alpha}=\frac{1}{2^{\alpha-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

由此,把所有的 $\left(1-\frac{1}{n}\right)$都換成$\frac{1}{2}$就减小,換成 1 就加大,于是求得:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right]<S_n<\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha-1}}。$$

但是級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, 当 $\alpha>2$ 时收斂, $\alpha\leqslant 2$ 时發散,于是証完。

3. 若 a 与 c 是正数,而且 $b^2-ac<0$, 則級数:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{(ai^2+2bik+ck^2)^p},\tag{30}$$

当 $p>1$ 时收斂, $p\leqslant 1$ 时發散。

先設 $b\geqslant 0$。因为,显然:

$$i^2+k^2\geqslant 2ik,$$

于是,用 A_1 記 a 与 c 中較小的数, A_2 記 a, b, c 中最大的数,就有:

$$2A_1ik\leqslant ai^2+2bik+ck^2\leqslant A_2(i+k)^2,$$

由此,我們只須注意 $p>0$ 的情形,由上式求得:

$$\frac{1}{A_2^p}\,\frac{1}{(i+k)^{2p}}\leqslant\frac{1}{(ai^2+2bik+ck^2)^p}\leqslant\frac{1}{(2A_1)^p}\,\frac{1}{i^p k^p},$$

根据以上的附注与例 1 例 2, 注意因子$\frac{1}{A_2^p}$ 与 $\frac{1}{(2A_1)^p}$ 不依賴于 i 与 k,可以肯定这級数当 $p>1$ 时收斂, $p\leqslant 1$ 时發散。

再設 $b<0$,用 A_0 記 a, c 与 $|b|$ 中最大的数,根据不等式 $(\sqrt{a}\,i)^2+(\sqrt{c}\,k)^2\geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{ac}\,ik$,推知:

$$2(b+\sqrt{ac})ik\leqslant ai^2+2bik+ck^2<A_0(i+k)^2,$$

其中 $b+\sqrt{ac}>0$，因为由条件 $|b|<\sqrt{ac}$。以下的証明与 $b>0$ 的情形完全一样。

143. 变項級数。一致收斂級数 由泰勒公式与麦克劳林公式作出的級数，它們的項依賴于变量 x。在第二卷中我們要介紹非常重要的三角級数，它們有下面的形状：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中各項不只依賴于 n，而且也依賴于变量 x。

現在我們来研究，更一般的依賴于某独立变量 x 的变項級数。

設有函数的序列：

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots,\ u_n(x),\ \cdots \tag{31}$$

确定于区間 $[a,b]$ 上。若无穷級数：

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{32}$$

当 x 取这区間上任何值时 $(a\leqslant x\leqslant b)$ 收斂，我們就說，它在区間 $[a,b]$ 上收斂。

显然，級数(32)的前 n 項和，級数的和与它的余和都是 x 的函数，我們各記作

$$s_n(x),\ s(x),\ r_n(x),$$

于是

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x),\qquad r_n(x)=s(x)-s_n(x)。 \tag{33}$$

若級数(32)在区間 $[a,b]$ 上收斂而有和 $s(x)$，就知道，当給定任意一个正数 ε 时，对于在 $[a,b]$ 上 x 的每一个值，可以找到这样一个数 N，使得对于所有的 $n>N$，我們有：

$$|r_n(x)|<\varepsilon。 \tag{34}$$

显然，这个数 N 依賴于选出的 ε。还要注意，一般来講，N 也依賴于所选出的 x 的值，就是，当給定 ε 时，对于在 $[a,b]$ 上 x 的不同的值，N 可以不同，所以我們把它記作 $N(x)$。若給定任意一个正数 ε 时，可以求得这样一个不依賴于 x 的数 N，使得当 x 取区間 $[a,b]$ 上任何值时，对于所有的 $n>N$，滿足不等式

$$|r_n(x)|<\varepsilon;$$

則級数(32)叫做在区間 $[a,b]$ 上一致收斂。

例如，考慮級数：

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\cdots-\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}-\cdots, \tag{35}$$

其中 x 在区間 $[0,a]$ 上改变，而 a 是給定的任何一个正数。

不难看出，这个級数可以写成：

$$\frac{1}{x+1}-\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)-\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n}\right)-\cdots,$$

所以

$$s_n(x)=\frac{1}{x+n},\quad s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=0,\quad r_n(x)=-\frac{1}{x+n},$$

若是我們要作得

$$|r_n(x)|=\frac{1}{x+n}<\varepsilon, \tag{36}$$

只要取

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-x=N(x)。 \tag{37}$$

若我們要一个不依賴于 x 的数 N，使得对于区間 $[0, a]$ 上所有的 x 的值，当 $n>N$ 时，滿足不等式(36)，則設 $N=\frac{1}{\varepsilon}\geqslant N(x)$ 就成，因为这时对于区間 $[0, a]$ 上所有的 x 的值，当 $n>N$ 时，滿足不等式 (37)，于是滿足不等式(36)。所以級数(35)在区間 $[0, a]$ 上一致收斂。

并不是任何一个級数都有一致收斂性，因为并不是对于任何一个級数可以找到一个不依賴于 x 的 N，不小于在区間 $[a, b]$ 上所有的 $N(x)$。

例如，在区間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上，考虑級数：

$$x+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots+x^{n-1}(x-1)+\cdots。 \tag{38}$$

前 n 項和是：

$$s_n(x)=x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1}),$$

就是

$$s_n(x)=x^n,$$

于是推知[26]：

$$\text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时},\quad s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=0,$$

而且

$$\text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时},\quad r_n(x)=s(x)-s_n(x)=-x^n。$$

当 $x=1$ 时，代入 $x=1$ 在(38)中，得到級数：

$$1+0+0+\cdots,$$

于是对于任何的 n

$$s_n(x)=1,\quad s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=1,$$

$$r_n(x)=s(x)-s_n(x)=0,$$

所以級数(38)在整个区間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上收斂，但在这区間上非一致收斂。实际上，根据当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$r_n(x)=-x^n$，若要滿足不等式(34) $|r_n(x)|<\varepsilon$，須要

$$x^n<\varepsilon,\ 就是\ n\log x<\log\varepsilon,$$

再用負数 $\log x$ 除，得到

$$n>\frac{\log\varepsilon}{\log x}。$$

所以在这情形下 $N(x)=\dfrac{\log\varepsilon}{\log x}$，不能再小。

当 x 逼近 1 时，$\log x\to 0$，函数 $N(x)$ 无限上升，于是不能找到一个 N，使得在整个区間$[0, 1]$上，当 $n>N$ 时，滿足不等式(34)。由于这个情形，縱然級数(38)在整个区間$[0, 1]$上收斂，但是当 x 逼近 1 时，它收斂得非常慢；于是当 x 与 1 愈近时，要求这个級数的和的近似値，愈要取較多的項。虽然当 $x=1$ 时，这个級数只剩了一項。

現在我們叙述一致收斂的另一个定义，它与以上定义是相当的。在[**125**]中我們講过收斂級数的一个必要且充分条件。在現在的情形下可以这样叙述：在区間$[a, b]$上，級数(32)收斂的一个必要且充分条件是，当任意給定一个正数 ε 时，对于$[a, b]$上每一个 x 的値，有这样一个 N 存在，使得当 $n>N$，而 p 为任何正整数时，

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon。\tag{39}$$

当給定 ε 时，这个 N 也可能依賴于选出的 x。若任意給定一个正数 ε 时，对于$[a, b]$上所有 x 的値，有同一个数 N 存在，使得当 $n>N$ 而 p 为任何正整数时，(39)成立；就說，級数(32)在区間$[a, b]$上一致收斂。

須要証明这个新定义与以前的定义相当，就是，若在前一个意义下，一个級数一致收斂，則在新的意义下也一致收斂，并且反过来也对。先設一个級数在前一个意义下一致收斂，就是当 $n>N$ 时，$|r_n(x)|<\varepsilon$，其中 x 可取区間上任何値，而 N 不依賴于 x。显然，我們有：

$$u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)=r_n(x)-r_{n+p}(x),\tag{40}$$

于是推知：

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\leqslant|r_n(x)|+|r_{n+p}(x)|,$$

当 $n>N$ 时，$n+p>N$，

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<2\varepsilon。\tag{41}$$

由于 ε 是任意选擇的，所以在新的意义下，这級数一致收斂。再設一个級数在

新的意义下一致收斂，就是有一个不依賴于 x 的 N 存在，当 $n>N$，p 为任何正整数，x 取 $[a, b]$ 上任何值时，不等式(39)成立，注意

$$r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots=\lim_{p\to\infty}[u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)],$$

由不等式(39)取極限，得到当 $n>N$ 时，

$$|r_n(x)|\leqslant\varepsilon,$$

根据 ε 的任意性，于是由一致收斂的新定义推出前一个定义，所以两个定义相当。

注意，在一致收斂的第一个定义(34)中，我們利用了 $r_n(x)$，这等于已經补充假定了級数是收斂的。在一致收斂的第二个定义中(39)本身就包含了級数收斂这事实。

144. 一致收斂函数序列 我們以上考虑的函数序列：

$$s_1(x), s_2(x), \cdots, s_n(x), \cdots, \tag{42}$$

是由級数(32)确定的，其中 $s_n(x)$ 記这級数的前 n 項和。不过也可以算作序列(42)是給定的，再由它們作出級数，讓这級数的前 n 項和是这序列的第 n 項 $s_n(x)$，这个級数的項显然就由公式：

$$u_1(x)=s_1(x),\quad u_2(x)=s_2(x)-s_1(x),\quad\cdots,\quad u_n(x)=s_n(x)-s_{n-1}(x),\cdots \tag{43}$$

确定。

序列(42)常是比(43)簡單，例如以上的两个例。

如此我們引起函数序列的收斂与一致收斂两个概念：

設給定函数序列(42)：

$$s_1(x), s_2(x), \cdots, s_n(x), \cdots,$$

确定于区間 $[a, b]$ 上，若对于这区間上每一个 x 的值，有極限

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x) \tag{44}$$

存在，則序列(42)叫做在区間 $[a,b]$ 上收斂，函数 $s(x)$ 叫做序列(42)的極限函数。

若当任意給定一个正数 ε 时，有这样一个不依賴于 x 的数 N 存在，使得在整个区間 $[a, b]$ 上，对于所有的 $n>N$，不等式

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon \tag{45}$$

成立，則序列(42)叫做在区間 $[a, b]$ 上一致收斂。条件(45)可以用与它相当的条件：

$$\text{当 } m \text{ 与 } n>N \text{ 时，}\quad |s_m(x)-s_n(x)|<\varepsilon \tag{46}$$

替代。

序列(42)一致收斂的条件，相当于級数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{47}$$

一致收斂的条件，这級数中

$$u_1(x)=s_1(x),\ u_2(x)=s_2(x)-s_1(x),\ \cdots,\ u_n(x)=s_n(x)-s_{n-1}(x),\ \cdots。$$

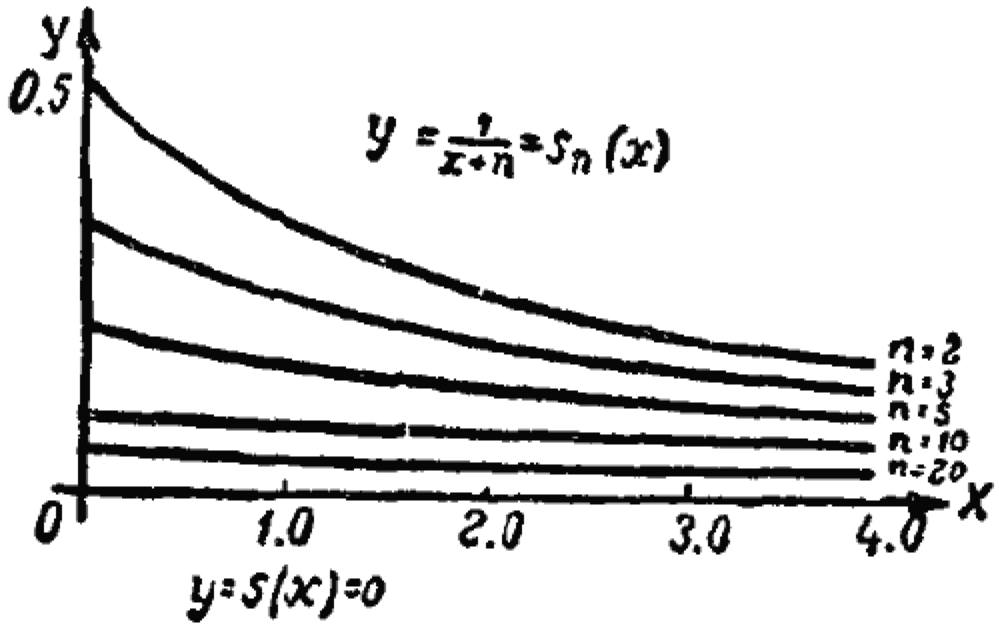


圖 159.

討論一致收斂序列时，条件(45)与(46)相当，可以像討論无穷級数时，条件(35)与(36)相当，同样証明。

一致收斂序列的概念可以由几何解釋。若对应于不同的 n 作出 $s_n(x)$ 与 $s(x)$ 的圖形，則当序列一致收斂时，对于所有在 $[a,b]$ 上的 x 的値，縱坐标界于曲綫 $s_n(x)$ 与 $s(x)$ 之間的最大綫段，当 $n\to\infty$ 时，应当 $\to 0$；若序列非一致收斂，这个条件就不滿足。

这种情形，对于以上两个不同的例

$$s_n(x)=\frac{1}{x+n},\quad s_n(x)=x^n,$$

在圖 159 与 160 上表示出来①。

在圖 160 中，極限函数 $s(x)$ 的圖形是 OX 軸上綫段 $(0,\ 1)$，不包含点 1，与一个孤立点 $(1,\ 1)$。

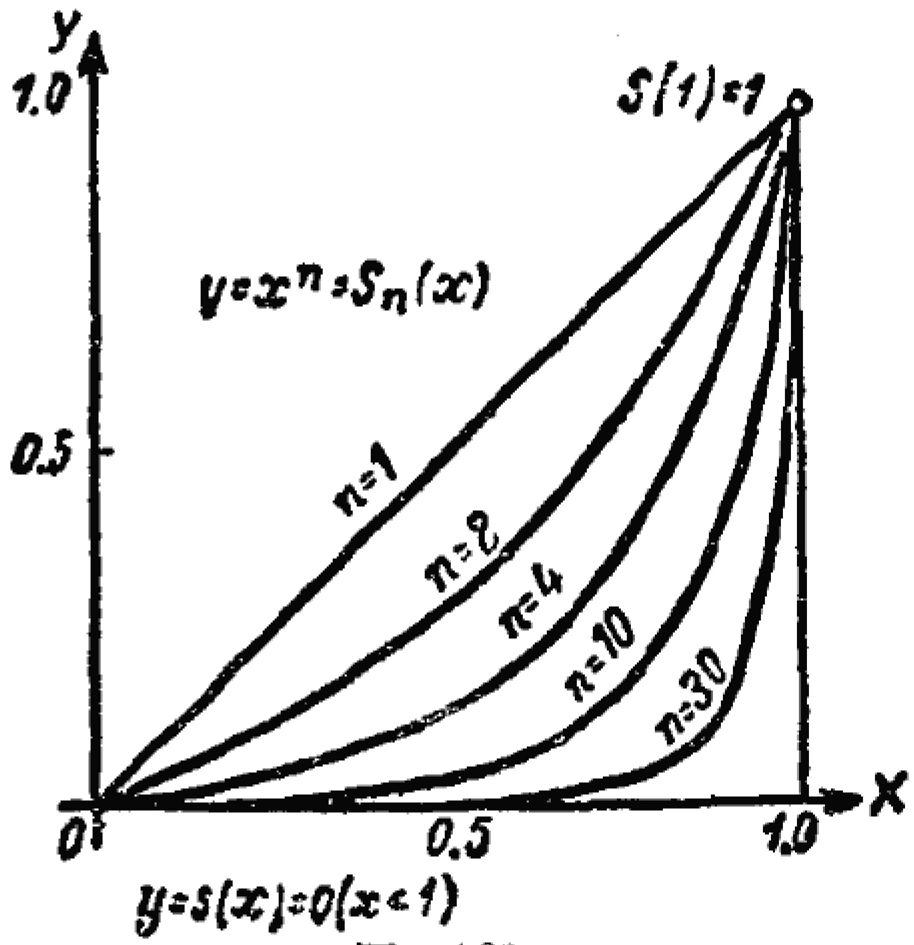


圖 160

在后一个例中，極限函数 $s(x)$ 不連續。不难作出一个例，是一个收斂序列，極限函数連續，但是非一致收斂。

序列(圖 161)：

$$s_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^3}\quad (0\leqslant x\leqslant a) \tag{48}$$

具有这样的性質。

显然，当 $x\neq 0$ 时，

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{\frac{1}{n^2}+x^2},$$

于是当 $n\to\infty$ 时，右边第一个因子 $\frac{1}{n}\to 0$，第二个因子趋向 $\frac{1}{x}$，就是当 $x\neq 0$ 时，

① 为使圖 159 与 160 比較清楚，对于 x 与 y 用的尺度不同。

$s_n(x)\to 0$。当 $x=0$ 时，显然，无論 n 是多少 $s_n(0)=0$，于是推知，对于区間$[0, a]$上所有的 x 的値

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0,$$

其中 a 是某一个正数。

这时，由于 $s(x)=0$，所以縱坐标在曲綫 $s_n(x)$ 与 $s(x)$ 之間的最大綫段，就是曲綫 $s_n(x)$ 的最大縱坐标 $\frac{1}{2}$（对应于 $x=\frac{1}{n}$）。因为当 $n\to\to\infty$时它不趋向零，所以序列(48)在区間$[0, a]$上不是一致收斂。实际上，若要使

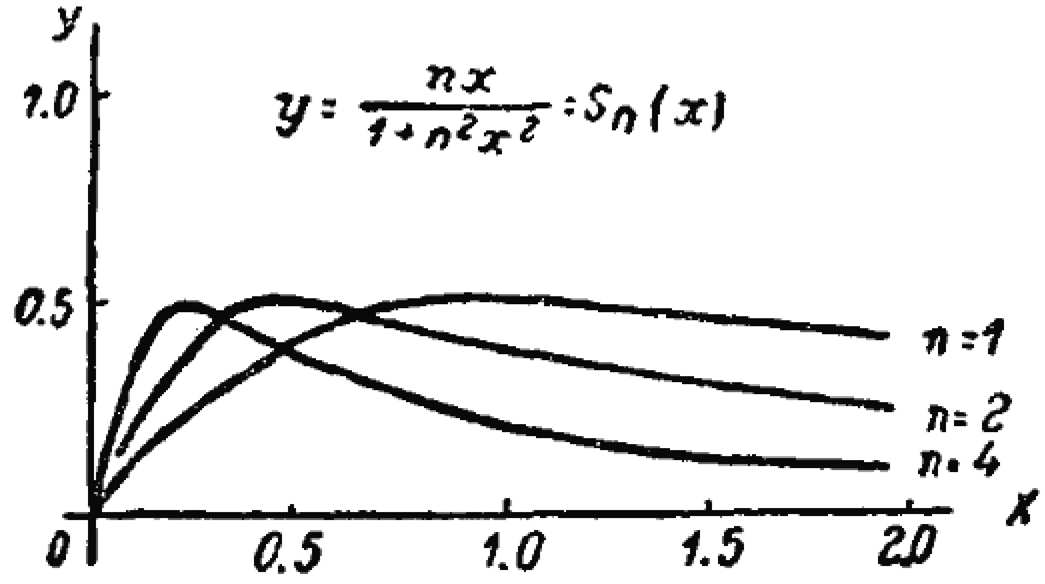


圖 161.

$$|s(x)-s_n(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^3}<\varepsilon,$$

解 n 的二次不等式：

$$0<1-\frac{x}{\varepsilon}n+x^2n^2,$$

算作 ε 足够小，就得到須要

$$n>\frac{1}{2x\varepsilon}[1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}]=N(x)。$$

当 $x\to 0$ 时，这个函数 $N(x)$ 无限上升，于是不能是一致收斂序列。

最后，我們指出，由圖 160 与 161 可以說明，序列 x^n 在区間$[0, q]$上一致收斂，其中 q 是任何一个正数<1；而且序列$\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在区間 $[q, a]$ 上一致連續，其中 $0<q<a$；这不难由直接計算証明。

145. 一致收斂序列的性質 1. 在区間 $[a, b]$ 上，一致收斂連續函数序列的極限函数也是連續的。設給定函数序列

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \cdots,\ s_n(x),\ \cdots,$$

其中所有的函数 $s_n(x)$ 在区間$[a, b]$上連續，并設

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

是这序列的極限函数。我們須要証明，給定无論多么小的一个正数 ε 时，可以求出这样一个数 δ，使得[**35**] 当 $|h|<\delta$ 时，

$$|s(x+h)-s(x)|<\varepsilon, \tag{49}$$

其中 x 与 $x+h$ 都在区間$[a, b]$上。当 n 取任何値时，我們可以写成：

$$|s(x+h)-s(x)|=|[s(x+h)-s_n(x+h)]+[s_n(x+h)-s_n(x)]+[s_n(x)-$$
$$-s(x)]|\leqslant|s(x+h)-s_n(x+h)|+|s(x)-s_n(x)|+|s_n(x+h)-s_n(x)|。$$

根据一致收斂的定义，我們选出足够大的 n，使得

$$|s(x+h)-s_n(x+h)|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad |s(x)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}。$$

选定这样的 n 后，再根据函数 $s_n(x)$ 的連續性，[35]我們可以求出这样一个数 δ，使得当 $|h|<\delta$ 时，

$$|s_n(x+h)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

連合这些不等式，就得到不等式(49)。

若函数序列收斂，但非一致收斂，則極限函数可能不連續，例如在区間[0,1]上的序列 x^n。

非一致收斂序列的極限函数也可能是連續的，例如序列：

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}。$$

2．若在区間$[a, b]$上的連續函数序列

$$s_1(x), s_2(x), \cdots, s_n(x), \cdots$$

一致收斂，而(α, β)是$[a, b]$上的任何一个区間，則

$$\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx \to \int_\alpha^\beta s(x)\,dx, \tag{50}$$

或者說

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx。 \tag{51}$$

若积分限是变量，例如 $\beta=x$，則函数序列

$$\int_\alpha^x s_n(t)\,dt \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \tag{52}$$

在区間$[a, b]$上也一致收斂(这种步驟叫做在积分号下取極限)。

先要注意，根据性質 1，極限函数 $s(x)$ 也連續。現在考虑差：

$$\int_\alpha^\beta s(x)\,dx-\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx=\int_\alpha^\beta [s(x)-s_n(x)]\,dx。$$

根据一致收斂性，給定 ε 时，我們就可以求出这样一个数 N，使得在区間(a,b)上，对于所有的 $n>N$，我們有：

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon,$$

所以[95](10_1)：

$$\left|\int_\alpha^\beta [s(x)-s_n(x)]\,dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |s(x)-s_n(x)|\,dx<\int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx=\varepsilon(\beta-\alpha)\leqslant\varepsilon(b-a)。$$

于是，对于任何一个在(a, b)上的区間(α, β)，当$n>N$时，就有：

$$\left|\int_\alpha^\beta s(x)dx-\int_\alpha^\beta s_n(x)dx\right|<\varepsilon(b-a)。$$

这不等式右边不依賴于α与β，而且当$\varepsilon\to0$时，它趋向零。根据ε的任意性，我們可以写出下面的結果：当任意給定一个正数ε_1时，有这样一个不依賴于α与β的N存在，使得当$n>N$时，

$$\left|\int_\alpha^\beta s(x)dx-\int_\alpha^\beta s_n(x)dx\right|<\varepsilon_1,$$

由此直接推出公式(50)。讓$\beta=x$，注意N不依賴于β，我們看出，序列(52)在$[a, b]$上一致收斂。

对于非一致收斂序列，这个定理可能不对。例如，設

$$s_n(x)=nxe^{-nx^2}\quad(0\leqslant x\leqslant1)$$

(圖162)。分$x>0$与$x=0$两种情形，不难証明，对于区間$[0, 1]$上任何的x，当$n\to\infty$时，

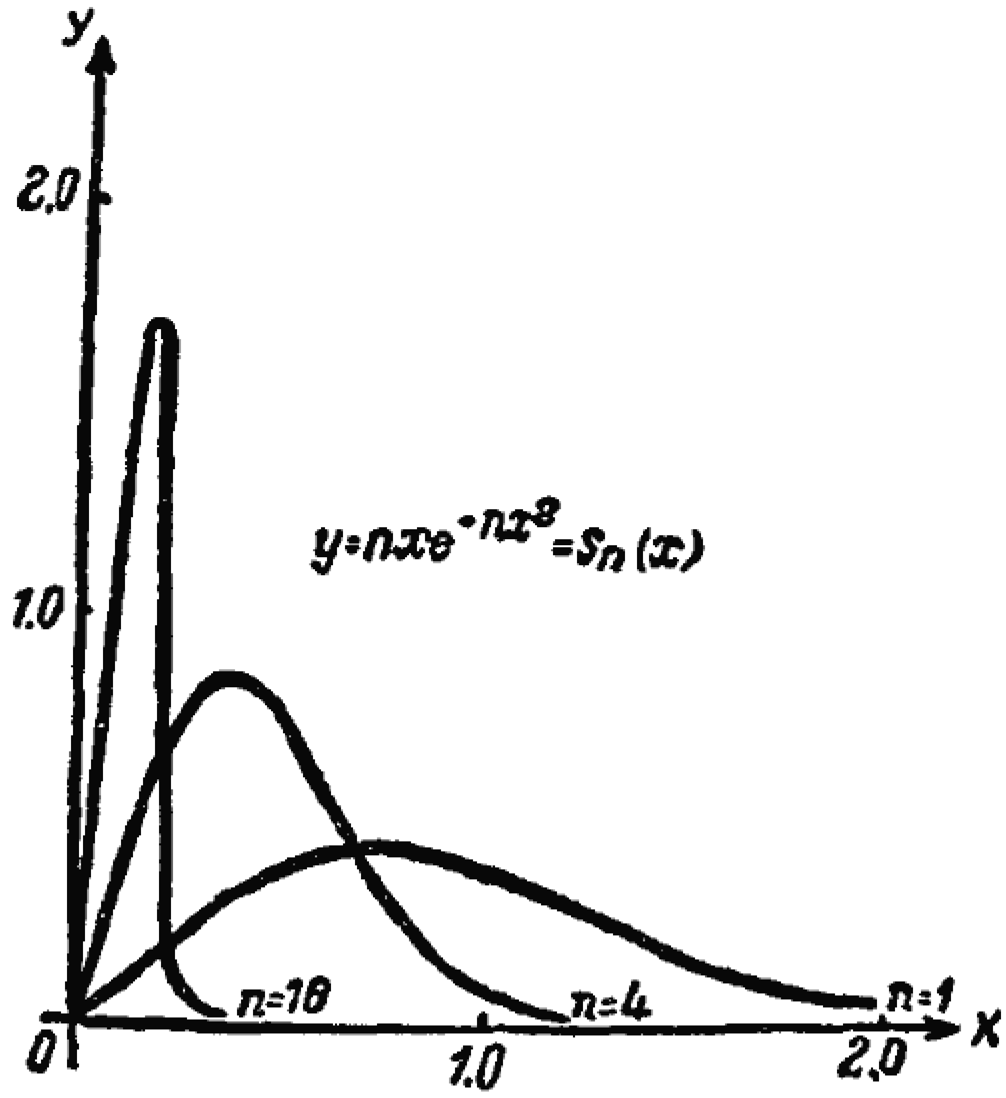


圖 162.

$$s_n(x)\to0,$$

所以这时$s(x)=0$。这个序列不是一致收斂的，因为当$x=\frac{1}{\sqrt{2n}}$时，曲綫$y=s_n(x)$有最大的縱坐标，这个縱坐标也就是最大的差$s_n(x)-s(x)$，当$n\to\infty$时，无限上升。

另一方面，我們有

$$\int_0^1 s_n(x)dx=n\int_0^1 xe^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-n})\to\frac{1}{2},$$

可是

$$\int_0^1 s(x)dx=0。$$

3．若函数序列：

$$s_1(x), s_2(x), \cdots, s_n(x), \cdots$$

在区間$[a, b]$上，每項有連續导数：

$$s_1'(x), s_2'(x), \cdots, s_n'(x), \cdots,$$

并且序列 $s'_n(x)$ 一致收斂，而有極限 $\sigma(x)$；序列 $s_n(x)$ 收斂，而有極限 $s(x)$；則 $s_n(x)$ 也一致收斂，而且

$$\sigma(x)=\frac{ds(x)}{dx}, \tag{53}$$

或者說：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ds_n(x)}{dx}=\frac{d\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)}{dx}。 \tag{54}$$

这个步驟叫做在导数号下取極限。

設 α 是区間 $[a, b]$ 上任何一个常数，x 在区間 $[a, b]$ 上改变，根据性質 2，就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^x s'_n(x)\,dx=\int_\alpha^x\sigma(x)\,dx。$$

但是

$$\int_\alpha^x s'_n(x)\,dx=s_n(x)-s_n(\alpha)\to s(x)-s(\alpha),$$

所以

$$s(x)-s(\alpha)=\int_\alpha^x\sigma(x)\,dx。$$

取这等式两边的导数，应用定积分的性質（性質 VII）[**95**]，就有：

$$\frac{ds(x)}{dx}=\sigma(x),$$

于是得証。剩下还要証序列 $s_n(x)$ 一致收斂。我們有：

$$s_n(x)=s_n(\alpha)+\int_\alpha^x s'_n(x)\,dx。$$

序列 $s_n(\alpha)$ 收斂而与 x 无关。根据性質 2，序列 $\int_\alpha^x s'_n(x)\,dx$ 一致收斂。由此推知 $s_n(x)$ 一致收斂，因为由一致收斂的定义，直接推出，两个一致收斂序列逐項相加仍是一致收斂序列。并且任何收斂序列，若是它的項与 x 无关，例如 $s_n(\alpha)$，适合一致收斂序列的定义。

还要提出，我們証明 $s_n(x)$ 在整个区間 $[a, b]$ 上一致收斂时，只用到 $s'_n(x)$ 的一致收斂性与 $s_n(\alpha)$ 的收斂性，所以叙述这个性質时，只要 $s_n(x)$ 在某一个点 $x=\alpha$ 收斂就足够了，由此，如以上所証，就可以推出 $s_n(x)$ 在整个区間 $[a, b]$ 上的一致收斂性。

146．一致收斂級数的性質 在上一段的三个定理中，如果我們把 $s_n(x)$ 考慮作給定的級数：

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

的前 n 項和，把 $s(x)$ 考虑作这个級数的和；就直接得到，对于变項級数的，类似的定理。

1．若級数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{55}$$

的項是区間 $[a, b]$ 上的連續函数，而且这級数一致收斂；則它的和 $s(x)$ 也是区間 $[a, b]$ 上的連續函数。

2．若級数(55)的項是区間 $[a, b]$ 上的連續函数，而且这級数一致收斂，則它可以在 $[a, b]$ 上的任何两个限 α 与 β 之間逐項积分，就是

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta u_n(x)\,dx。 \tag{56}$$

若积分限是变量，例如 $\beta=x$，則由逐項积分得到的級数：

$$\int_\alpha^x u_1(x)\,dx+\int_\alpha^x u_2(x)\,dx+\cdots+\int_\alpha^x u_n(x)\,dx+\cdots \tag{57}$$

也在区間 $[a, b]$ 上一致收斂。

3．若級数(55)在区間 $[a, b]$ 上收斂，它的項在 $[a, b]$ 上有連續导数 $u_1'(x)$，$u_2'(x)$，…，$u_n'(x)$，…，并且由这些导数作成的級数：

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x)+\cdots$$

在 $[a, b]$ 上一致收斂；則級数(55)一致收斂，并且可以逐項微分，就是

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}。 \tag{58}$$

由[**145**]中定理就推出这些定理，只要注意，这些定理中所述的性質，对于有限項和，都成立。例如，若級数的項 $u_n(x)$ 是連續函数，則对于任何的 n，函数

$$s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$

連續。

147．一致收斂的判別法 我們講几个一致收斂的充分条件。确定于区間 $[a, b]$ 上的函数級数：

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

在 $[a, b]$ 上一致收斂，只須滿足下面两个条件中的一个。

(A) 可以求出这样一个正的常数的序列

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$

使得在区間 $[a, b]$ 上

$$|u_n(x)| \leqslant M_n, \tag{59}$$

而且級数

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots \tag{60}$$

收斂(維尔史特拉斯判别法)。

(Б) 函数 $u_n(x)$ 可以写成这样的形状:

$$u_n(x) = a_n v_n(x), \tag{61}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是常数,而且級数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{62}$$

收斂,函数 $v_1(x), v_2(x), \cdots, v_n(x), \cdots$ 都不負而保持小于一个正的常数 M,并且对于区間 $[a, b]$ 上每一个 x 的值,

$$v_1(x) \geqslant v_2(x) \geqslant \cdots \geqslant v_n(x) \geqslant \cdots; \quad v_n(x) \leqslant M \tag{63}$$

(亜貝尔判别法)。

證明(A) 因为級数(60)收斂,則当給定 ε 时,可以求出这样一个数 N,使得对于所有的 $n > N$ 以及所有的 p,我們有[**125**]:

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p} < \varepsilon;$$

根据不等式(59),于是

$$|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \leqslant M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} < \varepsilon,$$

由此推出[**143**]級数(55)的一致收斂性。

證明(Б) 設

$$\sigma'_p = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \quad (p = 1, 2, \cdots),$$

由此直接推出:

$$a_{n+1} = \sigma'_1, \quad a_{n+k} = \sigma_k - \sigma'_{k-1} \quad (k > 1)。$$

写出表达式

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x) =$$
$$= a_{n+1}v_{n+1}(x) + a_{n+2}v_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}v_{n+p}(x)。$$

用 σ'_k 表示其中的 a_{n+k},再集中有共同的 σ'_k 的項,得到:

$$a_{n+1}v_{n+1}(x) + a_{n+2}v_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}v_{n+p}(x) =$$
$$= \sigma'_1 v_{n+1}(x) + (\sigma'_2 - \sigma'_1) v_{n+2}(x) + \cdots + (\sigma'_p - \sigma'_{p-1}) v_{n+p}(x) =$$
$$= \sigma'_1 [v_{n+1}(x) - v_{n+2}(x)] + \cdots + \sigma'_{p-1}[v_{n+p-1}(x) - v_{n+p}(x)] + \sigma'_p v_{n+p}(x)。$$

注意,依条件,$v_{n+p}(x)$ 与所有的差 $v_{n+k-1}(x) - v_{n+k}(x)$ 都不是負的,我們可

以写成：

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\leqslant\\ &\leqslant|\sigma_1'|[v_{n+1}(x)-v_{n+2}(x)]+\cdots+|\sigma_{p-1}'|[v_{n+p-1}(x)-v_{n+p}(x)]+\\ &+|\sigma_p'|v_{n+p}(x),\end{aligned}$$

把絕対值 $|\sigma_1'|$, $|\sigma_2'|$, …, $|\sigma_p'|$ 中最大的記作 σ'，就有：

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\leqslant\\ &\leqslant\sigma'\{[v_{n+1}(x)-v_{n+2}(x)]+\cdots+[v_{n+p-1}(x)-v_{n+p}(x)]+v_{n+p}(x)\},\end{aligned}$$

相消就得到：

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\leqslant\sigma' v_{n+1}(x)。\tag{64}$$

由 σ_k' 的定义与級数(62)的收斂性推知，对于任意給定的一个正数 ε，有这样一个数 N 存在，使得当 $n>N$ 而 k 为任何值时，我們有：

$$|\sigma_k'|<\frac{\varepsilon}{M},$$

于是

$$\sigma'<\frac{\varepsilon}{M}。$$

再注意条件 $0\leqslant v_{n+p}(x)\leqslant M$，根据(64)得到，当 $n>N$ 而 p 为任何数时，

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon。$$

因为这个 N 不依賴于 x，于是推出，級数(55)在区間$[a, b]$上一致收斂。

例

1. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\quad(p>1)\tag{65}$$

在任何区間上一致收斂，因为对于 x 的任何值，我們有：

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p},\qquad\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p},$$

而且当 $p>1$ 时，級数 $\sum\frac{1}{n^p}$ 收斂[**122**]（維尔史特拉斯判别法）。

2. 若級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}\tag{66}$$

在区間$(0\leqslant x\leqslant l)$上一致收斂，$l$ 为任何正数；因为設

$$v_n(x)=\frac{1}{n^x},$$

則滿足亞貝尔判別法所有的条件。

148. 冪級数。收斂半徑　以上討論的关于变項級数的定理，应用时，最重要的例就是冪級数，也就是下面这样的級数：

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{67}$$

这样的級数，我們在討論麦克劳林級数时已經遇到过了。仔細研究这种級数的性質归于复变函数論中，所以現在我們只叙述它的最基本的性質。

亞貝尔第一定理　若冪級数(67)当 $x=\xi$ 时收斂，則当 x 取滿足不等式：

$$|x|<|\xi| \tag{68}$$

的任何值时，它絕对收斂。

反之，若当 $x=\xi$ 时它發散，則当 x 取滿足不等式：

$$|x|>|\xi|=r \tag{69}$$

的任何值时，它發散。

先設級数

$$a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n+\cdots$$

收斂，这时这收斂級数的一般項应当趨向零，就是

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时,}\quad a_n\xi^n\to 0,$$

所以可以求出这样一个常数 M，使得对于任何的 n，我們有：

$$|a_n\xi^n|\leqslant M。$$

現在讓 x 取滿足条件(68)的任何值，并設

$$q=\left|\frac{x}{\xi}\right|<1。$$

显然我們有：

$$|a_nx^n|=\left|a_n\xi^n\frac{x^n}{\xi^n}\right|=|a_n\xi^n|\left|\frac{x}{\xi}\right|^n\leqslant Mq^n,$$

就是，对于所考慮的 x 的值，級数(67)的一般項的絕对值不大于一个无穷下降等比級数的对应項，所以級数(67)絕对收斂[**124**]。

这定理的第二部分很明显，因为假設級数(67)当 x 取某一滿足条件(69)的值时收斂，則依以上的証明，当 $x=\xi$ 时，由于 $|\xi|<|x|$，它也应当收斂；这与所給的条件相違背。

系　有完全确定的一个数 R 存在，叫做級数(67)的收斂半徑，它具有下列的性質：

当 $|x|<R$ 时，級数(67)絕对收斂；

当 $|x|>R$ 时，級数(67)發散。

有时可能 $R=0$，这时級数(67)，当 x 取 0 以外任何値时，發散；也有时 $R=\infty$，这时級数(67)，当 x 取任何値时，收斂。

除去第一个情形外，就是若有 $x\neq0$ 的値存在，使得級数(67)收斂，考慮这样一个正値 $x=\xi$，設这时級数(67)收斂。若我們把 ξ 这个数漸增，則只有两种可能情形：或者当 ξ 无限增加时，$x=\xi$ 使得級数(67)总保持收斂，这时显然 $R=\infty$。或者有一个常数 A 存在，它具有这样的性質，当 ξ 保持小于 A 逼近于 A 时，級数(67)总收斂，而当 ξ 大于 A 时，級数發散。

这个数 A 的存在，由几何解釋，是很明显的；因为根据亞貝尔第一定理，若当 ξ 是某一个値时，級数發散，則当 ξ 取大于这个値的値时，它也發散。这个数 A 存在的严格証明可以根据无理数理論导出。显然这个数 A 就是級数(67)的收斂半徑。

为要証明 R 的存在，把所有的实数按下述方法分为两組：第一組包含所有的負数，零，与一部分正数 ξ，对于这些 ξ，当 $|x|=\xi$ 时，級数(67)收斂；第二組包含所有其余的实数。根据亞貝尔第一定理，第一組中任何一个数小于第二組中任何一个数，如此我們作成一个实数域的分划，所以或者第一組有一个最大的数，或者第二組有一个最小的数[49]。不难看出，这个数就是这級数的收斂半徑。若是所有的数都在第一組，就要算作 $R=\infty$。

149. 亞貝尔第二定理 若級数(67)的收斂半徑是 R，而$[a, b]$是区間$(-R, +R)$內的任何一个区間：

$$-R<a<b<+R,$$

則这級数，在区間$[a, b]$上，不但絕对收斂，而且一致收斂。

若当 $x=R$ 或 $x=-R$ 时，这級数收斂，則它在区間$[a, R]$或$[-R, b]$上一致收斂。

注意，首先我們算作 $R=1$，这并不失去普遍性，因为我們可以依公式

$$x=Rt$$

把 x 換成新的自变量 t，于是級数(67)換成 t 的冪級数，而区間$(-R, R)$換成$(-1, 1)$。

設 $R=1$，則依收斂半徑的定义，对于任何的 $x=\xi$，只要 $|\xi|<1$，級数(67)絕对收斂。現在考慮在$(-R, R)$內的任何区間$[a, b]$，这时

$$-1<a<b<1。$$

在$(-1, 1)$內，任意选出一个数 ξ，只要它的絕对値大于$|a|$与$|b|$。于是对于区間$[a, b]$上的任何 x，我們有：

$$|a_n x^n| < |a_n \xi^n|,$$

因为級数

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_n\xi^n + \cdots$$

絕对收斂，而且它的項不依賴于 x，所以根据維尔史特拉斯判別法，級数(67)在区間$[a, b]$上一致收斂。

再設級数(67)当 $x=1$ 时收斂，就是級数

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

收斂。讓

$$v_n(x) = x^n,$$

就可以应用亞貝尔判別法，于是証明，級数(67)在整个区間$[a, 1]$上一致收斂，其中 a 是任何数 > -1。

至于 $x=-1$ 时級数(67)收斂的情形，可以用$(-x)$替代 x，然后像上面一样証明。

用 $f(x)$ 記級数(67)的和。自然只是当 x 的值使級数收斂时它才存在。設 R 是这級数的收斂半徑，注意当

$$-R < a < b < R \tag{70}$$

时，这級数在区間$[a, b]$上一致收斂，由[**146**]性質 1 可以肯定，在任何所說的区間$[a, b]$上，級数和 $f(x)$ 是連續函数。換句話說，就是 $f(x)$ 在区間 $(-R, R)$ 內連續。下一段中我們說明，这个函数在区間$(-R, R)$內有任何阶导数。若級数(67)当 $x=R$ 时收斂，則根据以上的証明，它在任何区間 $[a, R]$上一致收斂，其中 $a > -R$，于是 $f(x)$ 在这区間上是連續函数；特别是，$f(R)$ 是当 x 自左趋向 R 时 $f(x)$ 的極限[**35**]：

$$f(R) = \lim_{x \to R-0} f(x)。 \tag{71}$$

至于 $x=-R$ 时級数收斂的情形，有类似的結果。

以前我們知道，牛頓二項式展开式[**131**]：

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

的收斂半徑 $R=1$，在某些情形下，当 $x=\pm 1$ 时收斂。根据以上所述，可以肯定，若当 $x=1$ 时这級数收斂，則这时它的和等于

$$\lim_{x \to 1-0} (1+x)^m = 2^m。$$

150．冪級数的微分法与积分法　設級数

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{72}$$

的收斂半徑是 R。由 0 到 x 逐項积分或逐項微分，我們得到另外两个冪級数：

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots, \tag{73}$$

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots。 \tag{74}$$

以下我們証明这两个級数的收斂半徑也是 R。为此，我們要証，当 $|x|<R$ 时，它們收斂，$|x|>R$ 时，發散。

由上一段所述，級数(72)在任何区間 $(-R_1, R_1)$ 上一致收斂，其中 $0<R_1<R$，再根据 [146] 性質 2，在这区間上它可以逐項由 0 到 x 求积分；就是，可以肯定，級数 (73) 当 $|x|<R$ 时收斂而且这时級数(73)的和等于

$$\int_0^x f(x)dx,$$

其中 $f(x)$ 是級数(72)的和。再証当 $|x|<R$ 时級数(74)收斂，在区間 $(-R,R)$ 內取出 x 后，再选定 ξ，使得

$$|x|<\xi<R \tag{75}$$

幷設

$$q=\frac{|x|}{\xi}<1。$$

把級数(74)的項写成：

$$|na_nx^{n-1}|=\left|na_n\xi^n\frac{x^{n-1}}{\xi^{n-1}}\cdot\frac{1}{\xi}\right|,$$

由上面推知

$$|na_nx^{n-1}|\leqslant nq^{n-1}\frac{1}{\xi}|a_n\xi^n|。$$

应用达朗倍尔判别法于級数 Σnq^{n-1}，不难証明，当 $0<q<1$ 时，它收斂；于是推知[**119**]：

$$当\ n\to\infty\ 时，\ nq^{n-1}\to 0, \tag{76}$$

所以当 n 足够大时，可使

$$nq^{n-1}\cdot\frac{1}{\xi}<1,$$

于是对于任何足够大的 n：

$$|na_nx^{n-1}|<|a_n\xi^n|。$$

但是根据(75)級数 $\Sigma a_n\xi^n$ 絕对收斂，所以級数 (74) 当 $|x|<R$ 时絕对收斂。于是当 $|x|<R$时，两个級数(73) 与 (74)都收斂，就是，对冪級数逐項微分或逐項求积分时，收斂半徑不減小。同时由此可以直接推出它也不能增大。实際上，例如，假設級数(73)的收斂半徑是 R'，并且 $R'>R$，則对級数 (73) 逐項微分时，得到級数

(72)，由以上所述，它的收斂半徑不小于 R'，可是它等于 R，而且 $R<R'$。于是級数(73)与(74)的收斂半徑就是級数(72)的收斂半徑 R。再求級数(74)的导数，根据以上証明；得到級数

$$2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots,$$

它的收斂半徑也是 R，依此可以类推。所有这些幂級数，在任何区間 $[a, b]$ 上，都一致收斂，其中 a，b 要满足(70)；当重复逐項积分时也一样。回忆[**146**]性質 2 与 3，可以写成下面的結果：

收斂半徑等于 R 的幂級数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{77}$$

在区間 $(-R, R)$ 內是 x 的連續函数。

这个級数可以逐項微分或逐項积分任何多次，只須 x 在区間 $(-R, R)$ 內；并且这样作时，所得到的幂級数有相同的收斂半徑。这些級数的和等于級数(77)的和的相应的导数与积分。

設

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

我們得到：

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

$$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots 3\cdot 2a_{n+1}x+\cdots,$$

由此推知，当 $x=0$ 时

$$a_0=f(0),\quad a_1=\frac{f'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad \cdots。$$

代入到(77)中，得到：

$$f(x)=f(0)+\frac{xf'(0)}{1!}+\frac{x^2f''(0)}{2!}+\cdots+\frac{x^nf^{(n)}(0)}{n!}+\cdots\quad(-R<x<+R),$$

就是幂級数与其和的麦克劳林展开式全同。

以上的定理不难推广到下面这种的幂級数：

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots。\tag{79}$$

这时差 $(x-a)$ 占有以前 x 的地位。級数(78)的收斂半徑 R 由以下的条件确定：当 $|x-a|<R$ 时，級数收斂，当 $|x-a|>R$ 时，發散。若用 $f(x)$ 記級数(79)在区間

$$-R<x-a<R \tag{80}$$

上的和，則得到系数 a_n 的表达式：

$$a_0=f(a),\ a_1=\frac{f'(a)}{1!},\ \cdots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ \cdots,$$

就是，在区間(80)上，級数(79)与其和的泰勒展开式全同。

在第三卷中，討論复变函数理論时，我們还要仔細講幂級数的理論。

作为一个習題，应用幂級数理論作出 $\log(1+x)$，$\operatorname{arc\,tg} x$，$\arcsin x$ 的展开式，注意

$$\log(1+x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x},\quad \operatorname{arc\,tg}x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^3},\quad \arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}},$$

并討論得到的展开式适用的范圍。

第五章　多元函数

§ 15. 函数的导数与微分

151. 基本概念　在第二章第五节中，我們講过二元函数的基本概念。現在我們講多元函数，并且更精細的建立極限概念。

我們算作，函数 $f(x, y)$，或是确定于整个平面上，或是确定于它的某一个区域上。如此对应于这区域上任何一个点 (x, y)，函数 $f(x, y)$ 有确定的值。若只考虑一个区域的内点，则这个区域叫做开的。若是把它的边界也算进去，则这区域叫做閉的。

类似的，在空間中可以引进直角坐标系 OX, OY, OZ，于是空間一个点 M 对应的有一組三个数的坐标 (x, y, z)。函数 $f(x, y, z)$ 可以算作确定于整个空間，或是空間的某一个开或閉的区域上。在最簡單的情形下，一个区域以几个曲面为界。例如，不等式：

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2, \quad c_1 \leqslant z \leqslant c_2$$

确定一个閉長方体，它的边平行于坐标軸。不等式：

$$a_1 < x < a_2, \quad b_1 < y < b_2, \quad c_1 < z < c_2$$

确定一个开長方体。不等式：

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant r^2$$

确定一个閉球，以 (a, b, c) 为球心，以 r 为半徑。若去掉 = 号，只保留 < 号，就得到一个开球。三元函数的極限与連續性的概念，都像[67]中对于二元函数一样来确定。

至于多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $[n>3]$，已經失去几何空間的明显性，但是平常仍保留几何的名辞。n 个数的数列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫做

点。全部点組成的集合作成 n 維空間。这个空間的区域由不等式确定。例如:不等式:

$$c_1 \leqslant x_1 \leqslant d_1,\ c_2 \leqslant x_2 \leqslant d_2,\ \cdots,\ c_n \leqslant x_n \leqslant d_n$$

确定一个 n 維長方体,或者說 n 維区間。不等式:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 \leqslant r^2$$

确定一个 n 維球。所謂点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的近傍(或邻域),是指这个不等式,当选定 r 时,所确定的点集合;或是指不等式 $|x_k - a_k| \leqslant \rho$ 确定的点集合,其中 ρ 是一个正数。

設一个函数确定于点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 以及它的近傍,我們說,当点 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 趋向点 $M_0(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 时, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 趋向極限 A, 写成:

$$\lim_{x_k \to a_k} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = A \text{ 或 } \lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = A;$$

是指,当任意給定一个正数 ε 时,有这样一个数 η 存在,使得当 $|a_k - x_k| < \eta,\ k = 1, 2, \cdots, n$ 时, $|A - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)| < \varepsilon$, 这里算作点 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不与点 $M_0(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 重合。$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $M_0(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的連續性由等式:

$$\lim_{x_k \to a_k} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

确定。

[67] 中所述閉区域上連續函数的性質,在現在的情形下也是对的。

像一元函数的情形一样[34],連續函数的和,积与商仍是連續函数。只有在商的情形,須要,在点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 分母不等于零。

152. 关于極限的取法 現在我們更精細的来討論二元函数的極限概念。若極限

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A \tag{1}$$

存在,就說是全面的極限存在。这时我們知道[67],当点 $M(x, y)$ 以任何方式趋向

$M_0(a,b)$时，$f(x, y)$趋向A。特別是，

$$\lim_{x\to a} f(x, b)=A, \quad \lim_{y\to b} f(a, y)=A。 \tag{2}$$

在第一种情形下，$M(x, y)$ 沿平行于 OX 軸的直綫趋向 $M_0(a, b)$，在第二种情形下，沿平行于OY 軸的直綫。注意，由極限（2）的存在而且相等，不能推出極限（1）的存在。例如：考虑函数 $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$，設 $a=0$，$b=0$，我們有：

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0} 0=0, \quad \lim_{y\to 0} f(0, y)=0,$$

而这时極限（1）不存在。实际上，讓 $y:x=\operatorname{tg}\alpha$，可以把这函数写成：

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha。 \tag{3}$$

若点 $M(x,y)$ 沿过原点与 OX 軸作成角 α_0 的直綫趋向 $M_0(0,0)$，則由表达式（3），$f(x, y)$ 保持是个常数，依賴于所选擇的 α_0；由此推知，在这个例中，極限（1）不存在。注意，公式（3）表达的函数在点 $M_0(0, 0)$不确定。

除極限取法（1）外，还可以考虑二次極限，对应于先依 x 取極限，讓 y 保持一个不是 b 的常数，再依 y 取極限；或是次序顚倒过来：

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x, y)\right] \quad 或 \quad \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x, y)\right]。 \tag{4}$$

有时这两个二次極限存在，但不相等。例如函数：

$$f(x, y)=\frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2},$$

不难求出：

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x, y)\right]=1, \quad \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x, y)\right]=-1。$$

不过我們有下面这个定理。

定理 若全面的極限（1）存在，而当 x 取与 a 足够近而不等于 a 的任何值时，極限

$$\lim_{y\to b} f(x, y)=\varphi(x) \tag{5}$$

存在，則（4）中第一个二次極限存在，而等于 A，就是

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A。 \tag{6}$$

由極限（1）存在推出［**67**］，对于任意給定的正数 ε，有这样一个正数 η 存在，使得

$$当 \quad |x-a|<\eta \text{ 而且 } |y-b|<\eta \text{ 时}，|A-f(x, y)|<\varepsilon, \tag{7}$$

其中(x, y)不与 (a, b) 重合。固定住 x，使它不等于 a 而满足 $|x-a|<\eta$。注意

(5)，由不等式(7)取極限，得到当 $|x-a|<\eta$ 而 $x\neq a$ 时，

$$|A-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon,$$

由此，根据 ε 的任意性，推出等式(6)。

附注 完全同样，若設極限(1)存在，而当 y 取与 b 足够近而不等于 b 的任何值时，極限

$$\lim_{x\to a} f(x,y)=\psi(y)$$

存在，則第二个二次極限(4)存在，而等于 A，就是

$$\lim_{y\to b}\psi(y)=A。$$

若極限(1)存在而等于 $f(a,b)$，就是 $A=f(a,b)$，則函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 連續，或者說在点 (a,b) 全面連續。这时，根据(2)

$$\lim_{x\to a} f(x,b)=f(a,b);\ \lim_{y\to b} f(a,y)=f(a,b),$$

就是这函数在点 (a,b) 單独依每一元連續，在[67]中我們曾經談到过。反之，若依每一元連續，幷不能推出全面連續。实际上，由公式(3)确定的函数补充以 $f(0,0)=0$。如以上所述，这时我們有：

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0,\quad \lim_{y\to 0} f(0,y)=0,$$

就是这函数在点 $(0,0)$ 依每一元連續。但是它不是全面連續，因为我們知道，当 $M(x,y)$ 趋向 $M_0(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 沒有極限存在。

若 $f(x,y)$ 在某一包含有点 (x,y) 在內的区域上有偏导数，則我們知道 [68]，公式：

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=f'_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y$$
$$(0<\theta<1,\ 0<\theta_1<1)$$

成立。設在所述区域上，偏导数有界，就是它們的絕对值不大于某一个数 M。这时由上面的公式推出：

$$|f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)|\leqslant M(|\Delta x|+|\Delta y|),$$

当 $\Delta x\to 0$ 而且 $\Delta y\to 0$ 时，这不等式右边趋向零，由此推知：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y),$$

就是，若在某一区域內 $f(x,y)$ 的偏导数存在而有界，則它在这区域內連續。

函数(3)补充以关系式 $f(0,0)=0$ 后，在整个 OX 軸，OY 軸上，都等于零，显然在点 $M_0(0,0)$ 它的偏导数存在而等于零，在其余的点，它也有偏导数：

$$f'_x(x,y)=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},\quad f'_y(x,y)=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

就是，这个函数在整个平面上有偏导数。但是我們知道在点(0, 0)它不連續。这时，当点(x, y)逼近坐标原点时，偏导数的絕对值可以取任意大的值。

153. 一阶偏导数与全微分 在[68]中我們介紹过二元函数的偏导数与全微分的概念。这些概念可以推广到任何多元函数的情形。例如考虑四元函数：

$$w=f(x, y, z, t)。$$

極限 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y, z, t)-f(x, y, z, t)}{h}$$

若是存在，就叫做这函数对x的偏导数，这个偏导数用記号：

$$f'_x(x, y, z, t)，或\ \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x}，或\frac{\partial w}{\partial x}$$

記。类似的可以确定对于其他变量的偏导数。

这函数的偏微分的和：

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz+\frac{\partial w}{\partial t}dt$$

叫做它的全微分，其中dx, dy, dz, dt是自变量的微分（任意的量，不依賴于x, y, z, t）。

微分是函数的改变量

$$\Delta w=f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)-f(x, y, z, t)$$

的主要部分，就是(参考[68])：

$$\Delta w=dw+\varepsilon_1 dx+\varepsilon_2 dy+\varepsilon_3 dz+\varepsilon_4 dt,$$

其中$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$，当$dx, dy, dz, dt$趋向零时，都趋向零，这里設函数$w$，在某一包含点$(x, y, z, t)$在内的区域内有連續偏导数。

同样也可以推广复合函数微分法的法則。例如，設x, y, z不是自变量，而是自变量t的函数。这时，函数w不只是直接依賴于t，而且还間接通过中間变量x, y, z依賴于t，于是w对t的全导数就有表达式：

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}。\tag{8}$$

我們不証明这个法則，因为那只要把[**69**]所講的重复一次。若变量 x, y, z 除去依賴于 t 外，还依賴于别的自变量，則在公式(8)右边，我們应当用偏导数 $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ 替代 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$。这时函数 w 还依賴于别的自变量，于是等式(8)左边，也应当用 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 替代 $\frac{dw}{dt}$。但是这个偏导数与以前等式(8)右边的偏导数 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 意义不同，以前的是就 w 直接依賴于 t 計算的，为区别这两个偏导数，常把直接依賴于 t 計算的加上括号，所以在所考虑的情形下，等式(8)要写成：

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}。\tag{9}$$

对于一元函数，我們知道，一阶微分的表达式不依賴于所选用的自变量[**50**]。可以証明，这个性質，推广到多元函数仍然成立。

为确定起見，考虑二元函数：

$$z=\varphi(x, y)。$$

設 x 与 y 是自变量 u 与 v 的函数。依照复合函数微分法的法則，就有：

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}。$$

依定义，这函数的全微分等于：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv。$$

用偏导数的表达式代入，得到：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)。$$

但是圓括号内的表达式各为 x 与 y 的全微分，于是可以写成：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

就是，当改換自变量时，复合函数的微分的表达式不变型。

应用这个性質，可以推广求和，积与商的微分法則到多元函数的情

形：

$$d(u+v)=du+dv,\quad d(uv)=vdu+udv,\quad d\frac{u}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

其中 u 与 v 是多元函数。例如，实际上，应用上述性質，可以写成：

$$d(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial u}du+\frac{\partial(uv)}{\partial v}dv=v\,du+u\,dv。$$

154. 尤拉定理 任何多元函数，若当每个变量都乘上一个任意的量 t 时，相当于这函数乘上 t^m，则这函数叫做这些变量的 m 次齐次函数。

为确定起見，我們只討論二元函数，函数 $f(x, y)$ 若滿足恒等式：

$$f(tx, ty)=t^m f(x, y), \tag{10}$$

则叫做 m 次齐次函数。

例如，設函数 $f(x, y)$ 表示某一体积的大小，其中 x 与 y 是两个長度，而在函数的表达式中，除这两个長度外，其余都是抽象的数。x 与 y 乘上 t 就相当于把單位减小 t 倍，于是显然，表达体积的数应当乘上 t^3，就是在这情形下，$f(x, y)$ 是三次齐次函数①。

求恒等式 (10) 对 t 的导数，求左边的导数时应用复合函数微分法的法則，得到恒等式：

$$xf'_u(u, v)+yf'_v(u, v)=mt^{m-1}f(x, y),$$

其中 $u=tx$，$v=ty$。在这恒等式中，讓 $t=1$，得到：

$$xf'_x(x, y)+yf'_y(x, y)=mf(x, y), \tag{11}$$

这叫做尤拉定理。

齐次函数的偏导数，各乘以对应的变量，相加起来，就等于这函数乘上它的次数。

若 $m=0$，在恒等式(10)中，設 $t=\frac{1}{x}$，就得到：

---

① 例如，圓錐体积由底半徑 r 与高 h 表达的公式是 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$。

$$f(x, y)=f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

就是，零次齐次函数是所有的变量与其中一个变量之比的函数。对于这样的函数，各偏导数与对应变量乘积之和等于零。有时零次齐次函数簡称齐次函数。

155. 高阶偏导数

多元函数的偏导数仍然是那些变量的函数，可以再求它們的偏导数。如此我們得到原来函数的二阶偏导数，还是那些变量的函数，再求它們的偏导数，就得到原来函数的三阶偏导数，依此类推。例如，二元函数 $f(x, y)$，每个偏导数对 x 与 y 再求导数，得到四个二阶偏导数，各記作：

$$f''_{x^2}(x, y),\ f''_{xy}(x, y),\ f''_{yx}(x, y),\ f''_{y^2}(x, y),$$

或
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2},$$

或
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}。$$

$f''_{xy}(x, y)$ 与 $f''_{yx}(x, y)$ 只是求导数的次序不同。前者先对 x 再对 y 求导数，后者次序相反。我們証明，这两个导数彼此恒等，就是，求导数的結果不依賴于求导数的次序。

作表达式：

$$\omega=f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y)。$$

設

$$\varphi(x, y)=f(x+h, y)-f(x, y),$$

ω 的表达式就可以写成：

$$\omega=[f(x+h, y+k)-f(x, y+k)]-[f(x+h, y)-f(x, y)]=$$
$$=\varphi(x, y+k)-\varphi(x, y)。$$

应用拉格朗日公式两次[63]，得到：

$$\omega = k\varphi'_y(x,\ y+\theta_1 k) = k[f'_y(x+h,\ y+\theta_1 k) - f'_y(x,\ y+\theta_1 k)] =$$
$$= khf''_{yx}(x+\theta_2 h,\ y+\theta_1 k)。$$

我們用带有附标的字母 θ，分别来記在0与1之間的两个数。函数 $f(x,y)$ 对它的第二个元 y 的偏导数中，用 $x+h$ 与 $y+\theta_1 k$ 代 x 与 y 的結果記作 $f'_y(x+h,\ y+\theta_1 k)$。对于其他的偏导数，应用类似的記号。

同样，設

$$\psi(x,\ y) = f(x,\ y+k) - f(x,\ y),$$

可以写成：

$$\omega = [f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y)] - [f(x,\ y+k) - f(x,\ y)] =$$
$$= \psi(x+h,\ y) - \psi(x,\ y) = h\psi'_x(x+\theta_3 h,\ y) =$$
$$= h[f'_x(x+\theta_3 h,\ y+k) - f'_x(x+\theta_3 h,\ y)] = hkf''_{xy}(x+\theta_3 h,\ y+\theta_4 k)。$$

比較 ω 的两个表达式，就有：

$$hkf''_{yx}(x+\theta_2 h,\ y+\theta_1 k) = hkf''_{xy}(x+\theta_3 h,\ y+\theta_4 k),$$

或
$$f''_{yx}(x+\theta_2 h,\ y+\theta_1 k) = f''_{xy}(x+\theta_3 h,\ y+\theta_4 k)。$$

設这两个二阶导数連續，讓 h 与 k 趋向零，就得到，

$$f''_{yx}(x,\ y) = f''_{xy}(x,\ y)。$$

如此引出下面这个定理：

定理 若 $f(x,y)$ 在某一区域内有連續二阶导数 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$，則在这区域内任何一个点，上述导数相等。

考虑两个三阶导数：

$$f'''_{x^2y}(x,\ y) \quad 与 \quad f'''_{y^2x}(x,\ y),$$

只是求导数的次序不同。注意以上所証，求二重导数不依赖于求导数的次序，可以写成：

$$f'''_{x^2y}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f'_x(x,\ y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f'_x(x,\ y)}{\partial y\,\partial x} = f'''_{xyx}(x,\ y) =$$
$$= f'''_{yxx}(x,\ y) = f'''_{yx^2}(x,\ y),$$

就是，在这情形下，求导数的結果不依赖于求导数的次序。这个性質不

难推广到任何阶导数以及任何多元函数，我們可以得到普遍定理：求导数的結果不依赖于求导数的次序。

注意，在証明中，我們不只应用在某一区域内导数的存在性，并且須要它們連續。

以后我們总假定所講的导数都連續，于是根据已証的关于高阶导数的定理，只要說明导数的阶数 n，与对某一个变量求导数几次就成了。例如，对于函数 $w=f(x, y, z, t)$，下面这記号：

$$\frac{\partial^n f(x, y, z, t)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma\, \partial t^\delta} \text{ 或 } \frac{\partial^n w}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma\, \partial t^\delta} \quad (\alpha+\beta+\gamma+\delta=n),$$

表示一个 n 阶导数，其中对 x 求导数 α 次，对 y 求 β 次，对 z 求 γ 次，对 t 求 δ 次。

156. 高阶微分 多元函数的全微分仍然是那些变量的函数，我們可以再确定这个函数的全微分。如此我們得到原来函数的二阶微分 d^2u，它还是那些变量的函数，它的全微分是原来函数的三阶微分 d^3u，依此类推。

仔細考虑两个变量 x 与 y 的函数 $u=f(x, y)$，設 x 与 y 是自变量。依定义

$$du=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy。 \tag{12}$$

計算 d^2u 时，注意要把自变量的微分 dx 与 dy 考虑作常量一样，所以它們可以由微分号下提出来：

$$d^2u=d\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx\right]+d\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy\right]=dx\cdot d\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+$$

$$+dy\cdot d\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=dx\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}dy\right]+$$

$$+dy\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x}dx+\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}dy\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}dy^2。$$

同样計算 d^3u 得到:

$$d^3u=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+$$
$$+\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}dy^3。$$

由表达式 d^2u 与 d^3u 引出下面这个任何阶微分的記号公式:

$$d^nu=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f, \tag{13}$$

在这公式中要了解:圓括号內的和要应用牛頓二項式公式求 n 次方,然后把 $\frac{\partial}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial}{\partial y}$ 的方冪算作函数 f 对 x 与对 y 的各該阶偏导数。

我們知道当 $n=1, 2, 3$ 时公式(13)是对的。为要証明当 n 取任何值时都对,須要用数学归納法。設公式(13)当 n 取某一値时是对的,我們确定 $(n+1)$ 阶微分:

$$d^{n+1}u=d(d^nu)=\frac{\partial(d^nu)}{\partial x}dx+\frac{\partial(d^nu)}{\partial y}dy=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)d^nu,$$

其中用記号

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)\varphi$$

表示

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy。$$

注意,我們算作对于 d^nu 公式(13)是对的,于是可以写成:

$$d^{n+1}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f\right]=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} f,$$

就是对于 $d^{n+1}u$, 这公式也对。

公式(13)不难推广到任何多元函数。我們知道[**153**],公式(13)不

仅当 x 与 y 是自变量时正确。但是当求 d^2u 的表达式时，我們把 dx 与 dy 算作常量，所以公式(13)只有当 dx 与 dy 能算作常量时才对。

若 x 与 y 是自变量，这是对的。現在設 x 与 y 是自变量 z 与 t 的綫性函数：

$$x=az+bt+c,\quad y=a_1z+b_1t+c_1,$$

其中 a, b, c, a_1, b_1, c_1 都是常量。我們得到 dx 与 dy 的表达式：

$$dx=adz+bdt,$$

$$dy=a_1dz+b_1dt。$$

不过 dz 与 dt 是自变量的微分，应当算作常量，于是在这情形下，dx 与 dy 也可以算作常量，所以我們肯定，当 x 与 y 是自变量，或是自变量的綫性函数(一次多項式)时，公式(13)是对的。

若 dx 与 dy 不能算作常量，則公式(13)不对。現在我們求，在一般情形下，d^2u 的表达式。計算

$$d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx\right) \text{ 与 } d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy\right)$$

时，我們不能像以上所作的，把 dx 与 dy 由微分号下提出来，而要应用乘积的微分公式[**153**]。

$$d^2u=dx\,d\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+dy\,d\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}d^2y。$$

右边的前两項和就等于以前 d^2u 的表达式，于是我們得到：

$$d^2u=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}dy^2+$$

$$+\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}d^2y, \tag{14}$$

就是，在一般情形下，d^2u 的表达式含有两个补充項，这两項依賴于 d^2x 与 d^2y。

157. 隐函数 現在我們来講隐函数的微分法的法则。这里我們假設所写的方程实际上确定一个函数,而且它有导数存在。在[**159**]中我們再叙述,在什么条件下才有这种情形。若 y 是 x 的隐函数:

$$F(x, y)=0, \tag{15}$$

我們知道[**69**],这函数的一阶导数 y' 由方程:

$$F'_x(x, y)+F'_y(x, y)y'=0 \tag{16}$$

确定。方程(16),是在等式(15)中設 y 是 x 的函数,由两边求导数得到的。再对等式(16)这样作,就得到确定二阶导数 y'' 的方程:

$$F''_{x^2}(x, y)+2F''_{xy}(x, y)y'+F''_{y^2}(x, y)y'^2+F'_y(x, y)y''=0。 \tag{17}$$

这等式再对 x 求导数,就得到确定三阶导数 y''' 的方程,以下依此类推。

注意,如此得到的方程中,这隐函数的未知导数的系数相同,都是 $F'_y(x, y)$;所以,若当 x 与 y 取满足方程(15)的某些值时,这个系数不等于零,則对于这些值,这隐函数的任何阶导数的值完全确定。这里自然設方程左边的偏导数存在。

考虑三个变数的方程:

$$\Phi(x, y, z)=0。$$

这个方程确定 z 是自变量 x 与 y 的一个函数,若用这个 x 与 y 的函数替代方程左边的 z,則方程左边恒等于零。如此,在 z 是 x, y 的函数的假定下,这方程左边对 x 与 y 求导数时,应当得到零:

$$\Phi'_x(x, y, z)+\Phi'_z(x, y, z)z'_x=0,$$

$$\Phi'_y(x, y, z)+\Phi'_z(x, y, z)z'_y=0。$$

由这两个方程确定一阶偏导数 z'_x 与 z'_y。把第一个方程再对 x 求导数,就得到确定二阶导数 z''_{x^2} 的方程,其余依此类推。在所有得到的方程中,未知导数的系数都是 $\Phi'_z(x, y, z)$。現在考虑方程組:

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad \psi(x, y, z)=0。$$

可以算作这个方程組确定 y 与 z 是 x 的函数。由这两个方程对 x

求导数，設 y 与 z 是 x 的函数，得到确定导数 y' 与 z' 的一次方程組：

$$\varphi'_x(x, y, z)+\varphi'_y(x, y, z)y'+\varphi_z(x, y, z)z'=0,$$

$$\psi'_x(x, y, z)+\psi'_y(x, y, z)y'+\psi'_z(x, y, z)z'=0。$$

这两个方程再对 x 求导数，得到确定二阶导数 y'' 与 z'' 的方程組。再对 x 求导数，就得到确定 y''' 与 z''' 的方程組，以下依此类推。

n 阶导数 $y^{(n)}$ 与 $z^{(n)}$ 就要由下面这样的方程組：

$$\varphi'_y(x, y, z)y^{(n)}+\varphi'_z(x, y, z)z^{(n)}+A=0,$$

$$\psi'_y(x, y, z)y^{(n)}+\psi'_z(x, y, z)z^{(n)}+B=0 \qquad (17_1)$$

确定，其中 A 与 B 的表达式中，含有低于 n 阶的各阶导数。由初等代数知道，这样的方程組，当满足条件

$$\varphi'_y(x, y, z)\psi'_z(x, y, z)-\varphi'_z(x, y, z)\psi'_y(x, y, z)\neq 0$$

时，有唯一的确定的解。

对于所有的满足方程組 (17_1) 与这个条件的 x, y, z 的值，各阶导数的值就完全确定。

一般来講，若有 m 个方程的方程組，含有 $(m+n)$ 个变量，則这样的方程組确定 m 个变量是其余 n 个变量的隐函数，这些隐函数的导数，可以如上所述由这些方程依次对自变量求导数得到。

158. 例 考虑方程

$$ax^2+by^2+cz^2=1, \qquad (18)$$

它确定 z 是 x 与 y 的一个函数。对 x 求导数，得到：

$$ax+cz\cdot z'_x=0, \qquad (19)$$

对 y 求导数，得到：

$$by+cz\cdot z'_y=0, \qquad (19_1)$$

由此

$$z'_x=-\frac{ax}{cz}, \quad z'_y=-\frac{by}{cz}。$$

关系式(19)对 x，对 y 求导数，关系式 (19_1) 对 y 求导数，得到：

$$a+cz'^2_x+czz''_{x^2}=0,\ cz'_xz'_y+czz''_{yx}=0,\ b+cz'^2_y+czz''_{y^2}=0,$$

由此：

$$z''_{x^2}=-\frac{a+cz'^2_x}{cz}=-\frac{a+c\dfrac{a^2x^2}{c^2z^2}}{cz}=-\frac{acz^2+a^2x^2}{c^2z^3},$$

$$z''_{xy}=-\frac{z'_x z'_y}{z}=-\frac{abxy}{c^2z^3},$$

$$z''_{y^2}=-\frac{b+cz'^2_y}{cz}=-\frac{bcz^2+b^2y^2}{c^2z^3}。$$

現在叙述計算偏导数的另一个方法，以应用函数的全微分的表达式为基础。我們先証明一个輔助定理。設 z 是自变量 x 与 y 的一个函数，无論由什么方法，如果我們得到全微分 dz 的表达式有下面的形状：

$$dz=p\,dx+q\,dy。$$

我們知道

$$dz=z'_x dx+z'_y dy。$$

比較这两个表达式，就得到：

$$p\,dx+q\,dy=z'_x dx+z'_y dy。$$

不过 dx 与 dy 是自变量的微分，是任意的量。讓 $dx=1,\ dy=0$；再讓 $dx=0,\ dy=1$；得到

$$p=z'_x,\quad q=z'_y。$$

所以，若自变量 x 与 y 的函数 z 的全微分可以写成下面的形状：

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

則 $p=z'_x,\ q=z'_y$。

这个定理可以推广到任何多元函数。同样可以証明，若二阶微分可以写成下面的形状：

$$d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2,$$

則 $r=z''_{x^2},\ s=z''_{xy},\ t=z''_{y^2}$。

現在回到所考慮的例。我們不求关系式(18)左边对 x 与 y 的导数，而求它的微分，由于一阶微分的表达式不依賴于选用的自变量[153]，就得到

$$ax\,dx+by\,dy+cz\,dz=0, \tag{20}$$

由此

$$dz=-\frac{ax}{cz}dx-\frac{by}{cz}dy,$$

于是根据上面証明的定理：

$$z'_x=-\frac{ax}{cz},\quad z'_y=-\frac{by}{cz}。$$

再求关系式(20)左边的微分，注意，这时 dx 与 dy 应当算作常量：

$$adx^2+bdy^2+cdz^2+czd^2z=0$$

或

$$d^2z=-\frac{a}{cz}dx^2-\frac{b}{cz}dy^2-\frac{1}{z}dz^2=$$

$$=-\frac{a}{cz}dx^2-\frac{b}{cz}dy^2-\frac{1}{z}\left(\frac{ax}{cz}dx+\frac{by}{cz}dy\right)^2=$$

$$=-\frac{acz^2+a^2x^2}{c^2z^3}dx^2-2\frac{abxy}{c^2z^3}dxdy-\frac{bcz^2+b^2y^2}{c^2z^3}dy^2,$$

于是：

$$z''_{x^2}=-\frac{acz^2+a^2x^2}{c^2z^3},\quad z''_{xy}=-\frac{abxy}{c^2z^3},\quad z''_{y^2}=-\frac{bcz^2+b^2y^2}{c^2z^3}。$$

如此，确定了某阶微分，就得到对应阶的偏导数。

159. 隐函数的存在性 以上我們的討論都是形式上的。在所有的情形，我們总設对应的方程或方程組确定隐函数，且有导数。現在我們証明隐函数存在的基本定理。

考虑方程

$$F(x,\ y)=0 \tag{21}$$

在什么条件下唯一确定一个 x 的函数 y，这个函数連續而有导数。

定理 設 $x=x_0$, $y=y_0$ 是方程(21)的一組解，就是

$$F(x_0,\ y_0)=0, \tag{22}$$

設 x 及 y 各取与 x_0 及 y_0 足够近的所有的値时，$F(x,\ y)$ 以及它对 x 与对 y 的一阶偏导数都是連續的，并設偏导数 $F'_y(x,\ y)$，当 $x=x_0$, $y=y_0$ 时，不等于零。这时，对于所有的与 x_0 足够近的 x 的値，有滿足方程(21)的一个确定的函数 $y(x)$ 存在，它連續，有导数，而且滿足条件 $y(x_0)=y_0$。

为确定起見，設当 $x=x_0$, $y=y_0$ 时，$F'_y(x,\ y)>0$。依条件，这个导数連續，所以对于所有的与 x_0 及 y_0 足够近的 x 及 y 的値，它是正的。就是有这样一个正数 l 存在，使得对于所有的滿足条件：

$$|x-x_0|\leqslant l,\quad |y-y_0|\leqslant l \tag{23}$$

的 x 及 y，$F(x,\ y)$ 与它的偏导数連續，而且

$$F'_y(x,\ y)>0。 \tag{24}$$

再者，一个变量 y 的函数 $F(x_0,\ y)$，根据(22)，当 $y=y_0$ 时等于零；根据(23)与(24)，在区間 $[y_0-l,\ y_0+l]$ 上它是增函数。如此，$F(x_0,\ y_0-l)$ 与 $F(x_0,\ y_0+l)$ 两个数异号：前者是負的，后者是正的。注意函数 $F(x,\ y)$ 的連續性，我們可以肯定[67]，对于所有的与 x_0 足够近的 x 的値，$F(x,\ y_0-l)$ 是負的，而 $F(x,\ y_0+l)$ 是

正的。就是有这样一个正数 l_1 存在，使得当 $|x-x_0|\leqslant l_1$ 时，

$$F(x, y_0-l)<0 \quad 而 \quad F(x, y_0+l)>0。\tag{25}$$

用 m 記 l 与 l_1 两个数中之小者。注意(23)与(25)，我們可以肯定，若 x 与 y 满足不等式：

$$|x-x_0|\leqslant m, \quad |y-y_0|\leqslant l, \tag{26}$$

則满足不等式(24)与(25)。

若在区間 $[x_0-m, x_0+m]$ 上，任意取定一个 x 的值，亦即任取满足(26)中前一个不等式的一个值；則根据(24)，y 的函数 $F(x, y)$ 在区間 $[y_0-l, y_0+l]$ 上是增函数，并且根据(25)，在这区間两端函数值异号。于是推知，在这区間內，有一个确定的 y 的值，使得这个 $F(x, y)$ 等于零。特别是，若 $x=x_0$，則根据(22)，这个 y 的值是 $y=y_0$。如此，我們証明，在区間 $[x_0-m, x_0+m]$ 上，有一个确定的函数 $y(x)$ 存在，它是方程(21)的解，而且满足条件 $y(x_0)=y_0$。换句話說，由以上的討論推知，当在区間 $[x_0-m, x_0+m]$ 上任意选定一个 x 的值时，方程(21)在区間 (y_0-l, y_0+l) 內有一个唯一的根。

現在証明求出的函数 $y(x)$，当 $x=x_0$ 时連續。实际上，当任意給定一个正数 ε 时；根据(25)，$F(x_0, y_0-\varepsilon)$ 与 $F(x_0, y_0+\varepsilon)$ 异号；于是推知，有这样一个正数 η 存在，使得当 $|x-x_0|<\eta$ 时，$F(x, y_0-\varepsilon)$ 与 $F(x, y_0+\varepsilon)$ 异号；换句話說，就是当 $|x-x_0|<\eta$ 时，方程(21)的根，也就是函数 $y(x)$ 的值，满足条件 $|y-y_0|<\varepsilon$；于是証明，当 $x=x_0$ 时，$y(x)$ 連續。

再証当 $x=x_0$ 时导数 $y'(x)$ 存在。設 $\Delta x=x-x_0$，并設 $\Delta y=y-y_0$ 是 y 的对应的改变量。于是 $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ 满足方程(21)，就是 $F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=$ $=0$；根据(22)，可以写成：

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-F(x_0, y_0)=0。$$

注意偏导数的連續性，这个等式就可以写成[68]：

$$[F'_{x_0}(x_0, y_0)+\varepsilon_1]\Delta x+[F'_{y_0}(x_0, y_0)+\varepsilon_2]\Delta y=0, \tag{27}$$

这里，当 Δx 与 $\Delta y\to 0$ 时，ε_1 与 $\varepsilon_2\to 0$，其中 $F'_{x_0}(x_0, y_0)$ 与 $F'_{y_0}(x_0, y_0)$ 各記当 $x=x_0$, $y=y_0$ 时两个偏导数的值。由以上所証的連續性推知，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$。

由方程(27)我們有：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0)+\varepsilon_1}{F'_{y_0}(x_0, y_0)+\varepsilon_2};$$

取極限，当 $\Delta x\to 0$ 时，得到：

$$y'(x_0)=-\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0)}{F'_{y_0}(x_0, y_0)}。$$

最后我們証明，函数 $y(x)$ 連續而有导数，不仅是限于 $x=x_0$ 时。若在区間 $[x_0-m, x_0+m]$ 上，任意取一个别的 x 的値，于是在区間 (y_0-l, y_0+l) 內有一个对应的 y 的値，是方程 (21) 的解；則对于这一对 x 与 y 的値，定理中所有的条件都滿足；于是根据以上所述，对于上述的区間上任何 x 的値，$y(x)$ 連續而有导数。

像上面一样，可以得出由方程：

$$\Phi(x, y, z)=0$$

确定的隐函数 $z(x, y)$ 的存在定理。

現在考虑方程組：

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad \psi(x, y, z)=0 \tag{28}$$

在什么条件下，确定 y 与 z 是 x 的函数。

这时我們有下面的定理：

定理 設 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 是方程組 (28) 的一組解；設当 (x, y, z) 取与 (x_0, y_0, z_0) 足够近的値时，$\varphi(x, y, z)$，$\psi(x, y, z)$ 与它們的一阶偏导数都是 (x, y, z) 的連續函数；并設当 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 时，表达式

$$\varphi_y'(x, y, z)\psi_z'(x, y, z)-\varphi_z'(x, y, z)\psi_y'(x, y, z)$$

不等于零。这时，对于与 x_0 足够近的所有的 x 的値，有两个函数 $y(x)$，$z(x)$ 存在，它們滿足方程組 (28)，連續，有一阶导数，并且滿足条件 $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$。

这个定理我們不証明。在第三卷中我們再考虑任何多个变量的任何多个函数的情形。

160. 空間曲綫与曲面 由解析几何学知道，任何一个三元方程：

$$F(x, y, z)=0, \tag{29}$$

或显式

$$z=f(x, y), \tag{30}$$

一般来講，在以 OX, OY, OZ 为直角坐标軸的空間中，对应于某一曲面。

空間的曲綫可以考虑作两个曲面的交綫，于是可由两个方程：

$$F_1(x, y, z)=0, \; F_2(x, y, z)=0 \tag{31}$$

确定。有时曲綫由参变方程：

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\omega(t) \tag{32}$$

确定。像平面曲綫的情形一样，曲綫弧的長度是这样确定的：作这曲綫

弧的內接折綫，求出当折綫的每一边長无限減小时內接折綫長度的極限作为弧長。与平面曲綫的情形完全类似[**103**]，我們这里不再重述，可以証明，弧長由定积分：

$$s=\int_{(M_1)}^{(M_2)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt \tag{33}$$

表达，其中 t_1 与 t_2 是对应于弧的端点 M_1 与 M_2 参变量 t 的值；并且弧的微分有表达式：

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}。\tag{34}$$

若用由曲綫上某一定点算起的弧長 s 作参变量，則像在平面曲綫的情形一样[**70**]，可以証明。导数 $\frac{dx}{ds}$，$\frac{dy}{ds}$，$\frac{dz}{ds}$ 各等于曲綫的切綫的方向余弦；就是等于这切綫的正方向与坐标軸交角的余弦。如此，在点 (x, y, z) 曲綫的方向余弦，就是切綫方向与坐标軸交角的余弦，与 dx，dy，dz 成比例，于是切綫的方程可以写成：

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz} \tag{35}$$

或

$$\frac{X-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Y-\psi(t)}{\psi'(t)}=\frac{Z-\omega(t)}{\omega'(t)}。\tag{36}$$

現在介紹一个新概念，就是曲面

$$F(x, y, z)=0 \tag{37}$$

的切面的概念。

設 $M(x, y, z)$ 是曲面上一点，L 是这曲面上过点 M 的一条曲綫。这曲綫上的点的坐标是参变量 t 的一个函数，并且这些函数满足方程(37)，因为曲綫 L 在这曲面上。如此，曲綫 L 上所有的点，就是对于任何 t 的值，都满足方程 (37)；于是，我們可以求方程(37)左边的微分，得到：

$$F'_x(x, y, z)dx+F'_y(x, y, z)dy+F'_z(x, y, z)dz=0。\quad (38)$$

我們認为 $F(x, y, z)$ 有連續的偏导数 F'_x, F'_y, F'_z，其中至少有一个不等于零。

由解析几何学知道，这样的等式

$$aa_1+bb_1+cc_1=0$$

是两个直綫垂直的条件，这两个直綫的方向余弦各与 a, b, c 以及 a_1, b_1, c_1 成比例。我們又知道 dx, dy, dz 与在点 M 曲綫 L 的切綫的方向余弦成比例；于是等式 (38) 告訴我們，在点 M 曲綫 L 的切綫垂直于某一个确定的直綫，不依賴于曲綫 L，它的方向余弦与 $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ 成比例。如此，我們看出，曲面 (37) 上过点 M 的任何曲綫的切綫，在同一个平面：

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \quad (39)$$

上，这个平面叫做这曲面在点 M 的切面。

由解析几何学知道，平面的方程中，系数 A, B, C，与这平面的法綫的方向余弦成比例，在我們的情形下，就是与 $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ 成比例，于是推知，这切面的方程可以写成：

$$F'_x(x, y, z)(X-x)+F'_y(x, y, z)(Y-y)+$$
$$+F'_z(x, y, z)(Z-z)=0, \quad (40)$$

其中 X, Y, Z 是变动坐标，而 x, y, z 是切点 M 的坐标。

过切点 M 的切面的法綫叫做这曲面的法綫。我們現在看出，它的方向余弦与偏导数 $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ 成比例；于是推知，它的方程是

$$\frac{X-x}{F'_x(x, y, z)}=\frac{Y-y}{F'_y(x, y, z)}=\frac{Z-z}{F'_z(x, y, z)}。\quad (41)$$

若所給的曲面的方程是显式 $z=f(x, y)$，則方程 (37) 有如：

$$F(x, y, z)=f(x, y)-z=0,$$

于是推出：

$$F'_x(x, y, z) = f'_x(x, y), F'_y(x, y, z) = f'_y(x, y), F'_z(x, y, z) = -1。$$

習惯上常用 p, q 各記偏导数 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$，于是得到这曲面的切面的方程

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0, \tag{42}$$

以及法綫的方程

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}。 \tag{43}$$

对于橢球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

过其上一点 (x, y, z) 的切面的方程是

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0$$

或
$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}。$$

这方程右边等于 1，因为切点的坐标 (x, y, z) 应当滿足这橢球面的方程，于是切面的方程是：

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1。$$

§ 16. 泰勒公式。多元函数的極大值与極小值

161. 泰勒公式推广到多元函数的情形 为写起来簡單起見，我們限于討論二元函数 $f(x, y)$ 的情形。泰勒公式給出 $f(a+h, b+k)$ 依自变量的改变量 h 与 k 的方冪的展开式[**127**]。引入新的自变量 t，讓

$$x=a+ht, \quad y=b+kt。 \tag{1}$$

如此，我們得到一个自变量 t 的函数：

$$\varphi(t)=f(x, y)=f(a+ht, b+kt),$$

这时

$$\varphi(0)=f(a, b), \quad \varphi(1)=f(a+h, b+k)。 \tag{2}$$

应用麦克劳林公式，余項采取拉格朗日式，可以写成[**127**]：

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+$$

$$+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1)。\tag{3}$$

現在通过函数 $f(x, y)$ 来表示导数 $\varphi^{(p)}(0)$，$\varphi^{(n+1)}(\theta)$。

由公式(1)我們看出，x 与 y 是自变量 t 的綫性函数，并且

$$dx=hdt,\quad dy=kdt。$$

所以我們可以应用确定函数 $\varphi(t)$ 的各阶微分的形式公式[156]：

$$d^p\varphi(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(p)}f(x, y)=$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)}f(x, y)dt^p,$$

由此

$$\varphi^{(p)}(t)=\frac{d^p\varphi(t)}{dt^p}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)}f(x, y)。$$

当 $t=0$ 时，$x=a$，$y=b$。当 $t=\theta$ 时，$x=a+\theta h, y=b+\theta k$，所以：

$$\varphi^{(p)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(p)}f(a, b),$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)}f(a+\theta h, b+\theta k)。$$

代入这些表达式到公式(3)中，再应用公式(2)，就得到泰勒公式：

$$f(a+h, b+k)=f(a, b)+\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)f(a, b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)}f(a, b)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n)}f(a, b)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)}f(a+\theta h, b+\theta k)。\tag{4}$$

在这个公式中，用 x 替代 a，y 替代 b，自变量的改变量 h 与 k 各記作 dx 与 dy，函数的改变量 $f(x+dx, y+dy)-f(x, y)$ 記作 $\Delta f(x, y)$，就可以写成下面这样的公式：

$$\Delta f(x, y)=df(x, y)+\frac{d^2f(x, y)}{2!}+\cdots+$$

$$+\frac{d^nf(x, y)}{n!}+\left[\frac{d^{n+1}f(x, y)}{(n+1)!}\right]_{\substack{x+\theta dx\\ y+\theta dy}}。$$

这公式右边含有函数$f(x, y)$的各阶微分，在末一项中要用所附記的自变量的值代入这一項所包含的$(n+1)$阶导数中。与一元函数的情形类似，麦克劳林公式給出函数$f(x, y)$依x与y的方冪的展开式，只要在泰勒公式(4)中，設

$$a=0,\ b=0;\quad h=x,\ k=y。$$

求公式(4)时，我們設在某一个包含有連接(a, b)与$(a+h, b+k)$两点的綫段的区域上，函数$f(x,y)$有直到$(n+1)$阶的連續偏导数。当t由0改变到1时，变点$x=a+ht$, $y=b+kt$描出上述的綫段。当$n=0$时，得到改变量的公式：

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)=hf'_a(a+\theta h,\ b+\theta k)+$$
$$+kf'_b(a+\theta h,\ b+\theta k)。$$

像在[**63**]中一样，由此直接推出，若在某一区域内，一阶偏导数到处等于零，则函数在这区域内，保持常值。

162. 函数的極大值与極小值的必要条件 設函数$f(x, y)$在点(a, b)及其近傍連續。与一元的情形类似，对于二元函数$f(x, y)$，若函数值$f(a, b)$不小于所有的附近的函数值，就是若当h与k的絕对值足够小时

$$\Delta f=f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)\leqslant 0, \tag{5}$$

就說是函数$f(x, y)$在点(a, b)达到一个極大值。

同样，若当h与k的絕对值足够小时，

$$\Delta f=f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)\geqslant 0, \tag{5_1}$$

就是說函数$f(x, y)$当$x=a$, $y=b$时，达到一个極小值。

于是，設当自变量$x=a$, $y=b$时，函数$f(x, y)$达到極大值或極小值。考虑一个自变量x的函数$f(x, b)$。由条件当$x=a$时，它应当达到極大值或極小值，所以当$x=a$时，它对x的导数应当或者等于零或者不存在[**58**]。同样考虑，得到当$y=b$时，函数$f(a, y)$对y的导数应当或者等于零或者不存在。如此我們求得極大值或極小值存在的必

要条件:二元函数 $f(x, y)$ 要达到極大值或極小值，只有当 x 与 y 的值使得一阶偏导数 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 等于零或不存在时才可能。

同样，只取 x 或只取 y, 如[58]中所述，可以肯定，当利用二阶导数时，極大值的必要条件是不等式 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \leqslant 0, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \leqslant 0$; 極小值的必要条件是不等式 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \geqslant 0, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \geqslant 0$。

以上的理由,在任何多元函数的情形，都成立。如此，我們可以推出下面这一般的法則:

一个多元函数要达到極大值或極小值,只有当那些自变量的值使得每个一阶偏导数等于零或不存在时才可能。以下我們只限于考虑偏导数存在的情形。

一阶微分等于对每个自变量的导数与对应的自变量的微分之乘积的和[153]，所以我們可以肯定，当自变量的值使得函数有極大值或極小值时,它的一阶微分应当等于零。这个必要条件的公式比較合用,因为一阶微分的表达式不依賴于所选擇的变量 [153]。讓一阶偏导数等于零,我們得到一个方程組,由此确定出自变量的那些值可能使函数达到極大值或極小值。若要完全解决这个問題,还要討論这些得到的值,是否当自变量取这些值时，函数眞的达到極大值或極小值，如果是的話,該是極大值呢还是極小值呢?下一段中,我們就二元函数的情形,作这样的討論。

163. 二元函数極大值与極小值的討論 設由表达極大值或極小值的必要条件的方程組

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=0, \tag{6}$$

求出一对須要討論的值 $x=a, y=b$。設 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 及其近傍有直到二阶的連續偏导数。

依照泰勒公式(4)，当 $n=2$ 时，可以写成：

$$f(a+h,\ b+k)=f(a,\ b)+\frac{\partial f(a,\ b)}{\partial a}h+\frac{\partial f(a,\ b)}{\partial b}k+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x\,\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial y^2}k^2\right]_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}。$$

注意，$x=a$ 与 $y=b$ 是方程組(6)的解，于是这等式可以写成：

$$\Delta f=f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)=$$

$$=\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x\,\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial y^2}k^2\right]_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}。\quad(7)$$

設

$$r=\sqrt{h^2+k^2},\quad h=r\cos\alpha,\quad k=r\sin\alpha。$$

当 h 与 k 的絕对値很小时，r 就很小，反之亦然；所以，h 及 $k\to 0$，与 $r\to 0$，这两个条件相当。

現在公式(7)可以写成：

$$\Delta f=\frac{r^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x^2}\cos^2\alpha+2\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\sin\alpha+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right]_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}。\quad(8)$$

注意二阶导数的連續性，并算作 h 与 k (或 r)是无穷小量，可以肯定，公式(8)右边的导数中，以值 $a+\theta h$，$b+\theta k$ 代入后，各与

$$\frac{\partial^2 f(a,\ b)}{\partial a^2}=A,\quad \frac{\partial^2 f(a,\ b)}{\partial a\,\partial b}=B,\quad \frac{\partial^2 f(a,\ b)}{\partial b^2}=C,$$

差一个无穷小量，所以公式(8)方括号中 $\cos^2\alpha$，$\cos\alpha\sin\alpha$，$\sin^2\alpha$ 的系数可以各用

$$A+\varepsilon_1,\quad 2B+\varepsilon_2,\quad C+\varepsilon_3$$

替代，其中 ε_1，ε_2，ε_3 与 h，k (或 r)一齐是无穷小量。

于是公式(8)可以写成：

$$\Delta f=\frac{r^2}{2!}[A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha+\varepsilon],\quad(9)$$

其中 $$\varepsilon=\varepsilon_1\cos^2\alpha+2\varepsilon_2\cos\alpha\sin\alpha+\varepsilon_3\sin^2\alpha$$
与 h, k (或 r)一齐是无穷小量。

由極大值与極小值的定义推知,若对于所有的足够小的 r 的值,等式(9)的右边保持(−)号,则 $x=a$, $y=b$ 对应于函数的一个極大值;若它保持(+)号,則对应于函数的一个極小值;若无論 r 的值多么小,等式(9)右边可(+)可(−),則 $x=a$, $y=b$ 不对应于函数的一个極大值或極小值。

討論等式(9)右边的符号,可以分下列四种情形:

I. 若沒有一个 α 的值使得三項式

$$A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha \tag{10}$$

等于零,則由于它是 α 的連續函数,它保持不变号[35]。設是(+)号。在区間$[0,2\pi]$上,这个連續函数达到一个最小值 m (正的)。根据 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的周期性,这个最小值 m 对于任何 α 的值都成立。对于所有的足够小的 r 的值,$|\varepsilon|$一定要小于 m,于是等式(9)右边的符号由三項式(10)的符号确定,就是(+)号;在这情形下,有一个極小值。

II. 若沒有 α 的值使得三項式(10)等于零,而它保持(−)号。設$(-m)$是这三項式在区間$[0, 2\pi]$上的最大值(負的)。当 r 足够小时,$|\varepsilon|$小于 m;这时等式(9)右边的符号是(−)号,就是在这情形下有一个極大值。

III. 設三項式(10)变号。設当 $\alpha=\alpha_1$ 时,它等于正数$(+m_1)$,而当 $\alpha=\alpha_2$ 时,等于負数$(-m_2)$。对于所有的足够小的 r 的值,$|\varepsilon|$ 將小于 m_1 与 m_2,对于这样的 r 的值,当 $\alpha=\alpha_1$ 或 α_2 时,等式(9)右边的符号由三項式(10)的符号确定,就是,$\alpha=\alpha_1$ 时,(+)号,$\alpha=\alpha_2$ 时,(−)号。如此,在这情形下,无論 r 的值多么小,等式(9)右边的符号,可正可負,就是,在这情形下,沒有極大值或極小值。

IV. 最后設三項式(10)保持不变号,可是当 α 取某些值时,它等于零。在这情形下,不討論 ε 的符号,就不能断定等式(9)右边的符号,

于是这种情形，在我們的討論中，保留可疑。由討論三項式 (10) 的符号，可以就这四种情形，得到簡單的判别法。

1. 先設 $A\neq 0$。三項式(10)就可以写成：

$$\frac{(A\cos\alpha+B\sin\alpha)^2+(AC-B^2)\sin^2\alpha}{A}。\tag{11}$$

若 $AC-B^2>0$，則这分式的分子是不能同时成为零的两个正項之和。实际上，第二項只有当 $\sin\alpha=0$ 时等于零，而这时 $\cos\alpha=\pm1$，于是第一項成为 $A^2\neq 0$。如此，在这情形下，表达式(11)的符号与 A 的符号相同；于是推知，当 $A>0$ 时，是(I)的情形，就是有極小值，当 $A<0$ 时，是(II)的情形，就是有極大值。

2. 設 $A\neq 0$，而 $AC-B^2<0$。分式 (11) 的分子当 $\sin\alpha=0$ 时有(+)号，当 $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{B}{A}$ 时有(−)号，所以这是(III)的情形，就是沒有極大值或極小值。

3. 設 $A\neq 0$，而 $AC-B^2=0$，則分式 (11) 的分子只剩下第一項；它保持(+)号不变，但是当 $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{B}{A}$ 时它等于零，就是这时是可疑情形 IV。

4. 設 $A=0$，而 $B\neq 0$。这时三項式 (10) 有如 $\sin\alpha\,(2B\cos\alpha+$ $+C\sin\alpha)$。当 α 的值逼近零时，括号中的表达式保持不变号，与 B 的符号相同，但是前面的因子 $\sin\alpha$，因 α 大于或小于零，有不同的符号，就是(III)的情形，沒有極大值或極小值。

5. 設 $A=B=0$。这时三項式 (10) 只剩下一項 $C\sin^2\alpha$，于是推知，它不变号，但是可以成为零，就是可疑情形。

注意，在(4)的条件下，$AC-B^2<0$；在(5)的条件下，$AC-B^2=0$，可以推出下面的法則：

为要求二元函数 $f(x, y)$ 的極大值与極小值，要先作出偏导数 $f'_x(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$，再解方程組：

$$f'_x(x, y)=0, \quad f'_y(x, y)=0。$$

設 $x=a, y=b$ 是这方程組的一組解，并設

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2}=A, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a\, \partial b}=B, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2}=C,$$

則可按下表討論所得到的解：

$AC-B^2$	+		−	0
A	+	−	沒有極大值或極小值	可疑情形
	極小值	極大值		

164. **例** 1. 考慮曲面 $z=f(x, y)$。它的切面的方程是[**160**]:

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0,$$

其中 p 与 q 各为偏导数 $f'_x(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 的值。

若当 $x=a, y=b$ 时，函数 z 达到一个極大值或極小值，則对应的点叫做这曲面的頂点，在这点的切面应当平行于 XY 平面，就是偏导数的值 p 与 q 应当等于零，并且在切点附近，这曲面应当位于切面的一側(圖 163)。不过有时，在某一点 p 与 q 等于零，就是切面平行于 XY 平面；但是在这点附近，曲面位于切面的两側；这时对于对应的 x 与 y 的值，函数 z 沒有極大值或極小值。

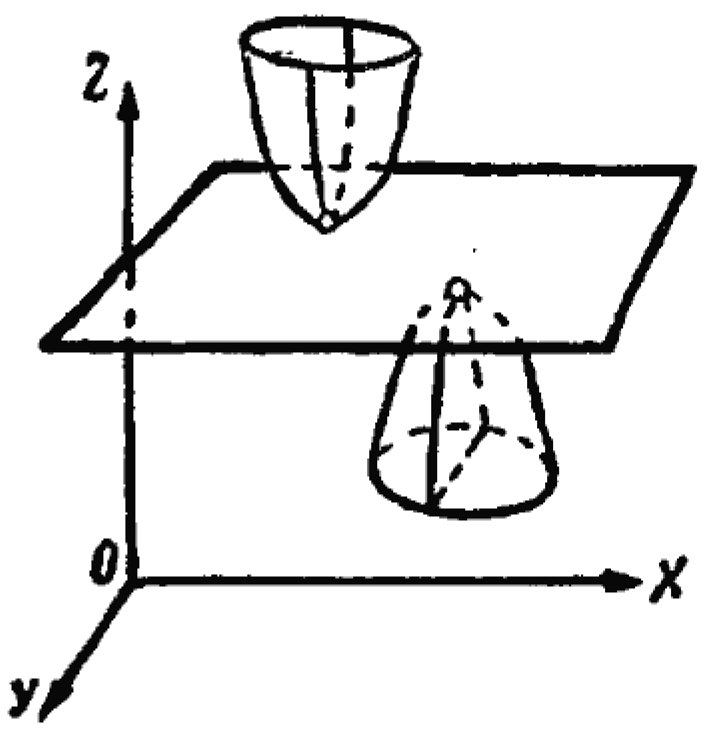


圖 163.

还有一种可能的情形，我們以前叫做可疑情形。設当 $x=a, y=b$ 时，切面平行于 XY 平面，并且曲面位于切面的一側，不过它們有过切点的公共曲綫。在这情形下，当 h 与 k 的絕对值足够小时，差

$$f(a+h, b+k)-f(a, b),$$

不变号，而对于某些 h 与 k 的值，它等于零。例如，主軸平行于 XY 平面的圓柱面，对于这样的曲面，我們也說，当 $x=a, y=b$ 时，函数 $f(x, y)$ 有極大值或極小值。

曲面 $$2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

是双曲抛物面。讓 z 对 x 与 y 的偏导数等于零，得到 $x=y=0$，于是在坐标原点，这曲面的切面就是 XY 平面。求出二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{b^2},$$

于是推出：

$$AC-B^2=-\frac{1}{a^2b^2}<0,$$

就是当 $x=y=0$ 时，函数 z 沒有極大値或極小値，于是在坐标原点附近，这曲面位于切面的两側(圖 164)。

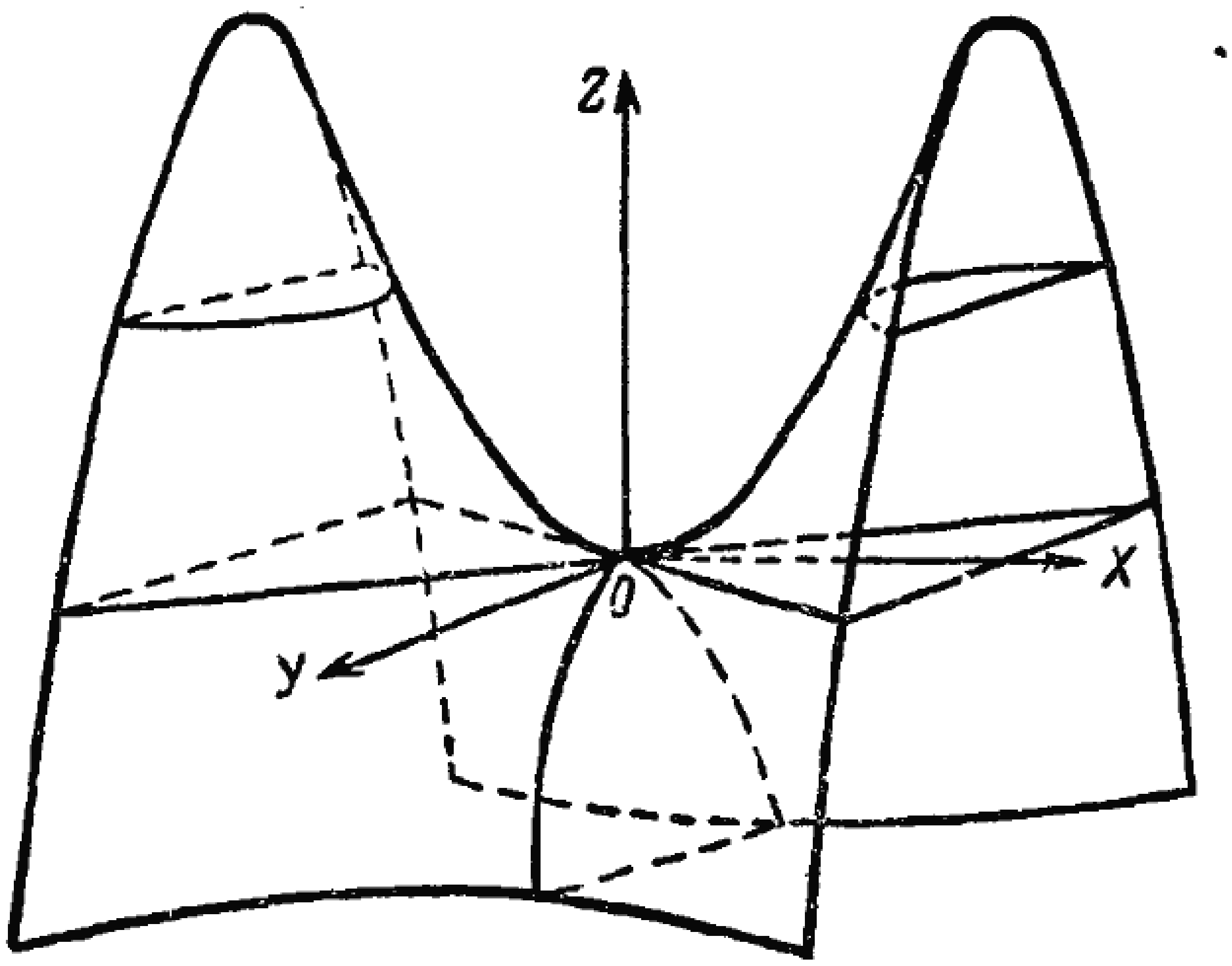


圖 164.

2. 給定平面上 n 个点 $M_i(a_i, b_i)\ (i=1, 2, \cdots, n)$。求出这样一个点 M，使得給定的 m_i 与点 M 到点 M_i 距离平方的乘积之和达到極小値。

設未知点 M 的坐标是 (x, y)。上述的和就是：

$$w=\sum_{i=1}^{n} m_i[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2]。$$

讓偏导数 w'_x 与 w'_y 等于零，得到：

$$x=\frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\quad y=\frac{m_1b_1+m_2b_2+\cdots+m_nb_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}。\qquad(12)$$

不难看出，在这情形下，A 与 $AC-B^2$ 都大于零，于是求出的 x 与 y 的値，的确对应于 w 的極小値。这个極小値就是 w 的最小値，因为点 (x, y) 无限远移时 $w\to+\infty$。若 M_i 是質点，m_i 各为它們的質量，则公式(12)确定这質点系的重心的

坐标。

165. 关于求函数的極大値与極小値的补充知識 以上的討論可以推广到多元函数的情形。例如給定一个三元函数 $f(x, y, z)$。为要求使这函数达到極大値或極小値的自变量的值，須要解三元联立方程組：

$$f'_x(x, y, z)=0, \quad f'_y(x, y, z)=0, \quad f'_z(x, y, z)=0。 \tag{13}$$

設 $x=a,\ y=b,\ z=c$ 是这方程組的一組解。就要討論这些值。由泰勒公式可以把函数的改变量写成自变量的改变量的齐次多項式之和：

$$\begin{aligned}\Delta f = & h\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a}+k\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial b}+l\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial c}+\\ & +\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f(a, b, c)+\cdots+\\ & +\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) \quad (0<\theta<1)。\end{aligned} \tag{14}$$

値 $x=a,\ y=b,\ z=c$ 滿足方程(13)，于是

$$h\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a}+k\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial b}+l\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial c}=0。$$

若 h, k, l 的二次項：

$$\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f(a, b, c) \tag{15}$$

不等于零，則当 h, k, l 的絕对值足够小时，等式(14)右边与表达式(15)保持同号，若是(+)号，則 $f(a, b, c)$ 是函数 $f(x, y, z)$ 的一个極小値，若是(−)号，則是个極大値。若表达式(15)可以有不同的号，則 $f(a, b, c)$ 不是函数的極大値或極小値。最后，若表达式(15)不变号，不过对于某些 h, k, l 的值，它等于零，則是可疑情形，就須要再討論等式(14)右边 h, k, l 的高次項。

为要仔細討論可疑情形，我們考慮一个二元函数的特例：

$$u=x^2-2xy+y^2+x^3+y^3。$$

値 $x=y=0$ 使得偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 等于零，并且

$$A=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=2, \quad B=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-2, \quad C=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=2,$$

$$AC-B^2=0,$$

于是我們有可疑情形。这个例中，特点是函数 u 的表达式中所有的二次項恰成整方，于是可以写成：

$$u=(x-y)^2+x^3+y^3。$$

当 $x=y=0$ 时，u 等于零。为要討論当 x 与 y 的值逼近零时，u 的值怎么样，我們引入極坐标：

$$x=r\cos\alpha,\ y=r\sin\alpha。$$

代入上式中，得到：

$$u=r^2[(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+r(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)]。$$

当 α 在区間 $[0, 2\pi]$ 上取任何不等于 $\frac{\pi}{4}$ 与 $\frac{5\pi}{4}$ 的值时，

$$\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0,$$

于是对于任何一个这样的 α，可以选出这样一个数 r_0，使得当 $r<r_0$ 时，方括号內的表达式有(+)号。当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，它也是正的，但是当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时，它有(−)号，于是推知，当 $x=y=0$ 时，函数 u 沒有極大值或極小值。

再考慮函数：

$$u=(y-x^2)^2-x^5。$$

不难驗証，当 $x=y=0$ 时，偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 等于零，并有可疑情形。对于无論多么小的 x 的值，取 $y=x^2$，于是函数 u 的表达式中只剩下 $(-x^5)$，它的符号依賴于 x 的符号，所以当 $x=y=0$ 时，函数 u 沒有極大值或極小值。引用極坐标，我們得到：

$$u=r^2[\sin^2\alpha-2r\cos^2\alpha\sin\alpha+r^2\cos^4\alpha-r^3\cos^5\alpha],$$

由这表达式看出，除 0 与 π 外，对于任何 α 的值，可以求出这样一个正数 r_0，使得当 $r<r_0$ 时 $u>0$，就是在由坐标原点引出的任何一条半綫上，逼近原点时函数 u 有正号。縱然如此，并且在原点 $u=0$，我們也不能認为它有極小值，因为对于所有的 α 的值，不能求出一个一致的 r_0。

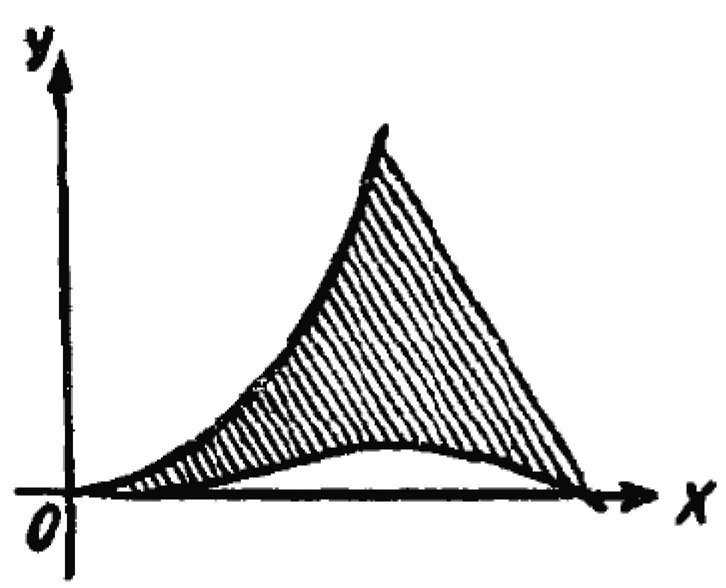


圖 165.

在 [76] 中我們作过曲綫 $(y-x^2)^2-x^5=0$，在原点它有一个第二类歧点，若考慮在曲綫两支間画有斜綫的区域內的点，则当逼近原点时，这方程左边有(−)号(圖 165)。

166. 函数的最大值与最小值 設要求函数 $f(x, y)$ 在某一給定的区域上的最大值。由[163]所述，我們可以求出在这区域內所有的極大值，就是这区域中那样的內点，它的函数值大于它附近点的函数值。为要求这函数的最大值，还要注意所給区域的边界(界綫)上的值，再比較区域內的極大值与界綫上的值。这些値

中最大的就是这函数在这区域上的最大值。类似的可以求一个函数在一个給定的区域上的最小值。为清楚起見，我們考虑一个例。

在平面上給定一个由 OX 軸，OY 軸与直綫：

$$x+y-1=0 \tag{16}$$

作成的三角形 OAB（圖 166）。

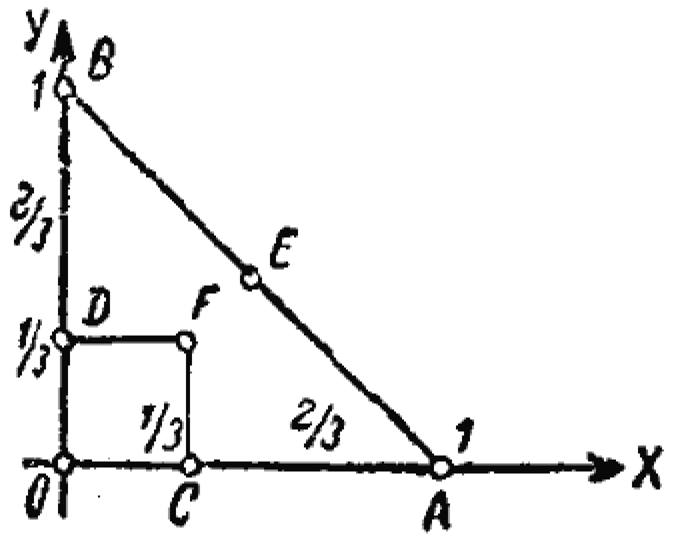


圖 166.

要在这三角形中求这样一个点，使得它到三頂点的距离的平方和最小。

注意，頂点 A 与 B 的坐标各为 $(1, 0)$ 与 $(0, 1)$，于是可以写出由变点 (x, y) 到三頂点的距离的平方和的表达式：

$$z=2x^2+2y^2+(x-1)^2+(y-1)^2。$$

讓一阶偏导数等于零，得到 $x=y=\frac{1}{3}$。不难証明，这組值对应于一个極小值。再討論在这三角形边界上 z 的值。为要討論在边 OA 上 z 的值，須要在 z 的表达式中設 $y=0$：

$$z=2x^2+(x-1)^2+1,$$

其中 x 可以在区間$[0, 1]$上改变。依照[**60**]作法，得到在边 OA 上 z 在点 C，就是当 $x=\frac{1}{3}$时取，最小值 $z=\frac{5}{3}$。同样在边 OB 上，z 在点 D，就是当 $y=\frac{1}{3}$时，达到最小值 $z=\frac{5}{3}$。为要討論在边 AB 上 z 的值，須要依照方程 (16) 在 z 的表达式中設 $y=1-x$：

$$z=3x^2+3(x-1)^2,$$

其中 x 可以在区間$[0, 1]$上改变。在这情形下，在点 E，就是当 $x=y=\frac{1}{2}$时，z 达到最小值 $z=\frac{3}{2}$。如此我們得到下面这个可能是这函数的最小值的表：

x, y	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}, 0$	$0, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
z	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$

由这表我們看出，在点$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$达到最小值 $z=\frac{4}{3}$。对于任意三角形，也可以考虑这个問題，未知点是三角形的重心。

167. 相对極大値与極小値　以上，我們討論函数的極大値与極小

值时，設这函数所依賴的变量都是自变量。在这种情形下的極大值与極小值叫做絕对的。現在我們考慮另一种情形，就是函数所依賴的变量是由某些关系式相連系的。在这种情形下的極大值与極小值叫做相对的。

設要求$(m+n)$个变量x_i的函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n})$$

的極大值与極小值，其中x_i由n个关系式

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n})=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{17}$$

相連系。

以下，为省紙起見，我們不写出函数中所含的元。对于n个变量解这n个关系式(17)，例如：解出

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_{m+n},$$

我們就可以由其余m个自变量

$$x_1, x_2, \cdots, x_m,$$

表达它們，把这些表达式代入到函数f中，得到一个m个自变量的函数，于是这問題就化为求絕对的極大值与極小值了。但是解方程組(17)时，常是非常麻煩，甚至于有时就作不出来，我們現在講解这問題的另一个方法，叫做拉格朗日乘数法。

設在某一点$M(x_1, x_2, \cdots, x_{m+n})$函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_{m+n})$达到相对極大值或極小值。設在点$M$导数存在，就可以肯定，在点$M$函数$f$的全微分应当等于零[**162**]：

$$\sum_{s=1}^{m+n} \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s = 0。 \tag{18}$$

另一方面，由关系式(17)求微分，在点M得到下面n个等式：

$$\sum_{s=1}^{m+n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} dx_s = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)。$$

把这些方程各乘以待定乘数：

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n,$$

再与关系式(18)逐項相加，就得到:

$$\sum_{s=1}^{m+n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s}+\cdots+\lambda_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s}\right)dx_s=0。 \tag{19}$$

再确定这 n 个乘数，使得 n 个因变量的微分

$$dx_{m+1},\ dx_{m+2},\ \cdots,\ dx_{m+n}$$

的系数都等于零，就是由 n 个方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_s}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s}+\cdots+\lambda_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s}=0$$

$$(s=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ m+n) \tag{20}$$

中确定 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。

这时关系式(19)左边只剩下含有自变量的微分

$$dx_1,\ dx_2,\ \cdots,\ dx_m$$

的項，就是

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s}+\cdots+\lambda_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s}\right)dx_s=0。 \tag{21}$$

但是自变量的微分 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$ 是任意的量。讓其中一个等于 1，其余都等于零，由等式(21)推出这等式所有的系数都应当等于零[**158**]，就是

$$\frac{\partial f}{\partial x_s}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s}+\cdots+\lambda_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s}=0 \quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。 \tag{22}$$

以上所有的公式中，由(18)起，应当算作变量 x_s 是代入以点 M 的坐标的，并且按照我們的假設，在点 M，f 达到相对極大值或極小值。特别如在用以确定 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的方程(20)中，就是这样的。

如此，方程(22)，(20)与(17)就是在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_{m+n})$ 达到相对極大值或極小值的必要条件。

方程組(22)，(20)与(17)一共是 $(m+2n)$ 个方程，由它們可以确定出 $(m+n)$ 个变量 x_s 以及 n 个乘数 λ_i 的值。

由方程組(22)与(20)看出，为要求出，当函数 f 达到相对極大值或極小值时，变量 x_s 应取的值；須要讓由下面这等式所确定的函数 Φ 对于所有的 x_s 的偏导数都等于零：

$$\Phi=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_n\varphi_n,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 算作常量。再解它們与 n 个方程(17)所組成的联立方程組。我們現在不考虑充分条件。

注意，在引入上述法則时，我們不仅假設了 f 与 φ_i 的偏导数都存在，并且假設了由方程組(20)可能确定 n 个乘数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。因此，由上述法則可能得不到使函数 f 达到相对極大值或極小值的某些值 $(x_1, x_2, \cdots, x_{m+n})$。以下我們就这問題的簡單情形，更仔細地加以討論，并使上述理論更趋精密。

168. 补充知識 設要求函数 $f(x, y)$ 的相对極大值与極小值，x 与 y 有一个补充条件

$$\varphi(x, y)=0, \tag{23}$$

并設在点 (x_0, y_0) 达到一个相对極大值，这里 $\varphi(x_0, y_0)=0$。設 $\varphi(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 及其近傍有連續一阶偏导数，并設

$$\varphi'_{y_0}(x_0, y_0)\neq 0。 \tag{24}$$

这时，方程(23)在 $x=x_0$ 近傍唯一确定一个函数 $y=\omega(x)$，連續，有連續导数，并且 $y_0=\omega(x_0)$ [**157**]。代入 $y=\omega(x)$ 到函数 $f(x, y)$ 中，我們可以肯定，一个变量 x 的函数 $f[x, \omega(x)]$ 应当在 $x=x_0$ 时达到極大值，于是，当 $x=x_0$ 时，它的全导数应当等于零，就是

$$f'_{x_0}(x_0, y_0)+f'_{y_0}(x_0, y_0)\omega'(x_0)=0。$$

代入 $y=\omega(x)$ 到(23)中，对 x 求导数，在点 (x_0, y_0) 得到[**69**]：

$$\varphi'_{x_0}(x_0, y_0)+\varphi'_{y_0}(x_0, y_0)\omega'(x_0)=0。$$

用 λ 乘第二个方程再与第一个逐項相加，得到：

$$(f'_{x_0}+\lambda\varphi'_{x_0})+(f'_{y_0}+\lambda\varphi'_{y_0})\omega'(x_0)=0。$$

由条件 $f'_{y_0}+\lambda\varphi'_{y_0}=0$ 确定 λ，根据(24)，这是可能的；于是就有 $f'_{x_0}+\lambda\varphi'_{x_0}=0$，就是求出两个方程：

$$f'_{x_0}+\lambda\varphi'_{x_0}=0,\quad f'_{y_0}+\lambda\varphi'_{y_0}=0, \tag{25}$$

再添上方程 $\varphi(x_0, y_0)=0$，如此証明了乘数法是合理的。若条件(24)不成立，就是

$\varphi'_{y_0}(x_0, y_0)=0$；如果 $\varphi'_{x_0}(x_0, y_0)\neq 0$，則可以像上面一样考虑，只要把 x 与 y 的地位互換。若在点 (x_0, y_0) 我們有：

$$\varphi'_{x_0}(x_0, y_0)=0, \quad \varphi'_{y_0}(x_0, y_0)=0, \tag{26}$$

則不能証明点 (x_0, y_0) 可否利用乘数法得到。

等式 (26) 説明点 (x_0, y_0) 是曲綫 (23) 的一个奇点 [**76**]。現在我們給一个例，在这例中，在有相对極小值的点条件 (26) 成立。設要求由点 $(-1, 0)$ 到半立方抛物綫 $y^2-x^3=0$ ([**76**] 圖 87) 上的点的最短距离。如此就要求函数 $f=(x+1)^2+$ $+y^2$ 的最小值，其中 $\varphi=y^2-x^3=0$。由几何显見，在点 $(0, 0)$ 达到極小值，而这点是这抛物綫的奇点。用乘数法得出下面两个方程：

$$2(x+1)-3\lambda x^2=0, \quad 2y+2\lambda y=0。$$

代入 $x=0$，$y=0$，第一个方程化为不合理等式 $2=0$，第二个方程当 λ 是任何数时都满足。在这情形下，用乘数法得不到达到相对極小值的点 $(0, 0)$。类似的可以証明，若在点 (x_0, y_0, z_0) 一个函数达到極大值或極小值，并有一个补充条件 $\varphi(x, y, z)=0$，这时，只要函数 φ 的偏导数至少有一个在点 (x_0, y_0, z_0) 不等于零，則这点可以由乘数法得到。

类似的可以推广到更普遍的情形，只是要用到关于方程組的隐函数存在定理，这是我們在 [**157**] 中講过的。例如，設函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 达到一个相对極大值，并有两个补充条件：

$$\varphi(x, y, z)=0; \quad \psi(x, y, z)=0, \tag{27}$$

設导数都存在而連續，并且

$$\varphi'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)\psi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)-\varphi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)\psi'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)\neq 0。\tag{28}$$

这时，方程 (27) 唯一确定函数 $y=\omega_1(x)$，$z=\omega_2(x)$，使得 $y_0=\omega_1(x_0)$，$z_0=$ $=\omega_2(x_0)$。把这两个函数代入 f 中，得到一个变量 x 的函数，它当 $x=x_0$ 时有極大值，由此推出：

$$f'_{x_0}(x_0, y_0, z_0)+f'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)\omega'_1(x_0)+f'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)\omega'_2(x_0)=0。$$

代入函数 (27) 中，对 x 求导数，在点 (x_0, y_0, z_0) 得到：

$$\varphi'_{x_0}+\varphi'_{y_0}\omega'_1(x_0)+\varphi'_{z_0}\omega'_2(x_0)=0, \quad \psi'_{x_0}+\psi'_{y_0}\omega'_1(x_0)+\psi'_{z_0}\omega'_2(x_0)=0。$$

把这两个等式各乘以 λ_1，λ_2，与上面的逐項相加：

$$(f'_{x_0}+\lambda_1\varphi'_{x_0}+\lambda_2\psi'_{x_0})+(f'_{y_0}+\lambda_1\varphi'_{y_0}+\lambda_2\psi'_{y_0})\omega'_1(x_0)+$$
$$+(f'_{z_0}+\lambda_1\varphi'_{z_0}+\lambda_2\psi'_{z_0})\omega'_2(x_0)=0。\tag{29}$$

注意 (28)，，可以肯定，由下面两个方程：

$$f'_{y_0}+\lambda_1\varphi'_{y_0}+\lambda_2\psi'_{y_0}=0, \quad f'_{z_0}+\lambda_1\varphi'_{z_0}+\lambda_2\psi'_{z_0}=0 \tag{30}$$

可以确定 λ_1 与 λ_2，于是方程 (29) 化为等式

$$f'_{x_0}+\lambda_1\varphi'_{x_0}+\lambda_2\psi'_{x_0}=0, \tag{31}$$

于是在这情形下乘数法可用。除方程 (30) 与 (31) 外还要添上

$$\varphi(x_0, y_0, z_0)=0 \quad 与 \quad \psi(x_0, y_0, z_0)=0。$$

可以用类似的条件替代条件(28)，不对 y_0 与 z_0 求导数而对 x_0 与 y_0，或对 x_0 与 z_0 求，若(28)左边的表达式与这里所說的两个类似的表达式都等于零，則对于点 (x_0, y_0, z_0) 不能用乘数法。在下一段我們考慮的例中，沒有这种情形。例如，在例一中我們有一个补充条件 (32)，而在这条件的左边，A, B, C 中至少有一个数不等于零。設 $C\neq 0$，則左边对 z 的偏导数等于 C，于是在任何点 (x, y, z) 不等于零。这說明，在这情形下，由乘数法应当得到所有的答案。

現限于三个变量的情形，我們来簡短叙述相对極大值与極小值的充分条件。設要在补充条件 $\varphi(x, y, z)=0$ 下，求函数 $f(x, y, z)$ 的相对極大值与極小值。作函数 $\Phi=f+\lambda\varphi$。令其对 x, y, z 的一阶偏导数等于零，再計算补充方程，假設我們得到值 $x=x_0, y=y_0, z=z_0, \lambda=\lambda_0$。 我們应験算剛才所得到的值，亦即应对一切与 (x_0, y_0, z_0) 充分近且滿足补充方程 $\varphi(x, y, z)=0$ 的 (x, y, z)，来确定差 $f(x, y, z)-f(x_0, y_0, z_0)$ 的符号。引进函数 $\psi(x, y, z)=f(x,y,z)+\lambda_0\varphi(x,y,z)$，由补充方程直接推出，可取差 $\psi(x, y, z)-\psi(x_0, y_0, z_0)$ 来代替差 $f(x, y, z)-f(x_0, y_0, z_0)$ 且只須考慮它的符号。由条件函数 $\psi(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的一阶导数等于零。按泰勒公式把它展开到二阶导数为止，得到表达式[参看 **165**]:

$$\psi(x, y, z)-\psi(x_0, y_0, z_0)=a_{11}dx^2+a_{22}dy^2+a_{33}dz^2+$$
$$+2a_{12}dxdy+2a_1a_3dxdz+2a_{23}dydz+\cdots,$$

其中 a_{ik} 表示函数 $\psi(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的相应的二阶偏导数的值，且用 dx, dy, dz 表示变量的改变量。假定，$\varphi_{z_0}(x_0, y_0, z_0)\neq 0$，于是由补充方程确定出 $z=\omega(x, y)$，并且 $z_0=\omega(x_0, y_0)$。由补充方程得:

$$\varphi_x(x, y, z)dx+\varphi_y(x, y, z)dy+\varphi_z(x, y, z)dz=0。$$

把值 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 代入之后，我們可用 dx 与 dy 表达 dz:

$$dz=-\frac{\varphi_{x_0}(x_0, y_0, z_0)}{\varphi_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}dx-\frac{\varphi_{y_0}(x_0, y_0, z_0)}{\varphi_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}dy。$$

把 dz 的这个表达式代入前面的公式中，且把同类項集在一起，得到:

$$\psi(x, y, z)-\psi(x_0, y_0, z_0)=Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2+\cdots。$$

現可用[**163**]中極大值与極小值的判別法。例如，若 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$，則函数

$f(x, y, z)$在点(x_0, y_0, z_0)有相对極小值。由[163]中的討論直接推出，作为所述法則的基础，只須假定，函数$f(x, y, z)$与$\varphi(x, y, z)$在点(x_0, y_0, z_0)及其近傍有直到二阶的連續导数。

关于相对極大値与極小値的充分条件的問題，我們不想更仔細地討論了。上面討論中最主要是用差$\psi(x, y, z)-\psi(x_0, y_0, z_0)$来代替差$f(x, y, z)-f(x_0, y_0, z_0)$，而差$\psi(x, y, z)-\psi(x_0, y_0, z_0)$在点$(x_0, y_0, z_0)$的一阶导数等于零，同时因变量的微分$dz$通过自变量的微分$dx, dy$由一次方程确定。类似地可以确定更多元函数在更多补充条件下的充分条件。

169. 例 1. 求由点(a, b, c)到平面

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{32}$$

的最短距离。由所給的点(a, b, c)到变点(x, y, z)的距离平方由公式:

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \tag{33}$$

表达。

在这情形下，坐标(x, y, z)应当满足方程(32)(点应当在平面上)。在条件(32)下求表达式(33)的極小值。作函数:

$$\Phi=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\lambda_1(Ax+By+Cz+D)。$$

讓它对x, y, z的偏导数等于零，得到:

$$x=a-\frac{1}{2}\lambda_1 A,\quad y=b-\frac{1}{2}\lambda_1 B,\quad z=c-\frac{1}{2}\lambda_1 C。 \tag{34}$$

把这些值代入(32)中，可以确定λ_1

$$\lambda_1=\frac{2(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2}。 \tag{35}$$

我們得到唯一的一个答案，因为最小值应当存在，所以它們对应于所要求的变量的值。把(34)中这些值代入表达式(33)中，得到由这点到这平面的最短距离的表达式:

$$r_0^2=\frac{1}{4}\lambda_1^2(A^2+B^2+C^2),$$

其中λ_1由公式(35)确定。

2. 分給定的正数a为三个正数x, y, z的和，使得表达式:

$$x^m y^n z^p \tag{36}$$

最大，其中m, n, p是給定的正数。就是在条件

$$x+y+z=a \tag{37}$$

下，求表达式(36)的極大值。

我們求表达式(36)的对数

$$m\log x+n\log y+p\log z$$

的極大值。作函数:

$$\Phi=m\log x+n\log y+p\log z+\lambda_1(x+y+z-a)。$$

讓它的偏导数等于零,得到:

$$x=-\frac{m}{\lambda_1},\quad y=-\frac{n}{\lambda_1},\quad z=-\frac{p}{\lambda_1};$$

再由关系式(37),得到:

$$\lambda_1=-\frac{m+n+p}{a},$$

就是

$$x=\frac{ma}{m+n+p},\quad y=\frac{na}{m+n+p},\quad z=\frac{pa}{m+n+p},\tag{38}$$

这里求出的变量的值都是正数。可以証明,在所設条件下表达式(36)应当有最大值,于是像例1一样,这唯一的答案,就是所要求的,对应于表达式(36)取最大値时变量的值。

公式(38)說明,数 a 須要分成的三份与指数 m, n, p 成比例。

建議讀者在以上两个例中按前段所述方法討論充分条件。

3. 在長为 l_0 的导綫一端接上 k 条分导綫,各長 $l_s(s=1, 2, \cdots, k)$,在各导綫上电流强度各为 $i_0, i_1, i_2, \cdots, i_k$。試求要怎样选擇各导綫的横断面积 $q_0, q_1, q_2, \cdots, q_k$,使得綫路 $(l_0, l_1), (l_0, l_2), \cdots, (l_0, l_k)$ 两端的电位差是 E,而用的材料 V 最少(圖167)。

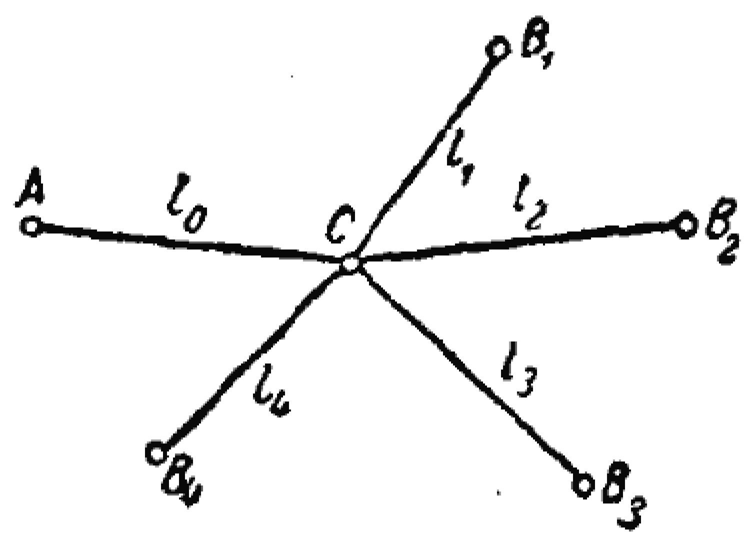


圖 167.

所給物質作成的綫,当長与横断面积为1时,电阻記作 c。

要求变量 $q_0, q_1, \cdots, q_k$ 的函数 V

$$V=l_0q_0+l_1q_1+\cdots+l_kq_k$$

的最小值。

注意所給的电位差 E,可以写出 k 个关系式:

$$\varphi_s=c\left(\frac{l_0i_0}{q_0}+\frac{l_si_s}{q_s}\right)-E=0\quad(s=1, 2, \cdots, k)。\tag{39}$$

作函数:

$$\Phi=(l_0q_0+l_1q_1+\cdots+l_kq_k)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s\left[c\left(\frac{l_0i_0}{q_0}+\frac{l_si_s}{q_s}\right)-E\right]。$$

讓 Φ 对 $q_0, q_1, \cdots, q_k$ 的偏导数等于零，得到：

$$l_0-\frac{cl_0i_0}{q_0^2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)=0,\quad l_s-\frac{\lambda_s cl_s i_s}{q_s^2}=0\quad(s=1,\,2,\,\cdots,\,k)。\tag{40}$$

由条件(39)得到：

$$\frac{l_1i_1}{q_1}=\frac{l_2i_2}{q_2}=\cdots=\frac{l_ki_k}{q_k}=\frac{E}{c}-\frac{l_0i_0}{q_0},$$

用 σ 記这共同的量，可以写成：

$$q_s=\frac{l_si_s}{\sigma}\quad(s=1,\,2,\,\cdots,\,k),\quad \sigma=\frac{E}{c}-\frac{l_0i_0}{q_0}。\tag{41}$$

由方程(40)就有：

$$\lambda_s=\frac{q_s^2}{ci_s}=\frac{l_s^2i_s}{c\sigma^2}。$$

把这些 λ_s 的表达式代入(40)的第一个方程中，得到：

$$q_0^2=\frac{i_0}{\sigma^2}(l_1^2i_1+l_2^2i_2+\cdots+l_k^2i_k),$$

或

$$q_0=\frac{\sqrt{i_0(l_1^2i_1+l_2^2i_2+\cdots+l_k^2i_k)}}{\dfrac{E}{c}-\dfrac{l_0i_0}{q_0}},$$

由此得到：

$$q_0=\frac{c}{E}\left[i_0l_0+\sqrt{i_0(l_1^2i_1+l_2^2i_2+\cdots+l_k^2i_k)}\right]。$$

代入这 q_0 的表达式到关系式(41)中，得到 $q_1, q_2, \cdots, q_k$：

$$q_s=\frac{cl_si_s}{E}\left(1+\frac{l_0i_0}{\sqrt{i_0(l_1^2i_1+l_2^2i_2+\cdots+l_k^2i_k)}}\right)\quad(s=1,\,2,\,\cdots,\,k)。$$

如此，由 V 的極大值与極小值的必要条件，我們得到唯一的一組正值 $q_0, q_1, \cdots, q_k$，由物理学知道，当适当选擇横断面时，应当有一个用的材料最少的时候，所以可以肯定，得到的值 $q_0, q_1, \cdots, q_k$ 是这問題的解。

第六章　复数，高等代数初步与函数的积分法

§17. 复数

170. 复数　若只限于实数，则我們知道，开方有时不可能；例如負数开偶次方在实数域内沒有答案。因此，实系数的二次方程不总有实根。由于这个情况，自然要扩充数的概念，引出較广义的新数，而使实数只是新数里的特殊情形。同时还要确定这些新数的运算，使得实数所具有的基本运算定律，新数仍然保持有。以下我們說明，这是可能的。

不仅是作开方时实数不敷应用，只由几何方面考虑，也会引起数的概念的扩充。我們先就几何方面，作数的概念的扩充。

我們知道，任何实数，可以由給定的 OX 軸上的綫段来表示，或把所有这样的綫段的起点定为坐标原点，就由 OX 軸上的点来表示；反之，OX 軸上任何一个綫段或一点对应于一个确定的实数。

現在我們不只考虑 OX 軸，而考虑整个平面，作出 OX，OY 两个坐标軸，如此就可以扩充数的概念；我們讓这平面上每一个矢量或是每一点对应一个数，这样的数叫做复数

若是对于長度相等而且方向相同的矢量不加区别，则实数不仅对应于 OX 軸上的矢量，也对应于平行于 OX 軸的矢量。例如，長度等于1，而方向与正向 OX 軸相同的矢量对应于实数1。

長度等于1，而方向与正向 OY 軸相同的矢量，記作 i，叫做虛单位。平面上任何一个矢量 $\overline{MN}$ 可以由两个平行于坐标軸的矢量 $\overline{MP}$

与 $\overline{PN}$ 之和表示(圖 168)。平行于 OX 軸的矢量 $\overline{MP}$ 对应于某一实数 a。把平行于 OY 軸的矢量 $\overline{PN}$ 所对应的記作 bi, 其中 b 是一个实数, 它的絕对值等于矢量 $\overline{PN}$ 的長度; 若 $\overline{PN}$ 的方向与正向 OY 軸相同, 这个数就是正的, 若与正向 OY 軸相反, 就是負的。如此, 一个矢量 $\overline{MN}$ 对应于一个复数, 記作

$$a+bi。$$

注意, 表达式 $a+bi$ 中的記号 + 不是运算号。这个表达式要整个考虑作一个記复数的記号。以后确定复数的加法时, 再仔細考虑这記号。

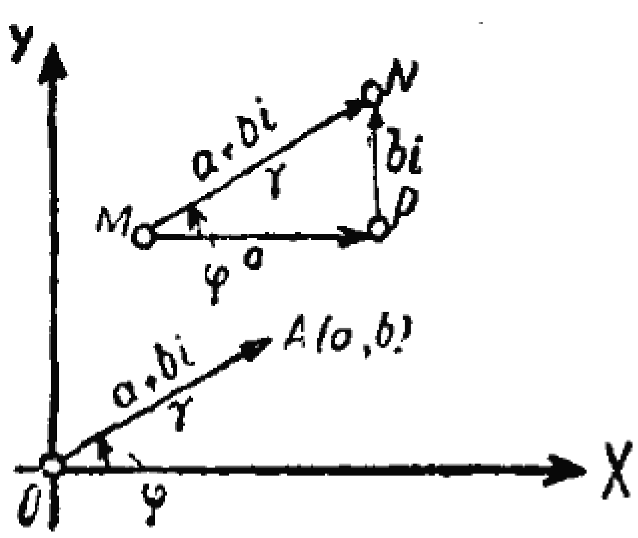


圖 168.

实数 a 与 b 各对应于矢量 $\overline{MN}$ 在两个坐标軸上的投影的大小。

自坐标原点作矢量 $\overline{OA}$ (圖 168), 使長度及方向都与 $\overline{MN}$ 的相同。这矢量的端点 A 的坐标就是 (a, b), 于是我們也可以讓点 A 对应于矢量 $\overline{MN}$ 与 $\overline{OA}$ 所对应的复数 $a+bi$。

所以, 平面上任何一个矢量 (平面上任何一点) 对应于一个确定的复数 $a+bi$。实数 a 与 b 各对应于所考虑的矢量在坐标軸上的投影 (考虑的点的坐标)。

在表达式 $a+bi$ 中, 給 a 与 b 所有可能的实数值, 就得到复数的全体, a 叫做复数的实部, bi 叫做虛部。

特別是平行于 OX 軸的矢量, 所对应的复数与它的实部相同:

$$a+0i=a。 \tag{1}$$

由几何解釋推出两个复数相等的概念。两个矢量, 若長度与方向都相同, 就是在坐标軸上的投影对应相等时, 算作相等; 所以两个复数, 必須且仅須它們的实部与虛部分別相等时, 算作相等; 于是复数相等的条件是:

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i \quad 相当于 \quad a_1=a_2, \ b_1=b_2。 \tag{2}$$

特别是

$$a+bi=0 \text{ 相当于 } a=0,\ b=0。$$

矢量 $\overline{MN}$，除去由在坐标軸上的投影来确定它以外，还可以由另外两个量来确定它，就是它的長度 r 以及它与正向 OX 軸作成的角度 φ（圖 168）。若我們算作复数 $a+bi$ 对应于坐标是$(a,\ b)$的点，則显然 r 与 φ 是这点的極坐标。我們知道，有下面的关系式成立：

$$\left.\begin{aligned} a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi,\\ r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}。\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

正数 r 叫做复数 $a+bi$ 的模，φ 叫做它的輻角。輻角的确定可以差一个 2π 的倍数，因为当矢量 $\overline{MN}$ 繞 M 点向任何一方轉整数圈时，它仍回原位。当 $r=0$ 时，复数等于零，它的輻角不确定。这里两个复数相等的条件就是，它們的模应当相等，而輻角只能差一个 2π 的倍数。

正实数有輻角 $2k\pi$，負实数有輻角$(2k+1)\pi$，其中 k 是任何整数。若一个复数的实部等于零，則这复数是 bi 的形状，叫做虛数。这样的数对应的矢量平行于 OY 軸，于是虛数 bi 的輻角，当 $b>0$ 时，等于$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$；当 $b<0$ 时，等于$\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$。

实数的模与它的絕对值相同。为要記数 $a+bi$ 的模，把这数两边各画一小竪：

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}。$$

以后我們有时用一个字母記复数。若 α 記复数，則它的模記作 $|\alpha|$。应用表达式(3)，a 与 b 可以用模与輻角来表示，于是复数可以記作

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)。$$

这时我們說把复数写成三角式。

171. 复数加减法 几个矢量的和由这些矢量作成的多边形的封閉綫表示。注意这封閉綫的投影等于其余各边投影之和，于是我們引出下面复数加法的定义：

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)+\cdots+(a_n+b_ni)=$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)i。\quad (4)$$

不难看出，复数的和不依賴于各項的先后順序(交換律)，并且各項可以任意組合(結合律)，因为实数 a_k 的和与实数 b_k 的和有这两个性質。

如上所述，复数 $a+0i$ 就是实数 a。同样 $0+bi$ 可以簡写作 bi(虛数)。应用加法定义，我們可以說复数 $a+bi$ 是实数 a 与虛数 bi 的和，就是 $a+bi=(a+0i)+(0+bi)$。

减法是加法的逆运算，就是，差

$$x+yi=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)$$

由条件 $$(x+yi)+(a_2+b_2i)=a_1+b_1i$$

确定，根据(4)与(2)：$x+a_2=a_1$，$y+b_2=b_1$，就是 $x=a_1-a_2$，$y=b_1-b_2$，于是得到：

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i。\quad (5)$$

我們看出，减掉复数 a_2+b_2i，相当于被减数 a_1+b_1i 加上一个复数 $(-a_2-b_2i)$。于是减掉一个矢量时，只要由被减的矢量，加上一个与要减的矢量長度相等方向相反的矢量。

考虑一个矢量 $\overline{A_2A_1}$，起点 A_2 对应于复数 a_2+b_2i，端点 A_1 对应于 a_1+b_1i。显然这个矢量是矢量 $\overline{OA_1}$ 与 $\overline{OA_2}$ 之差(圖 169)，于是它对应于复数：

$$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i,$$

等于它的端点对应的复数与起点对应的复数之差。

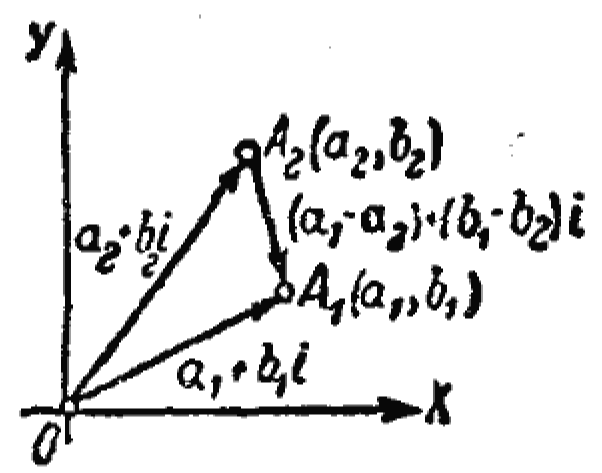


圖 169.

现在看两个复数的和与差的模的性質。注意，复数的模等于它对应的矢量之長，并且三角形的一边小于其

余两边之和，于是得到(圖 170)：

$$|\alpha_1+\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|,$$

其中等号只有在复数 α_1 与 α_2 对应的矢量方向相同时成立，也就是在这两个数的輻角相等或差一个 2π 的倍数时成立。这个性質，在任何有限項和时都成立：

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|,$$

就是，和的模小于或等于各項的模之和，其中等号只有在各項的輻角相等或只差 2π 的倍数时成立。

注意到三角形的一边大于其余两边之差，可以写成：

$$|\alpha_1+\alpha_2|\geqslant|\alpha_1|-|\alpha_2|,$$

就是两項和的模大于或等于这两項的模之差。等号只有在对应的矢量方向相反时成立。

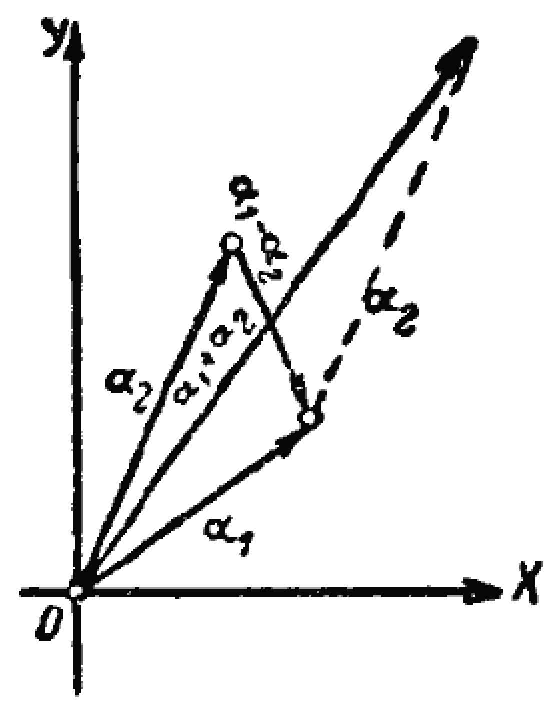


圖 170.

由以上矢量与复数的减法推出，对于两个复数之差的模，像和的模一样，我們有(圖 170)：

$$|\alpha_1|-|\alpha_2|\leqslant|\alpha_1-\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|。$$

172. 复数乘法 两个复数乘积的定义与实数的乘积类似，我們考虑一个数与 1 的乘积，还是这个数。对应于模是 r 輻角是 φ 的复数的矢量可以由單位矢量得来，單位矢量是長度等于 1，方向与正向 OX 軸相同的矢量，它对应于数 1；所述矢量只要把單位矢量的長度 r 倍起来，再在正方向轉一个角度 φ 就得到了。

設有矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$，把上述由單位矢量得出矢量 $\boldsymbol{a}_2$ 的方法作用到 $\boldsymbol{a}_1$ 上，得到的矢量叫做 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 的乘积。

設 (r_1, φ_1) (r_2, φ_2) 各为对应于矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 的复数的模与輻角，則显然它們的乘积对应的复数的模是 r_1r_2，輻角是$(\varphi_1+\varphi_2)$。如此我

們得到下面复数乘积的定义:

两个复数的乘积是一个复数,它的模等于两个因子的模的乘积,幅角等于两个因子的幅角的和。

如此,当复数写成三角式时,就有:

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]。\qquad (6)$$

現在講复数不写成三角式时,求乘积的法則:

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=x+yi。$$

利用上述因子的模与幅角的記法,可以写成:

$$a_1=r_1\cos\varphi_1,\quad b_1=r_1\sin\varphi_1,\quad a_2=r_2\cos\varphi_2,\quad b_2=r_2\sin\varphi_2,$$

依照乘积的定义(6):

$$x=r_1r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2),\quad y=r_1r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$

由此:

$$x=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2-r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2=$$
$$=a_1a_2-b_1b_2,$$
$$y=r_1r_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2+r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2=$$
$$=b_1a_2+a_1b_2,$$

于是最后得到:

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i。\qquad (7)$$

当 $b_1=b_2=0$ 时,两个因子是实数 a_1, a_2,于是乘积就是这两个数的乘积 a_1a_2。

当 $a_1=a_2=0$,而 $b_1=b_2=1$ 时,等式(7)化为:

$$i\cdot i=i^2=-1,$$

就是虛單位的平方等于(−1)。

依次計算 i 的正整数次方冪,得到:

$$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-1,\ \cdots,$$

一般来講，当 k 是任何正整数时：

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i。$$

等式（7）表达的乘法法則，可以写成：复数可以像多項式一样相乘，算作 $i^2=-1$。

若 α 是复数 $a+bi$，則复数 $a-bi$ 叫做 α 的共軛数，常記作 $\bar{\alpha}$。

依照公式（3）：

$$|\alpha|^2=a^2+b^2。$$

由等式（7）推出

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2,$$

于是
$$|\alpha|^2=(a+bi)(a-bi)=\alpha\bar{\alpha},$$

就是共軛复数乘积等于它們中任何一个的模的平方。

还有两个很明显的公式：

$$\alpha+\bar{\alpha}=2a,\quad \alpha-\bar{\alpha}=2bi。\tag{8}$$

由公式（4）与（7）直接推知，复数的加法与乘法适用交換律，就是，和与积不依賴于項的先后次序。不难看出，結合律与分配律也是对的，就是：

$$(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3),\ (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3=\alpha_1(\alpha_2\alpha_3),$$
$$(\alpha_1+\alpha_2)\beta=\alpha_1\beta+\alpha_2\beta。$$

請讀者自己証明。

最后，我們指出，几个因子乘积的模等于各因子的模的乘积，它的輻角等于各因子的輻角的和。如此，复数乘积等于零，必須且仅須至少一个因子等于零。

173. 复数除法　复数除法的定义是乘法的逆运算。如此，若被除数的模与輻角是 $(r_1,\ \varphi_1)$，除数的模与輻角是 $(r_2,\ \varphi_2)$，則不难看出，若除数不是零，除的結果是确定的，商的模是 $\frac{r_1}{r_2}$ 輻角是 $(\varphi_1-\varphi_2)$。把商記作分式的样子，可以写成：

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]。\quad (9)$$

于是，商的模等于被除数与除数的模之商，商的幅角等于被除数与除数的幅角之差。若 $r_2=0$，则公式(9)沒有意义。

若被除数与除数不用三角式，而用 a_1+b_1i, a_2+b_2i，则在公式(9)中要用 a_1, a_2, b_1, b_2，表达模与幅角，得到下面这个商的表达式：

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i,$$

这也可以直接得到，只要把分子分母乘以分母的共軛数，使分母中沒有 i 就成了：

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2},$$

于是：

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i。\quad (10)$$

以上[**172**]我們講过，复数的加法与乘法适用交换律，結合律与分配律。所以，在只取实数时，由这些定律推出的公式与运算的方法，在含有复数时，都是对的，例如：加括号，去括号，化簡公式，指数是整数的牛頓二項式公式，关于等差級数与等比級数的公式等。

还要指出复数具有的一个重要的性質。由公式(4)，(5)，(7)，(10)直接推出：若在和，差，积，商中，所有的数都换成共軛数，則結果也换成共軛数。

例如，在公式(7)中，把 b_1, b_2 换成 $(-b_1)$, $(-b_2)$，得到：

$$(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(b_1a_2+a_1b_2)i。$$

以上所述性質，显然对于任何含有复数加減乘除的表达式都对。

174. 乘方 应用公式(6)，取 n 个相同的因子，就得到复数乘正整数次方的法則：

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \quad (11)$$

就是，复数乘正整数次方时，只要把它的模乘那样多次方，把幅角依方

指数倍起来。

在公式(11)中，讓 $r=1$，得到达慕佛公式：

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi。\tag{12}$$

例 1. 把等式(12)的左边依牛頓二項式公式展开，再讓两边的实部与虚部相等，得到用 $\cos\varphi$ 与 $\sin\varphi$ 的方幂表达 $\cos n\varphi$ 与 $\sin n\varphi$ 的公式①：

$$\begin{aligned}\cos n\varphi=&\cos^n\varphi-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi+\cdots+\\&+(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi+\cdots+\\&+\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\varphi & (n\text{ 是偶数})\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi & (n\text{ 是奇数})；\end{cases}\\\sin n\varphi=&\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\cdots+\\&+(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi+\cdots+\\&+\begin{cases}(-1)^{\frac{n-2}{2}}n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi & (n\text{ 是偶数})\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\varphi & (n\text{ 是奇数})。\end{cases}\end{aligned}\tag{13}$$

若 $n=3$，由公式(12)去掉括号，就有：

$$\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi,$$

由此

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,\quad \sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi。$$

2. 求和：

$$A_n=1+r\cos\varphi+r^2\cos 2\varphi+\cdots+r^{n-1}\cos(n-1)\varphi,$$
$$B_n=r\sin\varphi+r^2\sin 2\varphi+\cdots+r^{n-1}\sin(n-1)\varphi$$

的表达式。

設 $$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

再作复数：

$$\begin{aligned}A_n+B_ni=&1+r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\cdots+\\&+r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi+i\sin(n-1)\varphi]。\end{aligned}$$

---

① 我們用 $\binom{n}{m}$ 記 n 个元素中取 m 个的組合数，就是

$$\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot2\cdots m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}。$$

应用公式(11)与等比級数和的公式:

$$A_n+B_ni=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}=$$

$$=\frac{1-r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}{1-r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{(1-r^n\cos n\varphi)-ir^n\sin n\varphi}{(1-r\cos\varphi)-ir\sin\varphi}。$$

把最后分式的分子分母乘以分母的共軛数 $(1-r\cos\varphi)+ir\sin\varphi$，得到:

$$A_n+B_ni=\frac{[(1-r^n\cos n\varphi)-ir^n\sin n\varphi][(1-r\cos\varphi)+ir\sin\varphi]}{(1-r\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{(1-r^n\cos n\varphi)(1-r\cos\varphi)+r^{n+1}\sin\varphi\sin n\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}+$$

$$+\frac{(1-r^n\cos n\varphi)r\sin\varphi-(1-r\cos\varphi)r^n\sin n\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}i=$$

$$=\frac{r^{n+1}\cos(n-1)\varphi-r^n\cos n\varphi-r\cos\varphi+1}{r^2-2r\cos\varphi+1}+$$

$$+\frac{r^{n+1}\sin(n-1)\varphi-r^n\sin n\varphi+r\sin\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}i。$$

依条件(2)，实部与虚部分别相等，就有:

$$A_n=1+r\cos\varphi+r^2\cos2\varphi+\cdots+r^{n-1}\cos(n-1)\varphi=$$

$$=\frac{r^{n+1}\cos(n-1)\varphi-r^n\cos n\varphi-r\cos\varphi+1}{r^2-2r\cos\varphi+1};$$

$$B_n=r\sin\varphi+r^2\sin2\varphi+\cdots+r^{n-1}\sin(n-1)\varphi=$$

$$=\frac{r^{n+1}\sin(n-1)\varphi-r^n\sin n\varphi+r\sin\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}。$$

算作实数 r 的絕对值小于 1，讓 n 无限增加，取極限，得到无穷級数的和:

$$\left.\begin{aligned}1+r\cos\varphi+r^2\cos2\varphi+\cdots&=\frac{1-r\cos\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1},\\ r\sin\varphi+r^2\sin2\varphi+\cdots&=\frac{r\sin\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}。\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

在 A_n 与 B_n 的表达式中，設 $r=1$，得到:

$$1+\cos\varphi+\cos2\varphi+\cdots+\cos(n-1)\varphi=\frac{\cos(n-1)\varphi-\cos n\varphi-\cos\varphi+1}{2(1-\cos\varphi)}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}。\qquad(15_1)$$

类似的得到：

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\cdots+\sin(n-1)\varphi=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}。\qquad(15_2)$$

175. 开方　一个复数的 n 次根是一个复数，它乘 n 次方等于原来的复数。

如此，等式：

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$$

相当于等式：

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)。$$

由于复数相等时，模应該相等，輻角只能差 2π 的倍数，得到：

$$\rho^n=r,\quad n\psi=\varphi+2k\pi,$$

由此

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n},$$

其中 $\sqrt[n]{r}$ 是这根的算术値，k 是任何整数。如此我們得到：

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\qquad(16)$$

就是，复数开方时，只要把它的模开方，把輻角用方指数除。

在公式(16)中，k 可以取所有的整数，不过可以証明 n 次根只有 n 个不同的値，它們对应于

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ (n-1)。\qquad(17)$$

为要証明这一点，我們注意，对于两个不同的値 $k=k_1$，$k=k_2$，当輻角 $\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}$ 与 $\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}$ 之差不是 2π 的倍数时，代入到公式(16)中的結果不同，若这两个輻角之差是 2π 的倍数，則結果相同。

不过(17)中的两个数之差 (k_1-k_2) 的絕对値小于 n，所以差：

$$\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}-\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}=\frac{k_1-k_2}{n}2\pi$$

不可能是 2π 的倍数，就是(17)中 k 的 n 个値对应于根的 n 个不同的

值。

再設 k_2 是一个整数,不包含在(17)中。我們可以用 n 除,写成

$$k_2 = qn + k_1,$$

其中 q 是一个整数, k_1 是(17)中的一个数,于是

$$\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} + 2\pi q,$$

就是 k_2 对应的根的值与包含在(17)中的 k_1 对应的值相同。所以,复数的 n 次根有 n 个不同的值。

只有当根号下的数等于零时,就是 $r=0$ 时,这个法則才不适用。在这情形下,上述根的所有的值都等于零。

例 1. 确定 $\sqrt[3]{i}$ 的所有的值。i 的模等于 1, 輻角等于 $\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} \quad (k=0,\ 1,\ 2)。$$

我們得到下面 $\sqrt[3]{i}$ 的三个值:

$$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i。$$

2. 考慮 $\sqrt[n]{1}$ 的所有的值,就是二項方程:

$$z^n = 1$$

的所有的解。

1 的模等于 1, 輻角等于零,所以

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)。$$

用 ε 記当 $k=1$ 时这个根的值:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}。$$

依照达慕佛公式:

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

就是方程 $z^n=1$ 所有的根有下面的形状:

$$\varepsilon^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),$$

这里 $\varepsilon^0=1$。

再考虑二项方程：

$$z^n=a。$$

用新未知数 u 替代 z，設

$$z=u\sqrt[n]{a},$$

其中 $\sqrt[n]{a}$ 是 a 的 n 次根的一个値。

代入到所給的方程中，得到 u 的一个方程：

$$u^n=1。$$

由此看出，方程 $z^n=a$ 所有的根可以写成：

$$\sqrt[n]{a}\,\varepsilon^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),$$

其中 $\sqrt[n]{a}$ 是这个根的一个値，ε^k 取 1 的 n 次根的所有的値。

176. 指数函数 以前在实指数 x 的情形下，我們考虑过指数函数 e^x。現在我們推广指数函数的概念到复指数的情形。对于实指数，函数 e^x 可以写成下面的級数[**129**]：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots。$$

在純虛指数的情形，我們用类似的級数作指数函数的定义，就是，設：

$$e^{yi}=1+\frac{yi}{1!}+\frac{(yi)^2}{2!}+\frac{(yi)^3}{3!}+\cdots。$$

分别实部与虛部，就有：

$$e^{yi}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\cdots\right),$$

由此，再回忆 $\cos y$ 与 $\sin y$ 的展开級数[**130**]，就得到：

$$e^{yi}=\cos y+i\sin y。\tag{18}$$

有时这公式用作指数取純虛数时，指数函数的定义。

用 $(-y)$ 替代 y：

$$e^{-yi}=\cos y-i\sin y,\tag{19}$$

由方程(18)与(19)解出 $\cos y$ 与 $\sin y$，就得到尤拉公式，用純虛指数的

指数函数表达三角函数的公式：

$$\cos y=\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2},\ \sin y=\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i}。\tag{20}$$

由公式(18)得出复数的指数公式，設模是 r 輻角是 φ：

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{\varphi i}。$$

对于任何复指数，指数函数用下面的公式作定义：

$$e^{x+yi}=e^{x}\cdot e^{yi}=e^{x}(\cos y+i\sin y),\tag{21}$$

就是 e^{x+yi} 这个数的模算作等于 e^{x}，輻角等于 y。

不难把乘法化为指数相加的法則推广到复指数的情形：

設 $z=x+yi,\ z_1=x_1+y_1i,$

$$e^{z}\cdot e^{z_1}=e^{x}(\cos y+i\sin y)\cdot e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1),$$

应用复数乘法法則[**172**]：

$$e^{z}\cdot e^{z_1}=e^{x+x_1}[\cos(y+y_1)+i\sin(y+y_1)]。$$

这等式右边的表达式，依照定义(21)，可以写成：

$$e^{(x+x_1)+(y+y_1)i}\ \text{就是}\ e^{z+z_1}。$$

除法化为指数相减的法則：

$$\frac{e^{z}}{e^{z_1}}=e^{z-z_1}$$

可以直接由乘以除数的倒数得到。

当 n 是正整数时，我們有：

$$(e^{z})^{n}=e^{z}e^{z}\cdots e^{z}=e^{nz}。$$

应用尤拉公式，可以把任何 $\sin\varphi$ 与 $\cos\varphi$ 的正整数次方幂或这样的方幂的乘积，化为只含倍角的正弦或余弦的一次幂諸項之和：

$$\sin^{m}\varphi=\frac{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^{m}}{2^{m}i^{m}},\quad \cos^{m}\varphi=\frac{(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i})^{m}}{2^{m}}。\tag{22}$$

依牛頓二項式公式展开等式的右边，再依照公式(18)与(19)把指数函数化为三角函数，就得到未知表达式。

例 1.

$$\cos^4\varphi=\frac{(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i})^4}{2^4}=\frac{e^{4\varphi i}}{16}+\frac{4e^{2\varphi i}}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4e^{-2\varphi i}}{16}+\frac{e^{-4\varphi i}}{16}=$$

$$=\frac{1}{8}\,\frac{e^{4\varphi i}+e^{-4\varphi i}}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{e^{2\varphi i}+e^{-2\varphi i}}{2}+\frac{3}{8}=$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi_{\circ}$$

2.

$$\sin^4\varphi\cos^3\varphi=\frac{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^4}{16}\cdot\frac{(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i})^3}{8}=\frac{(e^{2\varphi i}-e^{-2\varphi i})^3(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})}{128}=$$

$$=\frac{(e^{6\varphi i}-3e^{2\varphi i}+3e^{-2\varphi i}-e^{-6\varphi i})\,(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})}{128}=$$

$$=\frac{e^{7\varphi i}-e^{5\varphi i}-3e^{3\varphi i}+3e^{\varphi i}+3e^{-\varphi i}-3e^{-3\varphi i}-e^{-5\varphi i}+e^{-7\varphi i}}{128}=$$

$$=\frac{3}{64}\cos\varphi-\frac{3}{64}\cos 3\varphi-\frac{1}{64}\cos 5\varphi+\frac{1}{64}\cos 7\varphi_{\circ}$$

注意，$\cos\varphi$ 的任何整数次幂与 $\sin\varphi$ 的偶次幂是 φ 的偶函数，就是用 $(-\varphi)$ 替代 φ 时它們不变，这样的偶函数的表达式中只含有倍角的余弦。若是 φ 的奇函数，就是用 $(-\varphi)$ 替代 φ 时函数变号，例如 $\sin\varphi$ 的奇次幂，这样的函数的展开式中只含有倍角的正弦，在这展开式中一定沒有常数项。討論三角級数时，我們再仔細弄清楚这些情况。

177. 三角函数与双曲綫函数 以前我們只考虑过实角的三角函数。对于复角 z，我們依照尤拉公式来定义三角函数：

$$\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i},$$

这里，右边的表达式中，对于复数 z，用[**176**]中确定的意义。

应用这两个公式与指数函数的性質，不难看出，对于复角，下列三角公式的正确性。下列各关系式，請讀者練習証明：

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,$$

$$\sin(z+z_1)=\sin z\cos z_1+\cos z\sin z_1,$$

$$\cos(z+z_1)=\cos z\cos z_1-\sin z\sin z_{1\circ}$$

函数 $\operatorname{tg} z$ 与 $\operatorname{ctg} z$ 用下列公式来定义：

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1},$$

$$\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{e^{zi}-e^{-zi}}=i\frac{e^{2zi}+1}{e^{2zi}-1}。$$

現在講双曲綫函数。

双曲綫正弦与余弦用下列公式来定义：

$$\operatorname{sh} z=\frac{\sin iz}{i}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\cos iz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1},$$

$$\operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}=\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}=\frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}。$$

应用这些公式，不难引出下列的公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1,\\
&\operatorname{sh}(z_1\pm z_2)=\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2\pm\operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,\\
&\operatorname{ch}(z_1\pm z_2)=\operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2\pm\operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2,\\
&\operatorname{sh} 2z=2\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z,\quad \operatorname{ch} 2z=\operatorname{ch}^2 z+\operatorname{sh}^2 z,\\
&\operatorname{th} 2z=\frac{2\operatorname{th} z}{1+\operatorname{th}^2 z},\quad \operatorname{cth} 2z=\frac{1+\operatorname{cth}^2 z}{2\operatorname{cth} z}。
\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

如此引出双曲綫三角的公式，与普通圓三角的公式很类似。只要在普通三角公式中，用 $i\operatorname{sh} z$ 替代 $\sin z$，用 $\operatorname{ch} z$ 替代 $\cos z$，就得到双曲綫三角的公式。这可以由双曲綫函数的定义直接推出。

应用以上所述，不难得到下面双曲綫函数化和为积的公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sh} z_1+\operatorname{sh} z_2=2\operatorname{sh}\frac{z_1+z_2}{2}\operatorname{ch}\frac{z_1-z_2}{2},\\
&\operatorname{sh} z_1-\operatorname{sh} z_2=2\operatorname{sh}\frac{z_1-z_2}{2}\operatorname{ch}\frac{z_1+z_2}{2},\\
&\operatorname{ch} z_1+\operatorname{ch} z_2=2\operatorname{ch}\frac{z_1+z_2}{2}\operatorname{ch}\frac{z_1-z_2}{2},\\
&\operatorname{ch} z_1-\operatorname{ch} z_2=2\operatorname{sh}\frac{z_1+z_2}{2}\operatorname{sh}\frac{z_1-z_2}{2}。
\end{aligned}\right\}\qquad(24)$$

現在我們考慮当变量取实数值时，双曲綫函数：

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},\quad \operatorname{cth} x=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}。$$

函数 $y=\operatorname{ch} x$ 的圖形是悬鏈綫[78]，在[178]中我們再仔細討論它。

圖 171 上表示出 $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ 的圖形。

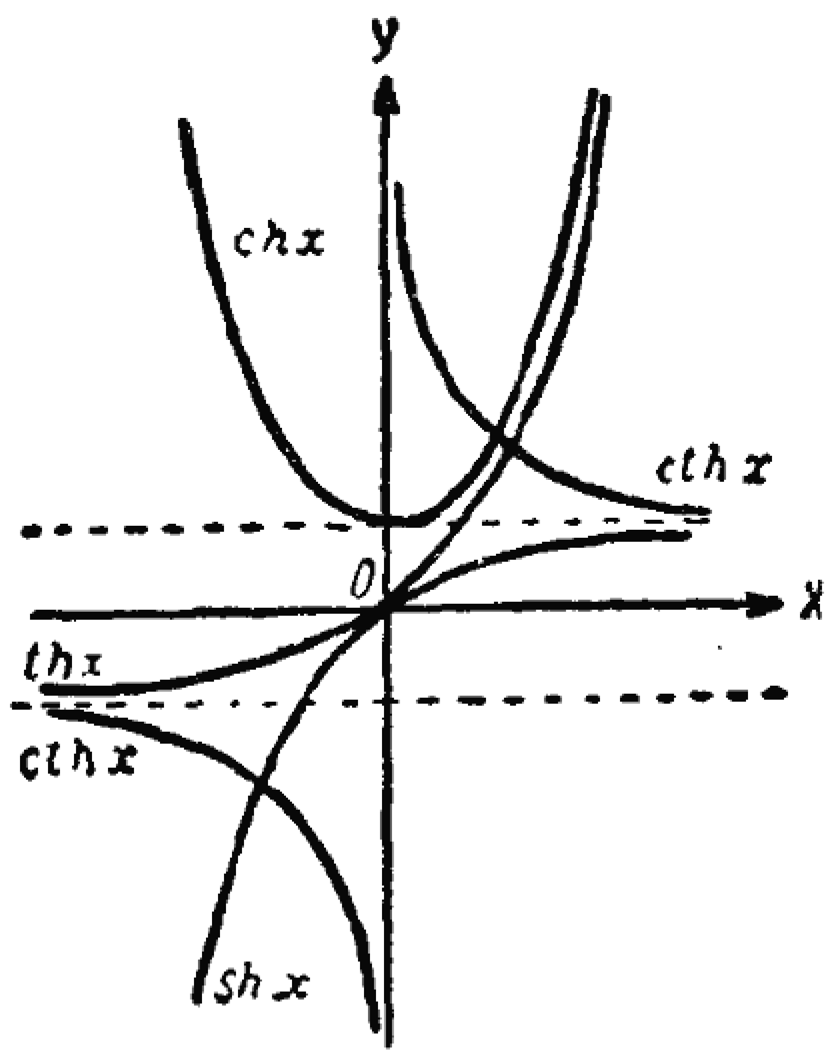


圖 171.

直接求导数，得到下列的表达式：

$$\frac{d\operatorname{sh} x}{dx}=\operatorname{ch} x,\quad \frac{d\operatorname{ch} x}{dx}=\operatorname{sh} x,$$

$$\frac{d\operatorname{th} x}{dx}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\quad \frac{d\operatorname{cth} x}{dx}=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}。$$

由此得到积分表：

$$\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C,$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth} x+C。$$

“双曲綫函数”这个名字是由于，像函数 $\cos t$ 与 $\sin t$ 对于圓

$$x^2+y^2=a^2$$

一样，函数 $\operatorname{ch} t$ 与 $\operatorname{sh} t$ 对于等軸双曲綫：

$$x^2-y^2=a^2$$

的参变量表示法，有同样的作用。

这个圓的参变方程是：

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,$$

而这等軸双曲綫有

$$x=a\operatorname{ch} t,\quad y=a\operatorname{sh} t,$$

这不难由关系式:

$$\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1$$

来肯定。

在圆与双曲綫中，这参变量 t 的几何意义也是一样的。若用 S 記扇形 AOM (圖 172) 的面积，用 S_0 記这圆的全面积，則显然:

$$t=2\pi\frac{S}{S_0}。$$

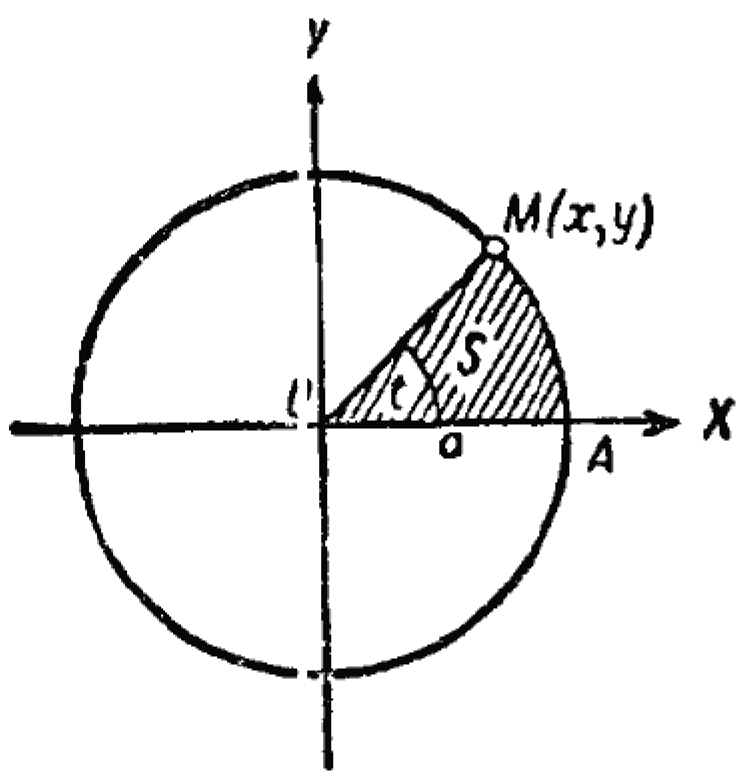


圖 172.

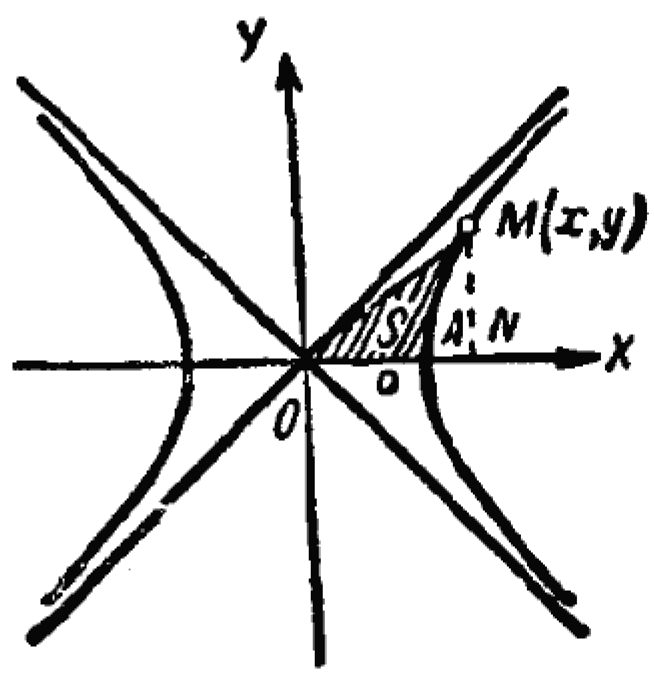


圖 173.

再設用 S 記等軸双曲綫中类似的扇形 (圖 173) 的面积。我們就有:

$$S=\text{面积 } OMN-\text{面积 } AMN=\frac{1}{2}xy-\int_a^x y\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}\,dx。$$

依[92]中公式計算积分，求出:

$$S=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]_a^x=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)。$$

若仍用 S_0 記圓面积，設

$$t=2\pi\frac{S}{S_0}=\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right),$$

則不難求出：

$$e^t=\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1},$$

$$e^{-t}=\frac{1}{\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}=\frac{x}{a}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1},$$

由此，相加再乘以 $\frac{a}{2}$：

$$x=\frac{a}{2}(e^t+e^{-t})=a\operatorname{ch}t,$$

$$y=\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\operatorname{ch}^2t-a^2}=a\operatorname{sh}t,$$

于是我們得到等軸双曲綫的参变方程。

178. 悬鏈綫 討論一条密度均匀的鏈子，两端各悬在点 A_1 与 A_2 时所作成的曲綫(圖 174)。

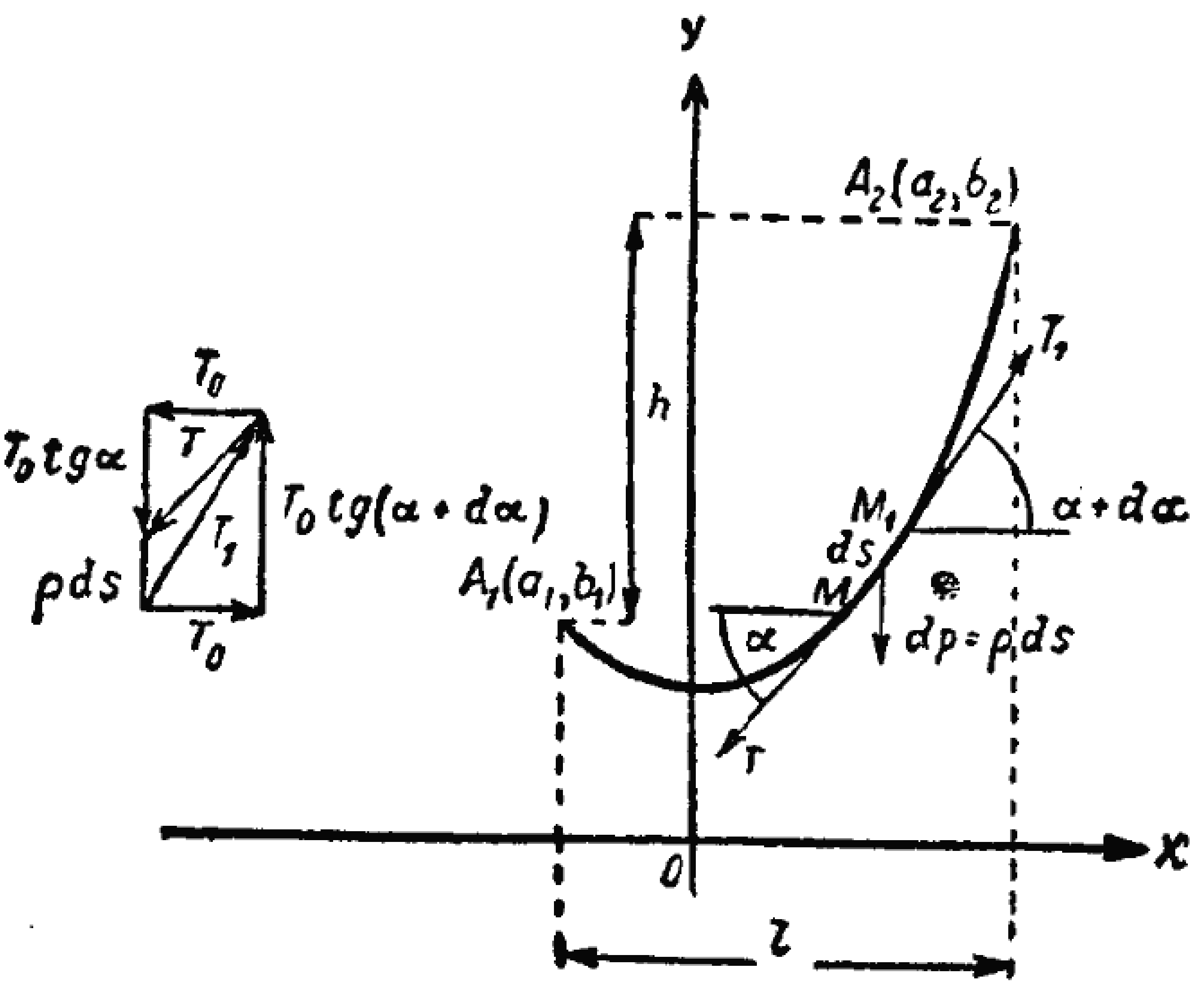


圖 174.

在这曲綫所在的平面上，作出水平的 OX 軸与鉛直向上的 OY 軸。考慮这鏈子的一小段 $MM_1=ds$。由于这小段的重量以及鏈子的其余部分的关系，在这一段上受張力 T 与 T_1 的作用。这些張力沿切綫方向作用在这小段的两端 M 与 M_1（T 沿切綫的負向，T_1 沿切綫的正向）。重量与这一段的長成正比：

$$dp=\rho\, ds,$$

其中 ρ 是这鏈子的綫密度（單位長的重量）。

为要平衡，必須且仅須，这小段上的作用力在水平与鉛直方向的分力和都等于零。因为这小段 ds 的重力是鉛直的，它的水平分力等于零，所以 T 与 T_1 的水平分力应当大小相等方向相反。用 T_0 記它們的水平分力的大小。

由圖我們得到各鉛直分力的表达式：

$$-T_0\operatorname{tg}\alpha=-T_0y',\quad T_0\operatorname{tg}(\alpha+d\alpha)=T_0(y'+dy')。$$

这里 $d\alpha$ 是，当由点 M 改变到点 M_1 时，切綫与 OX 軸所作角度 α 的改变量，dy' 是对应的切綫斜率的改变量。

讓 T 与 T_1 的鉛直分力与重力 $\rho\, ds$ 之和等于零，得到：

$$T_0(y'+dy')-T_0y'-\rho\, ds=0,$$

就是

$$T_0\, dy'=\rho\, ds,$$

可以写成：

$$T_0\, dy'=\rho\sqrt{1+y'^2}\,dx。\tag{25}$$

应用分离变量法[93]：

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{dx}{k},\quad 其中\ k=\frac{T_0}{\rho};$$

注意，k 是一个常量，与張力的水平分力成正比，与鏈子的綫密度成反比。

求积分，得到方程：

$$\lg(y'+\sqrt{1+y'^2})=\frac{x+C_1}{k},$$

由此

$$e^{\frac{x+C_1}{k}}=y'+\sqrt{1+y'^2};$$

为要确定 y'，用这等式两边除一：

$$e^{-\frac{x+C_1}{k}}=\frac{1}{y'+\sqrt{1+y'^2}}=\sqrt{1+y'^2}-y'。$$

由这两个等式逐項相减，求出：

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+C_1}{k}}-e^{-\frac{x+C_1}{k}}\right)。$$

再积分一次，得到未知曲綫的方程：

$$y+C_2=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x+C_1}{k}}+e^{-\frac{x+C_1}{k}}\right)。\tag{26}$$

任意常量 C_1 与 C_2 由曲綫經过点 $A_1(a_1, b_1)$ 与 $A_2(a_2, b_2)$ 这个条件确定。不过，在应用上，最大的兴趣不在于这曲綫的方程，就是不在于常量 C_1 与 C_2。而在于点 A_1，A_2 的水平距离，鉛直距离与弧 A_1A_2 之長的关系。

討論这三个量的关系时，我們可以平行移动坐标軸。取点 $(-C_1, -C_2)$ 作原点，就可以算作方程(26)中 $C_1=C_2=0$，于是这方程化为最簡單的形状：

$$y=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)=k\operatorname{ch}\frac{x}{k},\tag{26$_1$}$$

由此显見，这曲綫是悬鏈綫。

設如上所述，选定坐标軸后，A_1 的坐标是 (a_1, b_1)，A_2 的坐标是 (a_2, b_2)。用 l，h，s 各記 A_1，A_2 間的水平距离，鉛直距离与弧長，就有：

$$l=a_2-a_1,\quad h=b_2-b_1=k\left(\operatorname{ch}\frac{a_2}{k}-\operatorname{ch}\frac{a_1}{k}\right),$$

$$s=\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{k}}\,dx=\int_{a_1}^{a_2}\operatorname{ch}\frac{x}{k}\,dx=k\left(\operatorname{sh}\frac{a_2}{k}-\operatorname{sh}\frac{a_1}{k}\right)。$$

依公式(24)求得：

$$h=2k\operatorname{sh}\frac{a_2+a_1}{2k}\operatorname{sh}\frac{a_2-a_1}{2k}=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\operatorname{sh}\frac{a_2+a_1}{2k},$$

$$s=2k\operatorname{sh}\frac{a_2-a_1}{2k}\operatorname{ch}\frac{a_2+a_1}{2k}=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\operatorname{ch}\frac{a_2+a_1}{2k},$$

由此，根据(23)中第一个公式：

$$s^2-h^2=4k^2\operatorname{sh}^2\frac{l}{2k},$$

于是得到 l，h 与 s 的关系。

这关系式可以写成下面的公式：

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{l}{2k}}{\frac{l}{2k}}=\frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}。\tag{27}$$

若給定悬点与鏈長，則量 l，h 与 s 已知，于是可以由方程(27)确定 k；若綫密度 ρ 也已知，就可以求出張力的水平分力 T_0。

为写起来簡短起見，設：

$$\frac{l}{2k}=\xi,\quad \frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}=c。$$

方程(27)就可以写成：

$$\frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi}=c。\tag{27_1}$$

回忆指数函数展成的級数[129]，得到：

$$\frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi}=\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2\xi}=1+\frac{\xi^2}{3!}+\frac{\xi^4}{5!}+\frac{\xi^6}{7!}+\cdots,$$

由此看出，当 ξ 由 0 增加到 $+\infty$ 时，$\frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi}$ 也保持由 1 增加到 $+\infty$。所以，当任意給定一个值 $c\geqslant1$ 时，应用双曲綫函数表① 可以算出方程 (27_1) 的一个正根。給定的量 l, h 与 s 应当滿足下面这条件：

$$c=\frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}\geqslant1\quad 或\quad s^2\geqslant h^2+l^2,$$

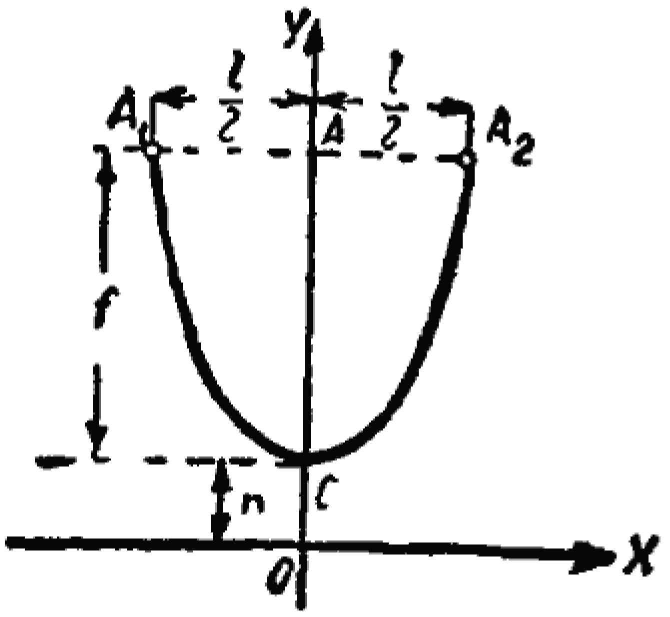


圖 175.

这由几何方面很容易看到，因为 $\sqrt{h^2+l^2}$ 是弦 A_1A_2 之長，而 s 是这两点間悬鏈綫的弧長。

例如，設

$$s=100\text{m},\qquad l=50\text{m},$$
$$h=20\text{ m},\qquad \rho=20\text{ kg/m},$$

我們得到：

$$c=0.02\sqrt{10000-400}=0.8\sqrt{6}=1.96,$$

由表求出方程 (27_1) 的根：

$$\xi=\frac{l}{2k}=2.15,$$

因此

$$T_0=k\rho=\frac{l}{2\xi}\rho=\frac{50}{2\times2.15}\times20=232\text{ kg}。$$

設两个悬点一样高，討論鏈子下垂的距离 f（圖 175）：

$$f=\overline{OA}-\overline{OC}=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{l}{2k}}+e^{-\frac{l}{2k}}\right)-k=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{l}{2k}}+e^{-\frac{l}{2k}}-2\right)。$$

把指数函数展成級数，得到：

$$f=\frac{1}{2!}\frac{l^2}{2^2\cdot k}+\frac{1}{4!}\frac{l^4}{2^4\cdot k^3}+\cdots。\tag{28}$$

同样，对于 $s=\overset{\frown}{A_1A_2}$，我們有[公式(27) $h=0$]：

$$s=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}=k\left(e^{\frac{l}{2k}}-e^{-\frac{l}{2k}}\right)=l+\frac{1}{3!}\frac{l^3}{2^2\cdot k^2}+\frac{1}{5!}\frac{l^5}{2^4\cdot k^4}+\cdots。\tag{29}$$

在級数(28)中只取一項，得到 k 的近似值：

① 例如，楊克与恩治表。

$$k\approx\frac{l^2}{8f}。$$

在(29)中取前两项，再代入这个 k 的表达式：

$$s\approx l+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l}。$$

求微分，得到鏈長的改变量与下垂距离的改变量之間的关系：

$$ds\approx\frac{16}{3}\frac{f\,df}{l}\quad 或\quad df\approx\frac{3l}{16f}ds。$$

我們得到方程 (25) 时，設在鏈的任何一段上作用的重力与这一段的長度成正比。有时，例如悬桥的鏈子，这个重力就不与这一段的長度成正比，而与这一段在水平軸上的投影長成正比。当桥板的負載与鏈重比較起来足够大时是这样的。在这情形下，替代方程 (25)，我們有：

$$T_0\,dy'=\rho\,dx,$$

由此
$$y'=\frac{\rho}{T_0}x+C_1,$$

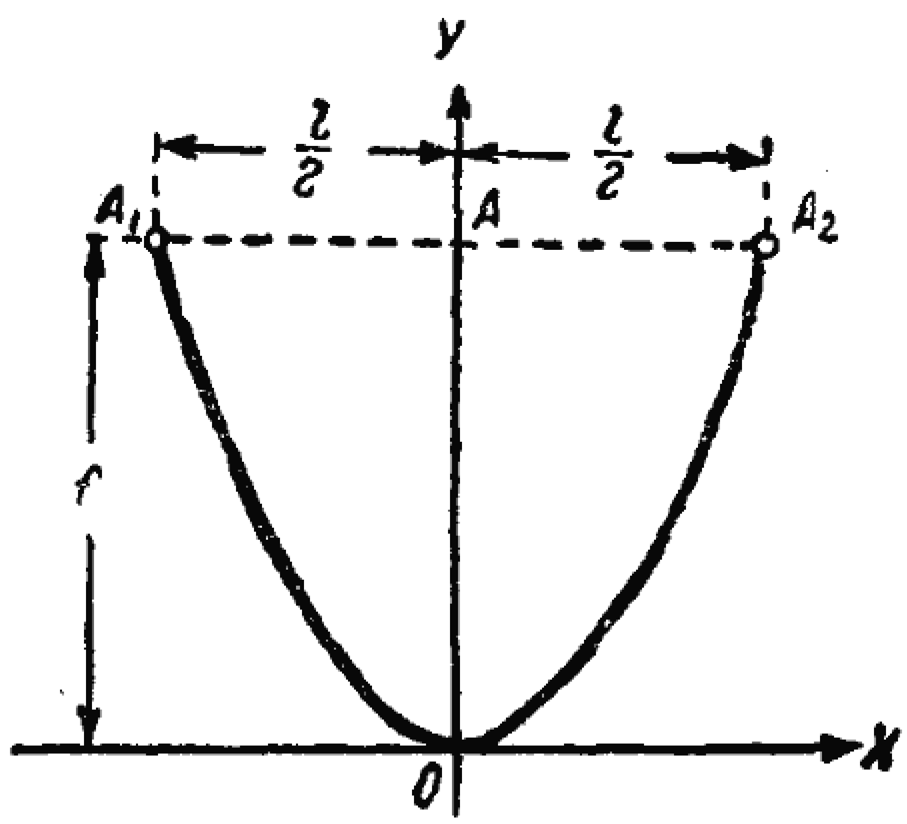


圖 176.

于是
$$y=\frac{\rho}{2T_0}x^2+C_1x+C_2,$$

就是这曲綫是拋物綫。

設悬点 A_1 与 A_2 等高，而这拋物綫的頂点是坐标原点(圖 176)，于是它的方程是：

$$y=\alpha x^2\quad\left(\alpha=\frac{\rho}{2T_0}\right)。$$

像上面一样，我們确定 $l=\overline{A_1A_2}$ 与 $f=OA$。

由拋物綫的方程得到：

$$f=\alpha\frac{l^2}{4},$$

由此
$$\alpha=\frac{4f}{l^2}。$$

再算弧 A_1A_2 的長度，它等于弧 OA_2 長度的二倍：

$$s=2\int_0^{\frac{l}{2}}\sqrt{1+4\alpha^2x^2}\,dx。$$

由牛頓二項式公式就有：

$$\sqrt{1+4\alpha^2x^2}=(1+4\alpha^2x^2)^{\frac{1}{2}}=1+2\alpha^2x^2-2\alpha^4x^4+\cdots,$$

再求积分，就得到 s 的展开式：

$$s=l+\frac{1}{6}\alpha^2l^3-\frac{1}{40}\alpha^4l^5+\cdots。$$

代入上面求出的 α 的表达式：

$$s=l+\frac{8}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2l-\frac{32}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4l+\cdots=l\left[1+\frac{8}{5}\varepsilon^2-\frac{32}{5}\varepsilon^4+\cdots\right],$$

其中 $\varepsilon=\frac{f}{l}$。只取这展开式的前两項，得到近似公式：

$$s\approx l+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l},$$

与对于悬鏈綫的公式相同。

179. 对数 若 e 的某一个复数冪等于复数 $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，則这个指数叫做这个数的自然对数。我們用記号 Log 記这自然对数，可以說，等式

$$\mathrm{Log}[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]=x+yi$$

相当于

$$e^{x+yi}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)。$$

后面这等式可以写成：

$$e^x(\cos y+i\sin y)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

由此，比較模与輻角，得到：

$$e^x=r,\ y=\varphi+2k\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

就是

$$x=\log r\ \text{而}\ x+yi=\log r+(\varphi+2k\pi)i,$$

于是

$$\mathrm{Log}[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]=\log r+(\varphi+2k\pi)i, \tag{30}$$

就是，一个复数的自然对数，等于一个复数，它的实部是模的普通对数，而虛部是 i 与輻角的一个值之乘积。

如此，我們看出，任何数的自然对数有无穷多个值。有問題的只是零：它沒有对数。若我們限制輻角要适合不等式：

$$-\pi<\varphi\leqslant\pi,$$

則这样得到的値叫做对数的主値。为区别对数的主値与由公式(30)所給的一般値起見，我們用 log 記主値，所以

$$\log[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]=\log r+\varphi i, \tag{31}$$

其中 $-\pi<\varphi\leqslant\pi$。

利用对数可以确定任何复数的复冪。若 u 与 v 是复数，而 $u\neq 0$，則

$$u^v=e^{v\operatorname{Log}u}。$$

注意 $\operatorname{Log}u$，所以一般来講，u^v 有无穷多个値。

例 1. i 的模等于 1，軸角等于 $\frac{\pi}{2}$，所以

$$\operatorname{Log}i=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)。$$

2. 确定 i^i:

$$i^i=e^{i\operatorname{Log}i}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)。$$

180. 正弦量与矢量圖　应用复数于諧和振动的討論。考慮交变电流，在每一瞬时全綫路的电流强度同为 j，由公式

$$j=j_m\sin(\omega t+\varphi) \tag{32}$$

确定，其中 t 表时間，j_m，ω 与 φ 都是常量。

我們算作常量 j_m 是正的，它叫做振幅；常量 ω 叫做角頻率，与周期 T 有关系式

$$T=\frac{2\pi}{\omega},$$

常量 φ 叫做变动电流的相。

强度由公式(32)确定的电流叫做正弦的。上述这些名辞也同样用于电压：

$$v=v_m\sin(\omega t+\varphi), \tag{33}$$

以下我們考慮，由公式(32)与(33)确定的，依正弦律变动的电流与电压。

同頻率的正弦量有簡單的几何表示。在平面上过某一点 O 引一条半綫，以角速度 ω 沿順时針方向旋轉，这个半綫叫做时軸。

設当 $t=0$ 时，起始的正向时軸，与 OX 軸重合。

作矢量 OA（圖 177），長 j_m，与起始的正向时軸作成角度 φ（注意讀角度时逆时針方向算作正方向），在时刻 t，矢量 $\overline{OA}$ 与时軸作成的角度是 $\omega t+\varphi$，因为时軸轉了角度 ωt，矢量 $\overline{OA}$ 在时軸的垂直方向$\left(逆时針轉角度\frac{\pi}{2}\right)$的投影，就是由矢量

$\overline{OA}$ 的端点到时軸的垂綫長(帶有适当的符号)給出量 $j=j_m\sin(\omega t+\varphi)$。

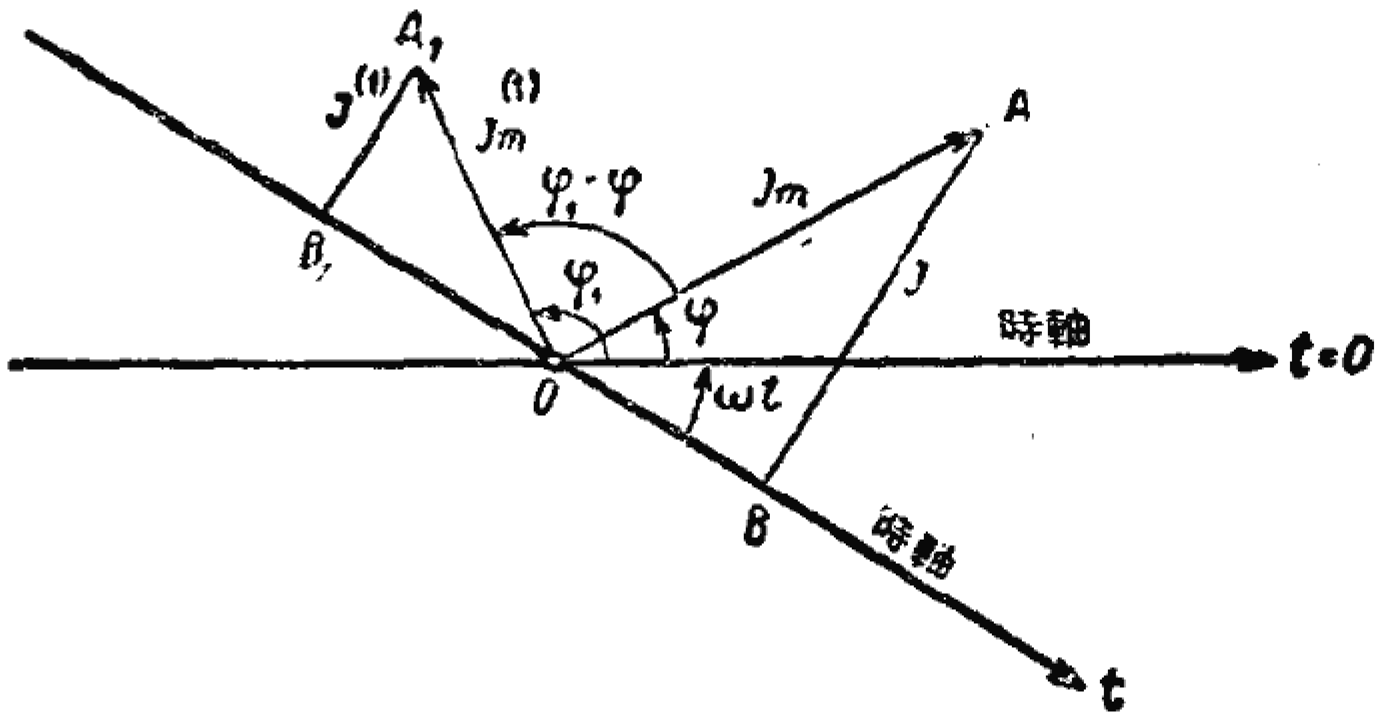


圖 177.

表示同周期的另一个正弦量

$$j^{(1)}=j_m^{(1)}\sin(\omega t+\varphi_1)$$

时,須要作長为 $j_m^{(1)}$ 的矢量,与矢量 $\overline{OA}$ 交成角度

$$\psi=\varphi_1-\varphi。$$

如此,利用平面上的固定矢量,可以表示同周期的正弦量。任何一个矢量之長表示对应的正弦量的振幅,两个矢量的夹角表示对应的正弦量的相的差。如上所述,作出的矢量叫做同周期正弦量系的矢量圖。

依照封閉綫投影定理,矢量圖上几个矢量的几何的和,对应于一个同周期的正弦量,等于这些矢量所对应的正弦量的和。

应用[**172**]中乘法定义,在矢量圖上可以作出各种运算。

以下我們用同样的粗体字母記矢量。

矢量 $\boldsymbol{j}$ 乘以复数 $re^{\varphi i}$ 算作等于一个矢量,它可以把矢量 $\boldsymbol{j}$ 的長度 r 倍起来再轉角度 φ 得到,就是乘积 $re^{\varphi i}\boldsymbol{j}$ 可以依照[**172**]所述复数乘法法則,由矢量 $\boldsymbol{j}$ 乘以 $re^{\varphi i}$ 得到。

若复数 $re^{\varphi i}$ 写成 $(a+bi)$ 的形状,則这乘积可以写成两項和:

$$(a+bi)\boldsymbol{j}=a\boldsymbol{j}+bi\boldsymbol{j},$$

其中第一項是一个平行于矢量 $\boldsymbol{j}$ 的矢量,第二項是一个垂直于矢量 $\boldsymbol{j}$ 的矢量。

任何一个矢量 $\boldsymbol{j}_1$,可以依两个互相垂直的方向分解,写成下面的样子:

$$\boldsymbol{j}_1=a\boldsymbol{j}+bi\boldsymbol{j}=(a+bi)\boldsymbol{j}。$$

这时,$|a+bi|$ 等于矢量 $\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{j}_1$ 的長度比,$(a+bi)$ 的輻角表示矢量 $\boldsymbol{j}_1$ 与 $\boldsymbol{j}$ 的夹角。这个角等于矢量 $\boldsymbol{j}_1$ 与 $\boldsymbol{j}$ 对应的正弦量的相的差。

我們介紹正弦量(32)的平方中值的概念，用記号 $M(j^2)$ 記它。它的定义是：

$$M(j^2)=\frac{1}{T}\int_0^T j^2\,dt。$$

求表达式

$$j^2=j_m^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}j_m^2-\frac{1}{2}j_m^2\cos 2(\omega t+\varphi),$$

由 0 到 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 的积分，得到：

$$M(j^2)=\frac{1}{2}j_m^2-\left[\frac{1}{4\omega}j_m^2\sin 2(\omega t+\varphi)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{1}{2}j_m^2。$$

这平方中值的平方根叫做正弦量的有效值或实际值：

$$j_{eff}=\sqrt{M(j^2)}=\frac{j_m}{\sqrt{2}}。$$

在实用上，作矢量圖时，常用的矢量，長度不等于振幅，而等于量的有效值；就是，与以上所作的矢量長度比为 $1:\sqrt{2}$。

由公式(32)求导数，得到：

$$\frac{dj}{dt}=\omega j_m\cos(\omega t+\varphi)=\omega j_m\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right),$$

就是导数 $\frac{dj}{dt}$ 与 j 的区别只是振幅乘了 ω 而相增加 $\frac{\pi}{2}$。

用矢量表示这关系，可以写成：

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\omega i\,\boldsymbol{j}。\tag{34}$$

由公式(32)求积分，若要仍得到同周期的正弦量，就不須要任意常量，于是有

$$\int j\,dt=-\frac{1}{\omega}j_m\cos(\omega t+\varphi)=\frac{1}{\omega}j_m\sin\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right),$$

由此推出①：

$$\int\boldsymbol{j}\,dt=\frac{1}{\omega i}\boldsymbol{j}。\tag{35}$$

181. 例 1. 考慮串連有电阻 R，自感 L，电容 C 的电路。用 v 記电压，j 記电流强度，由物理学知道，有关系式：

$$v=Rj+L\frac{dj}{dt}+\frac{1}{C}\int j\,dt。$$

我們只限于考慮稳定状态的电流，并且这时电压与电流强度是同周期的正弦量。下面这方程可以写成矢量式，用电压矢量 $\boldsymbol{v}$ 与电流强度矢量 $\boldsymbol{j}$ 替代 v 与 j：

① $\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}$ 記对应于正弦量 $\frac{dj}{dt}$ 的矢量，$\int\boldsymbol{j}\,dt$ 記对应于 $\int j\,dt$ 的矢量。

$$\boldsymbol{v}=R\boldsymbol{j}+L\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+\frac{1}{C}\int\boldsymbol{j}\,dt。$$

回忆公式(34)与(35)，由此求出：

$$\boldsymbol{v}=R\boldsymbol{j}+\omega Li\,\boldsymbol{j}+\frac{1}{\omega Ci}\boldsymbol{j}=(R+ui)\,\boldsymbol{j}=\zeta\boldsymbol{j},\tag{36}$$

其中

$$u=\omega L-\frac{1}{\omega C},\quad \zeta=R+ui。\tag{37}$$

这里得到的电压与电流强度的关系有普通欧姆定律的形状，只是欧姆电阻的地位换成一个复因子 ζ，它叫做这綫路的像似电阻，由三項电阻和作成：欧姆电阻 (R)，由自感生的电阻 (ωLi)，由电容生的电阻 $\frac{1}{\omega Ci}$。

由公式(36)，矢量 $\boldsymbol{v}$ 依 $\boldsymbol{j}$ 与垂直 $\boldsymbol{j}$ 的方向分为两个分矢量 $R\boldsymbol{j}$ 与 $ui\boldsymbol{j}$。前者叫做瓦特的电压，后者叫做无瓦特的电压。这两个名詞很明显，我們計算这个綫路的平均功率 W，就是全周期的瞬时功率 vj 的算术中値：

$$W=\frac{1}{T}\int_0^T vj\,dt=\frac{v_m j_m}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi_1)\sin(\omega t+\varphi_2)\,dt,$$

其中 φ_1 記电压的相，φ_2 記电流强度的相，这里

$$v=v_m\sin(\omega t+\varphi_1),\quad j=j_m\sin(\omega t+\varphi_2)。$$

不难求出：

$$W=\frac{v_m j_m}{2T}\int_0^T[\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\cos(2\omega t+\varphi_1+\varphi_2)]dt=$$

$$=\frac{v_m j_m}{2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)=v_{eff}j_{eff}\cos(\varphi_1-\varphi_2)。\tag{38}$$

如此，当电压与电流强度的相相同或差 π 时，平均功率的絕对值最大；当相差 $\frac{\pi}{2}$ 时，平均功率的絕对值最小而等于零。

注意 W 的这个表达式，$\boldsymbol{v}$ 的无瓦特电压 $ui\boldsymbol{j}$ 消耗的平均功率等于零，因为矢量 $ui\boldsymbol{j}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{j}$。于是所有变为焦耳热的平均功率只是由瓦特的（作功的）电压得来的。

关系式(36)可以写成：

$$\boldsymbol{j}=\frac{1}{\zeta}\boldsymbol{v}=\eta\boldsymbol{v},$$

其中

$$\eta=\frac{1}{R+ui}=g+hi,$$

或

$$\boldsymbol{j}=g\boldsymbol{v}+hi\,\boldsymbol{v}。$$

复因子 η 叫做綫路的像似电导，它等于像似电阻的倒数。由这个公式电流矢量分解为瓦特的与无瓦特的分矢量(沿 v 的方向与垂直 v 的方向)。

2. 在有恒定电流的复杂綫路中，串連或幷連有电阻时，計算电阻的基本法則是由欧姆定律与柯希霍夫定律得来的；在稳定变动的正弦电流綫路中，若只限于电压与电流强度的瞬时値，利用对应的矢量，可以計算欧姆像似电阻。

若綫路中有串連的像似电阻

$$\zeta_1 = R_1 + x_1 i,\quad \zeta_2 = R_2 + x_2 i,\cdots,$$

則电压矢量与电流矢量有关系式：

$$v = \zeta' j,\ \text{其中}\ \zeta' = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots, \tag{39}$$

就是串連时所含的像似电阻相加。

反之，若电阻幷連，則有关系式：

$$v = \zeta'' j,\ \text{其中}\ \frac{1}{\zeta''} = \frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2} + \cdots, \tag{40}$$

就是幷連时所含的像似电导相加。

当串連时，这个像似电阻，可以由所含的像似电阻 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$，用圖作出，只要作出表示这些复数的矢量的几何的和就成了。

我們講幷連两个像似电阻时的作法。依上述法則有

$$\zeta'' = \frac{1}{\dfrac{1}{\zeta_1} + \dfrac{1}{\zeta_2}} = \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}。$$

設

$$\zeta'' = \rho e^{\theta i},\quad \zeta_1 = \rho_1 e^{\theta_1 i},\quad \zeta_2 = \rho_2 e^{\theta_2 i},\quad \zeta_1 + \zeta_2 = \rho_0 e^{\theta_0 i},$$

我們就有：

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0},\quad \theta = \theta_1 + \theta_2 - \theta_0。$$

由此引出下面的几何作法(圖 178)①，先求出和 $\zeta_1 + \zeta_2 = \overline{OC}$；作 $\triangle AOD$ 相似

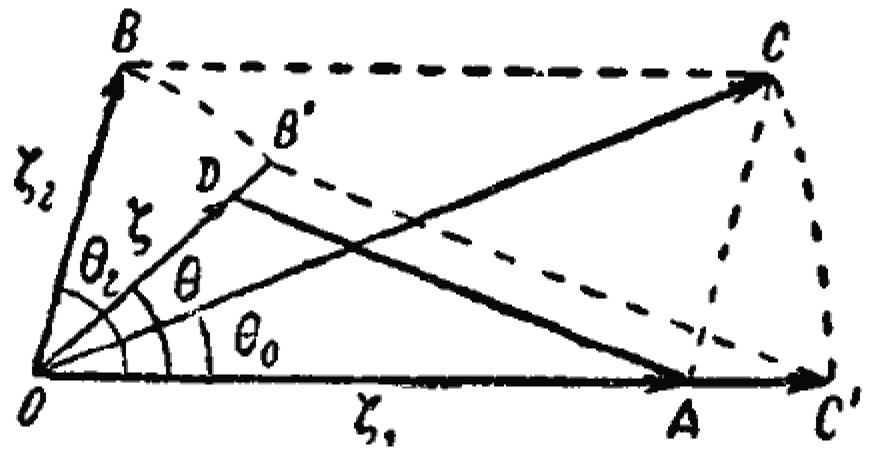


圖 178.

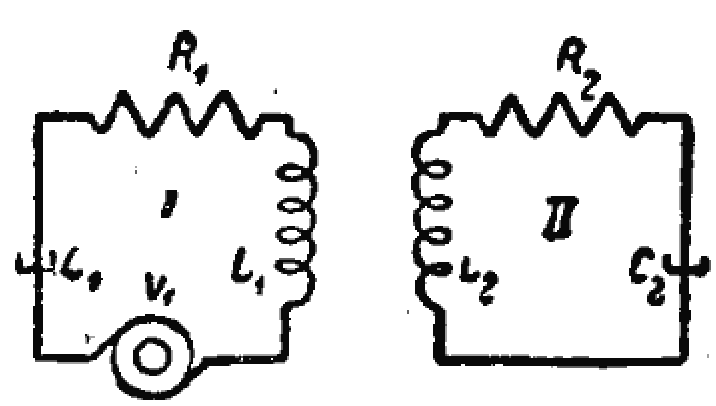


圖 179.

---

① 圖上为簡單起見，OX 軸的方向与矢量 ζ_1 相同，就是設 $\theta_1 = 0$。在一般情形下，只要把 OX 軸依逆时針方向轉角度 θ_1 就成。

于 $\triangle COB$，只要把 $\triangle COB$ 轉到 $C'OB'$ 再引直綫 $\overline{AD} \parallel \overline{C'B'}$。

由相似三角形求得：

$$\overline{OD}=\overline{OA}\,\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}, \text{ 就是 } \rho=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_0},$$
$$\theta=\theta_2-\theta_0 \quad (\theta_1=0),$$

于是証完。

3. 考虑在磁性耦合下的两个綫路的振动(圖 179)。設 v_1, j_1 各記綫路 I 的外电动势与电流强度，j_2 記綫路 II 的电流强度（綫路 II 无外电动势）；R_1, R_2, L_1, L_2, C_1, C_2，各記两个綫路的电阻，自感系数与电容，M 記綫路 I 与 II 的互感系数。

我們有关系式：

$$v_1=R_1j_1+L_1\frac{dj_1}{dt}+M\frac{dj_2}{dt}+\frac{1}{C_1}\int j_1\,dt,$$
$$0=R_2j_2+L_2\frac{dj_2}{dt}+M\frac{dj_1}{dt}+\frac{1}{C_2}\int j_2\,dt。$$

若考虑稳定状态，电压与电流强度依同频率正弦律改变，則这两个方程可以写成矢量式：

$$\boldsymbol{v}_1=\left(R_1+\omega L_1 i+\frac{1}{\omega C_1 i}\right)\boldsymbol{j}_1+\omega M i\boldsymbol{j}_2=\zeta_1\boldsymbol{j}_1+\omega M i\boldsymbol{j}_2,$$
$$0=\omega M i\boldsymbol{j}_1+\left(R_2+\omega L_2 i+\frac{1}{\omega C_2 i}\right)\boldsymbol{j}_2=\omega M i\boldsymbol{j}_1+\zeta_2\boldsymbol{j}_2,$$

其中 ζ_1 与 ζ_2 分别为不考虑綫路的耦合时沿綫路 I 与綫路 II 計算的像似电阻。

解 $\boldsymbol{j}_1$ 与 $\boldsymbol{j}_2$，不难得到：

$$\boldsymbol{j}_1=\frac{\zeta_2}{\zeta_1\zeta_2+\omega^2M^2}\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{j}_2=-\frac{\omega M i}{\zeta_1\zeta_2+\omega^2M^2}\boldsymbol{v}_1。$$

于是前一个方程可以写成：

$$\boldsymbol{v}_1=\left(\zeta_1+\frac{\omega^2M^2}{\zeta_2}\right)\boldsymbol{j}_1,$$

我們可以說，有綫路 II 时，綫路 I 的像似电阻要加一項 $\frac{\omega^2M^2}{\zeta_2}$。

182. 曲綫的复数式 若用 OX 軸上的点表示实数，則实变量的改变对应于 OX 軸上点的移动。类似的，复变量 $\zeta=x+yi$ 的改变对应于平面 XOY 上点的移动。

特別有兴趣的是变量 ζ 改变时画成一条曲綫的情形；这时实部与虛部，就是坐标 x 与 y，各为某一参变量 u 的函数，这个参变量我們算作是实的。

$$x=\varphi_1(u),\quad y=\varphi_2(u)。\tag{41}$$

我們可以簡写成：

$$\zeta=f(u),\quad 其中\ f(u)=\varphi_1(u)+i\varphi_2(u),$$

这个方程叫做所考慮的曲綫(41)的复数式方程。

方程(41)給出所考慮的曲綫在直角坐标的参变量表示法。若把变量 ζ 写成指数式，我們就得到它的極坐标表示法：

$$\zeta=\rho e^{\theta i},\quad \rho=\psi_1(u),\quad \theta=\psi_2(u)。$$

在这个表达式中，因子 ρ 就是 $|\zeta|$；因子 $e^{\theta i}$——当 ζ 是实数时($\theta=0$ 或 π)就是"符号"(± 1)——是長度等于 1 的矢量，記作

$$\operatorname{Sgn}\zeta=e^{\theta i}=\frac{\zeta}{|\zeta|}$$

(拉丁字"Signum"——符号——的縮写)。

由矢量圖引起考慮曲綫的复数式方程的必要，若在关系式

$$\boldsymbol{v}=\zeta\boldsymbol{j}$$

中算作电流矢量 $\boldsymbol{j}$ 保持恒定，但是我們可以任意改变綫路，則要改变像似电阻 ζ 与矢量 $\boldsymbol{v}$，矢量 $\boldsymbol{v}$ 的端点画出的曲綫叫做电压圖，作出电压圖就可以得到矢量 $\boldsymbol{v}$ 的改变情形。点 ζ 也画成一条曲綫(电阻圖)，只是尺度与电压圖不同(用矢量 $\boldsymbol{j}$ 作單位)。

我們考慮几个簡單曲綫的方程。

1．过定点 $\zeta_0=x_0+y_0i$ 与 OX 軸作成角度 α 的直綫的方程是：

$$\zeta=\zeta_0+ue^{\alpha i},$$

其中参变量 u 記由点 ζ_0 到 ζ 的距离。

2．以点 ζ_0 作圓心半徑为 r 的 ζ 的方程是：

$$\zeta=\zeta_0+re^{ui}。$$

3．中心在坐标原点，半軸为 a 与 b，長軸在 OX 軸上的橢圓有复数式方程[177]：

$$\zeta=x+yi=a\cos u+bi\sin u=\frac{a+b}{2}e^{ui}+\frac{a-b}{2}e^{-ui}。$$

若長軸与 OX 軸作成角度 φ_0，則这橢圓的方程成为

$$\zeta=e^{\varphi_0 i}\left[\frac{a+b}{2}e^{ui}+\frac{a-b}{2}e^{-ui}\right]。$$

一般情形下，若橢圓中心在点 ζ_0，長軸与 OX 軸作成角度 φ_0，則这橢圓有方程：

$$\zeta=\zeta_0+e^{\varphi_0 i}\left[\frac{a+b}{2}e^{ui}+\frac{a-b}{2}e^{-ui}\right]。$$

若 $b=a$，这方程成为半徑为 a 的圓的方程：

$$\zeta=\zeta_0+ae^{(\varphi_0+u)i},$$

其中 (φ_0+u) 与参变量 u 的作用一样。

若 $b=0$，得到一个直綫的綫段：

$$\zeta=\zeta_0+ae^{\varphi_0 i}\frac{e^{ui}+e^{-ui}}{2}=\zeta_0+ae^{\varphi_0 i}\cos u;\quad \zeta=\zeta_0+ve^{\varphi_0 i},$$

与 OX 軸作成角度 φ_0，長为 $2a$，以 ζ_0 为中点，因为实参变量 $v=a\cos u$ 只能取 $(-a)$ 与 $(+a)$ 之間的值。

把圓与綫段，考虑作当短半軸等于長半軸或等于零时，橢圓的極限情形。我們可以一般的說，方程

$$\zeta=\zeta_0+\mu_1e^{ui}+\mu_2e^{-ui}\tag{42}$$

总是橢圓的方程，其中 ζ_0，μ_1，μ_2 是任何复数。

实际上，設：

$$\mu_1=M_1e^{\theta_1 i},\quad \mu_2=M_2e^{\theta_2 i},\quad \frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\varphi_0,\quad \frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\theta_0,$$

方程 (42) 就可以写成：

$$\zeta=\zeta_0+M_1e^{(u+\theta_1)i}+M_2e^{-(u-\theta_2)i}=\zeta_0+e^{\varphi_0 i}[M_1e^{(u+\theta_0)i}+M_2e^{-(u+\theta_0)i}],$$

由此显見，所考虑的曲綫确实是橢圓，以点 ζ_0 为中心，半軸各为 $(M_1\pm M_2)$，長軸与 OX 軸作成角度 φ_0，就是在矢量 μ_1 与 μ_2 的夹角的分角綫的方向。当 $M_2=0$ 时，橢圓成为圓；当 $M_2=M_1$ 时，成为綫段。

4. 討論在安排有电阻，自感与电容的綫路中，变动电流的現象时，遞变的值画成的曲綫，有复数式方程：

$$\zeta=\nu e^{\gamma u},\tag{43}$$

其中 ν 与 γ 是任何复常量。

設 $\nu=N_1e^{\varphi_0 i}$，$\gamma=a+bi$，化为極坐标。由此就有：

$$\zeta=\rho e^{\theta i}=N_1e^{\varphi_0 i}e^{(a+bi)u}=N_1e^{au}e^{(bu+\varphi_0)i},$$

就是

$$\rho=N_1e^{au},\quad \theta=bu+\varphi_0,$$

由此

$$u=\frac{\theta-\varphi_0}{b},$$

于是

$$\rho=Ne^{\frac{a}{b}\theta}\quad \left(N=N_1e^{-\frac{a\varphi_0}{b}}\right),$$

就是所考虑的曲綫是对数螺綫$\left(\text{圖 180，对应于}\frac{a}{b}>0\text{ 的情形}\right)$。

对于較复杂的曲綫：

$$\zeta=\nu_1 e^{\gamma_1 u}+\nu_2 e^{\gamma_2 u}+\cdots+\nu_s e^{\gamma_s u}$$

可以先作"分螺綫"。

$$\zeta_1=\nu_1 e^{\gamma_1 u},\ \zeta_2=\nu_2 e^{\gamma_2 u},\ \cdots,\ \zeta_s=\nu_s e^{\gamma_s u},$$

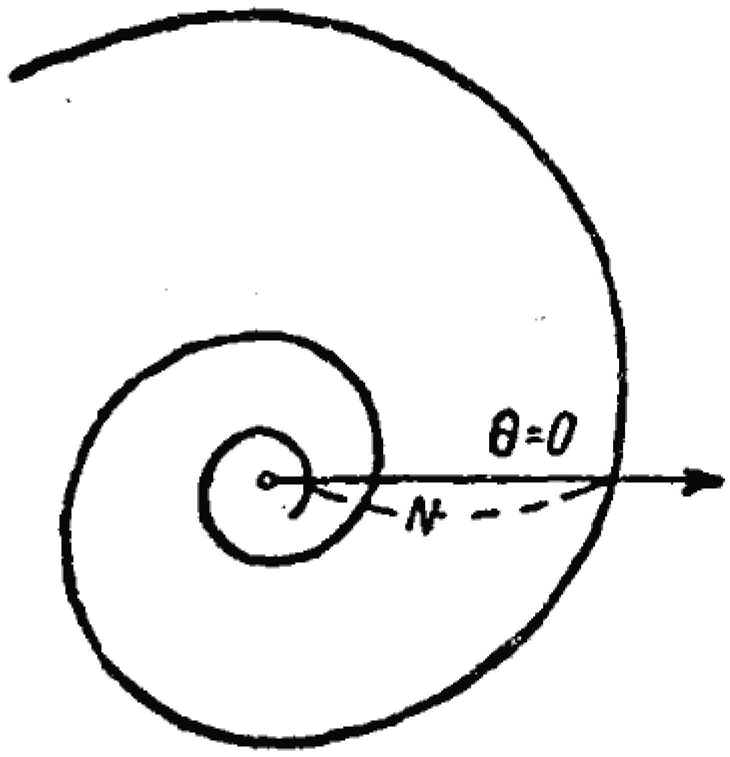


圖　180.

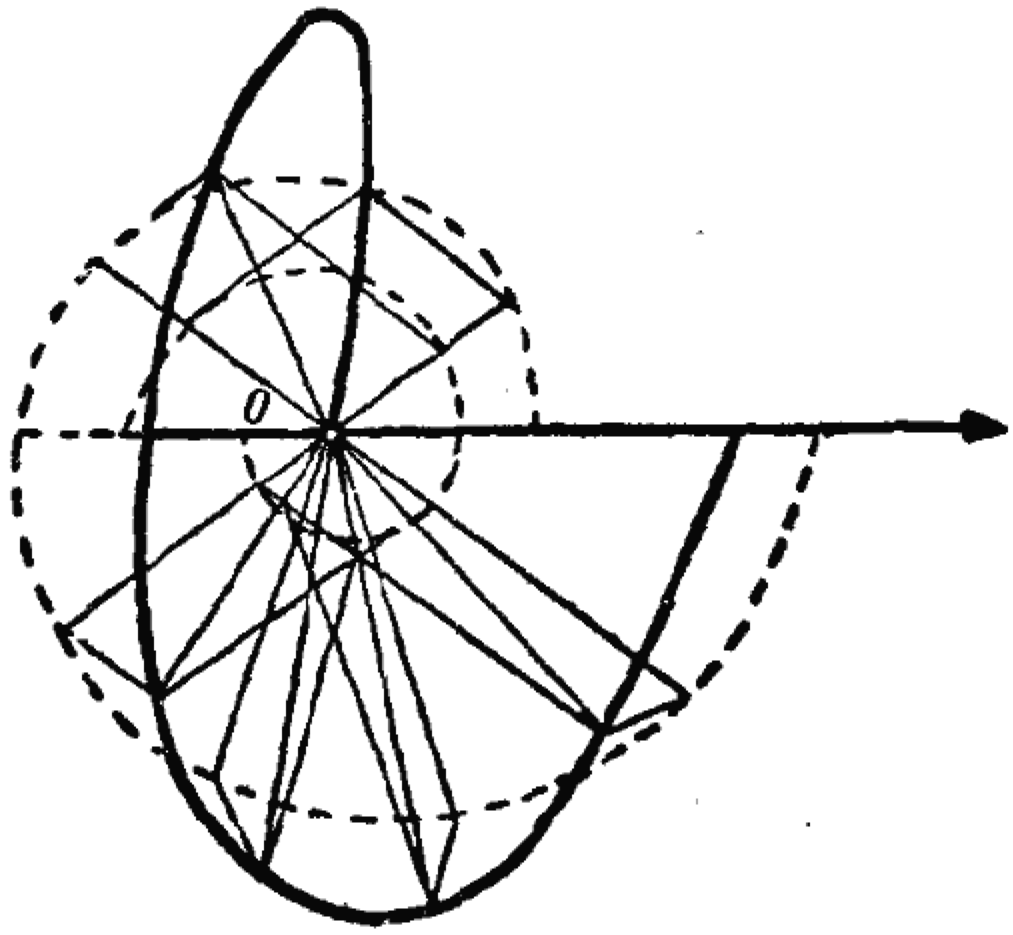


圖　181.

再对于每一个 u 的値，作对应値 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_s$ 的几何的和，就得到了(圖 181)。

183. 諧和振动的复数式表示法　阻尼諧和振动由公式：

$$x=Ae^{-\varepsilon t}\sin(\omega t+\varphi_0) \tag{44}$$

表达，其中 A 与 ε 是正的常量。引用复量

$$\zeta=Ae^{\left(\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)i}\,e^{(\omega+\varepsilon i)it}=Ae^{-\varepsilon t+\left(\omega t+\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)i}\text{。} \tag{45}$$

这个复量的实部与表达式(44)相同。如此任何一个阻尼諧和振动可以由下面形状的复表达式

$$\zeta=\alpha e^{\beta it}$$

的实部表示，其中 α 与 β 是复数。在公式(45)的情形下，

$$\alpha=Ae^{\left(\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)i},\quad \beta=\omega+\varepsilon i\text{。}$$

在无阻尼諧和振动的情形，$\varepsilon=0$，于是 β 是实数。

表达式(43)，当

$$\nu=Ae^{\left(\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)i},\quad \gamma=(\omega+\varepsilon i)i=-\varepsilon+\omega i$$

而

$$u=t$$

时，与表达式(45)相同。

由此看出，当 t 改变时，点 ζ 画出对数螺綫，这时極角 θ 是时間 t 的綫性函数：

$$\theta=\omega t+\varphi_0-\frac{\pi}{2},$$

就是由坐标原点到点 ζ 的矢量半徑以角速度 ω 繞原点旋轉。点 ζ 在 OX 軸上的投影作成阻尼振动(44)。若 $\varepsilon=0$，則点 ζ 沿圓 $\rho=A$ 运动，于是它在 OX 軸上的投影依无阻尼諧和振动律

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

运动。

§ 18. 多項式的基本性質及其根的計算

184. 代数方程 在这一节中，我們討論多項式：

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_kz^{n-k}+\cdots+a_{n-1}z+a_n,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n$ 是給定的复数，z 是复变量，并且我們算作首項系数 a_0 不等于零。在初等代数中我們熟知多項式的基本运算，回忆除法的結果，若 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 是两个多項式，$\varphi(z)$ 的次数不高于 $f(z)$ 的次数，則 $f(z)$ 可以写成：

$$f(z)=\varphi(z)\cdot Q(z)+R(z),$$

其中 $Q(z)$ 与 $R(z)$ 也是多項式，并且 $R(z)$ 的次数低于 $\varphi(z)$ 的次数，多項式 $Q(z)$ 与 $R(z)$ 各叫做 $f(z)$ 被 $\varphi(z)$ 除时的商式与余式，商式与余式是完全确定的多項式，所以 $f(z)$ 通过 $\varphi(z)$ 写成上面的形状是唯一的。

当 z 的某一个值使得多項式等于零时，这个值叫做这多項式的根。如此，$f(z)$ 的根就是方程

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_kz^{n-k}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0 \qquad (1)$$

的解。

这个方程叫做 n 次代数方程。

当 $f(z)$ 用二項式 $(z-a)$ 除时，商式 $Q(z)$ 是 $(n-1)$ 次多項式，首項

系数为 a_0，余式 R 不含有 z。依除法的基本性質，有恒等式

$$f(z)=(z-a)Q(z)+R。$$

在这恒等式中，代入 $z=a$，得到：

$$R=f(a),$$

就是，多項式 $f(z)$ 被除于 $(z-a)$ 时，余式等于 $f(a)$（别兹定理）。

特别是，为要使得多项式 $f(z)$ 被 $(z-a)$ 除时沒有余式，必要且充分的条件是

$$f(a)=0,$$

就是，为要使多項式被除于 $(z-a)$ 时沒有余式，必須且仅須 $z=a$ 是这多項式的根。

如此，知道了多項式的一个根 $z=a$，就可以由这多項式分解出一个因子 $(z-a)$：

$$f(z)=(z-a)f_1(z),$$

其中

$$f_1(z)=b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\cdots+b_{n-2}z+b_{n-1}\quad(b_0=a_0);$$

其余的根是 $(n-1)$ 次方程

$$b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\cdots+b_{n-2}z+b_{n-1}=0$$

的根。

为以下的叙述，我們須要下面这个問題的答案：是否任何代数方程有根？在非代数方程的情形，答案可以是否定的。例如，方程

$$e^z=0\quad(z=x+yi)$$

沒有根，因为沒有一个 x 的值使得左边的模 e^x 成为零。但是在代数方程的情形，上面这問題有肯定的答案，包含在下述代数学的基本定理中：任何代数方程至少有一个实根或复根。

我們現在不証明这个定理，在卷 III 中，討論复变函数論时，再証明它。

185. 多項式的因式分解　任何多項式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n, \qquad (2)$$

依照基本定理，有一个根 $z=z_1$，所以除以 $(z-z_1)$，可以写成[184]：

$$f(z)=(z-z_1)(a_0z^{n-1}+\cdots)。$$

这等式右边的第二个因子，依照基本定理，有一个根 $z=z_2$，所以除以 $(z-z_2)$，可以写成：

$$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)(a_0z^{n-2}+\cdots)。$$

如此用一次的因子除，最后我們得到下面的 $f(z)$ 的因式分解式：

$$f(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n), \qquad (3)$$

就是，任何 n 次多項式可以分解为 $(n+1)$ 个因子，其中第一个等于首項系数，其余的是 $(z-a)$ 形狀的一次二項式。

当代入 $z=z_s$ 时 $(s=1, 2, \cdots, n)$，分解式（3）中至少有一个因子成为零；就是，值 $z=z_s$ 是 $f(z)$ 的根。

除去所有的 z_s 外，z 的任何值不可能是 $f(z)$ 的根，因为对于这样的值，分解式（3）中沒有一个因子成为零。

若所有的数 z_s 彼此不同，則 $f(z)$ 恰好有 n 个不同的根。若数 z_s 中有相同的，則 $f(z)$ 的不同的根的数目少于 n。

如此，我們得到一个定理：n 次多項式（或 n 次代数方程）的不同的根不可能多于 n 个。

由这定理直接推出下面的結果：若已知一个不高于 n 次的多項式有多于 n 个的不同的根，則这多項式所有的系数与常数項都等于零，就是，这多項式恒等于零。

設，对于多于 n 个的不同的 z 的值，两个不高于 n 次的多項式 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的值相同。它們的差 $f_1(z)-f_2(z)$ 也是一个不高于 n 次的多項式，就有多于 n 个的不同的根，所以这个差恒等于零，于是 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 有相同的系数。若对于多于 n 个的不同的 z 的值，两个不高于 n 次的多項式的值相同，則这两个多項式所有的系数以及常数項对应相等，就是这两个多項式彼此恒等。

多項式的这个性質是以后我們要应用的待定系数法的基础。这方法的要点在于，由两个恒等的多項式，推出 z 的同次幂的系数相等。

我們得到的分解式（3），是依一定順序用多項式 $f(z)$ 的一次因子除得的結果。現在証明，最后的結果不依賴于除的步驟，就是，多項式有唯一的因式分解式。

設除分解式（3）外，另有分解式：

$$f(z)=b_0(z-z_1')(z-z_2')\cdots(z-z_n')。\qquad (3_1)$$

比較这两个分解式，可以写出恒等式：

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)=b_0(z-z_1')(z-z_2')\cdots(z-z_n')。$$

这恒等式左边当 $z=z_1$ 时等于零；于是右边也应当等于零，就是 z_k' 中至少有一个数应当等于 z_1。例如，可以算作 $z_1'=z_1$。恒等式两边消掉 $(z-z_1)$，得到等式：

$$a_0(z-z_2)\cdots(z-z_n)=b_0(z-z_2')\cdots(z-z_n'),$$

对于所有 z 的值都对，只有 $z=z_1$ 可能例外。根据以上所述，这个等式也应当是恒等。像上面一样，可証 $z_2'=z_2$ 等等以至于 $b_0=a_0$；就是，分解式 (3_1) 应当与分解式（3）全同。

186. 重根　我們已經說过，在分解式（3）中出現的数 z_s，可能有相同的。在分解式（3）中把相同的因子放在一起，可以写成：

$$f(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_m)^{k_m},\qquad (4)$$

其中 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 不同而

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n。\qquad (5)$$

若在如此写成的分解式中有因子 $(z-z_s)^{k_s}$，则根 $z=z_s$ 叫做 k_s 重根，一般来講，若 $f(z)$ 被 $(z-a)^k$ 除尽，而不能被 $(z-a)^{k+1}$ 除尽，则多項式 $f(z)$ 的根 $z=a$ 是个 k 重根。

現在講重根的另一个判別法。为此我們考慮泰勒公式。首先要提出，多項式 $f(z)$ 的导数，可以由对于实变量成立的公式，同样确定：

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_kz^{n-k}+\cdots+a_{n-1}z+a_n;$$

$$f'(z)=na_0z^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+\cdots+(n-k)a_kz^{n-k-1}+\cdots+a_{n-1};$$

$$f''(z)=n(n-1)a_0z^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1z^{n-3}+\cdots+$$
$$+(n-k)(n-k-1)a_kz^{n-k-2}+\cdots+2\cdot 1a_{n-2}。$$

泰勒公式:

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+$$
$$+\cdots+\frac{(z-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\cdots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \qquad (6)$$

是一个含有 a 与 z 的代数恒等式,不仅 a 与 z 取实值时对,取复值时也对。

現在我們講 $z=a$ 是重根的条件。把(6)写成:

$$f(z)=(z-a)^k\left[\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{z-a}{(k+1)!}f^{(k+1)}(a)+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(z-a)^{n-k}}{n!}f^{(n)}(a)\right]+$$
$$+\left[f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{(z-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a)\right]。$$

第二个方括号内的多項式的次数低于 $(z-a)^k$ 的次数,由此看出[**184**],当 $f(z)$ 被 $(z-a)^k$ 除时,第一个方括号内是商式,第二个是余式。为要 $f(z)$ 被 $(z-a)^k$ 除尽,必須且仅須这个余式恒等于零。把它考虑作变量 $(z-a)$ 的多項式,得到下面的条件:

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0。 \qquad (7)$$

我們应当再补充上条件:

$$f^{(k)}(a)\neq 0, \qquad (8)$$

因为若 $f^{(k)}(a)=0$,則 $f(z)$ 不仅被 $(z-a)^k$ 除尽,也被 $(z-a)^{k+1}$ 除尽,所以,条件(7)与(8),是 $z=a$ 为多項式 $f(z)$ 的 k 重根的必要且充分的条件。

設 $\psi(z)=f'(z)$，于是：

$$\psi'(z)=f''(z),\quad \psi''(z)=f'''(z),\quad \cdots,\quad \psi^{(s-1)}(z)=f^{(s)}(z)。$$

若 $z=a$ 是多項式 $f(z)$ 的 k 重根，則根据（7）与（8）：

$$\psi(a)=\psi'(a)=\psi''(a)=\cdots=\psi^{(k-2)}(a)=0 \text{ 而 } \psi^{(k-1)}(a)\neq 0,$$

就是，$z=a$ 是 $\psi(z)$ 或 $f'(z)$ 的 $(k-1)$ 重根。——就是，一个多項式的一个 k 重根是这多項式的导数的 $(k-1)$ 重根。繼續应用这个性質，可以肯定，它是二阶导数的 $(k-2)$ 重根，是三阶导数的 $(k-3)$ 重根等等，以至于是 $(k-1)$ 阶导数的一重根，或者說單根。

如此，若 $f(z)$ 有分解式：

$$f(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_m)^{k_m}, \tag{9}$$

則 $f'(z)$ 有：

$$f'(z)=(z-z_1)^{k_1-1}(z-z_2)^{k_2-1}\cdots(z-z_m)^{k_m-1}\omega(z), \tag{10}$$

其中 $\omega(z)$ 是一个多項式，它与 $f(z)$ 沒有相同的根。

187. 和那氏法則 現在我們講，当給定值 $z=a$，要計算 $f(z)$ 与它的导数的值时，实用上較方便的法則。

設用 $(z-a)$ 除 $f(z)$ 得到商式 $f_1(z)$ 而余 r_1，用 $(z-a)$ 除 $f_1(z)$ 时，商 $f_2(z)$ 而余 r_2，等等：

$$\begin{aligned}
f(z)&=(z-a)f_1(z)+r_1; \quad r_1=f(a);\\
f_1(z)&=(z-a)f_2(z)+r_2; \quad r_2=f_1(a);\\
f_2(z)&=(z-a)f_3(z)+r_3; \quad r_3=f_2(a);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots。
\end{aligned}$$

把公式（6）写成：

$$f(z)=f(a)+(z-a)\left[\frac{f'(a)}{1}+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}\right]。$$

这个公式与上面的等式比較，得到：

$$f_1(z)=\frac{f'(a)}{1}+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1};\ r_1=f(a)。$$

同样对于 $f_1(z)$ 得到：

$$f_2(z)=\frac{f''(a)}{2!}+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-2};$$

$$r_2=\frac{f'(a)}{1};$$

于是一般来講：

$$r_{k+1}=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

現在設：

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n,$$

$$f_1(z)=b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\cdots+b_{n-2}z+b_{n-1};\quad b_n=r_1,$$

如此可以計算商式的系数 b_s 与余数 b_n。去掉括号，再把 z 的同次幂写在一起，得到恒等式：

$$\begin{aligned}
&a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=\\
&=(z-a)(b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\cdots+b_{n-2}z+b_{n-1})+b_n=\\
&=b_0z^n+(b_1-b_0a)z^{n-1}+(b_2-b_1a)z^{n-2}+\cdots+\\
&\qquad\qquad+(b_{n-1}-b_{n-2}a)z+(b_n-b_{n-1}a),
\end{aligned}$$

比較 z 的同次幂的系数：

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1-b_0a,\quad a_2=b_2-b_1a,\quad \cdots,$$

$$a_{n-1}=b_{n-1}-b_{n-2}a,\quad a_n=b_n-b_{n-1}a,$$

由此：

$$b_0=a_0,\quad b_1=b_0a+a_1,\quad b_2=b_1a+a_2,\quad \cdots,$$

$$b_{n-1}=b_{n-2}a+a_{n-1},\quad b_n=b_{n-1}a+a_n=r_1。$$

由这些等式可以相繼确定 b_s。

同样，把 $(z-a)$ 除 $f_1(z)$ 时的商式与余数記作：

$$f_2(z)=c_0z^{n-2}+c_1z^{n-3}+\cdots+c_{n-3}z+c_{n-2};\quad c_{n-1}=r_2,$$

就有：

$$c_0=b_0,\quad c_1=c_0a+b_1,\quad c_2=c_1a+b_2,\quad \cdots,$$

$$c_{n-2}=c_{n-3}a+b_{n-2},\quad c_{n-1}=c_{n-2}a+b_{n-1}=r_2,$$

就是，像利用 a_s 計算 b_s 一样，可以利用 b_s 相繼計算系数 c_s。

所述的計算法叫做和那氏法則或和那氏算法①。

应用这个法則，我們得到量 $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$。

我們用下表計算，这就无須解釋了。

---

① 为要得到所要的答案，須要依所确定的法則作出所有的运算，普通叫做算法。

a								
	$a_0,$	$a_1,$	$a_2,$	$a_3,$	$\cdots,$	$a_{n-2},$	$a_{n-1},$	a_n
	$+$	$b_0a,$	$b_1a,$	$b_2a,$	$\cdots,$	$b_{n-3}a,$	$b_{n-2}a,$	$b_{n-1}a$
	$b_0=a_0,$	$b_1,$	$b_2,$	$b_3,$	$\cdots,$	$b_{n-2},$	b_{n-1}	$b_n=r_1=f(a)$
	$+$	$c_0a,$	$c_1a,$	$c_2a,$	$\cdots,$	$c_{n-3}a,$	$c_{n-2}a$	
	$c_0=a_0,$	$c_1,$	$c_2,$	$c_3,\cdots,$	$c_{n-2},$	$c_{n-1}=r_2=\dfrac{f'(a)}{1}$		
	……	……	……	……	……	……	……	……
	$l_0=a_0,$	l_1	$l_2=r_{n-1}=\dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}$					
	$+$	m_0a						
	$m_0=a_0$	$m_1=r_n=\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$						
	$m_0=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$							

例　求当 $z=-5$ 时，函数

$$f(z)=z^5+2z^4-2z^2-25z+100$$

与它的导数的值。

$a=-5$						
	1,	2,	0,	$-2,$	$-25,$	100
		$-5,$	15,	$-75,$	335,	-1800
	1,	$-3,$	15,	$-77,$	360	$-1700=f(-5)$
		$-5,$	40,	$-275,$	1760	
	1,	$-8,$	55,	-352	$2120=\dfrac{f'(-5)}{1!}$	
		$-5,$	65,	-600		
	1,	$-13,$	120	$-952=\dfrac{f''(-5)}{2!}$		
		$-5,$	90			
	1,	-18	$210=\dfrac{f'''(-5)}{3!}$			
		-5				
	1	$-23=\dfrac{f^{(IV)}(\cdots 5)}{4!}$				
	$1=\dfrac{f^{(V)}(-5)}{5!}$					

188. 最高公因式 考虑两个多項式,每一个有(3)的样子的因式分解式。所謂这两个多項式的最高公因式是指,在 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的分解式中都出現的,所有的 $(z-a)$ 形状的二項因子之乘积,其中这些公因子所取的方指数等于它們在 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的分解式中的次数之較低者。作最高公因式时,常因子沒有作用。如此两个多項式的最高公因式是一个多項式,它的根是这两个多項式共同的根,这个根重复的回数等于它对于这两个多項式重复的回数之較少者。若給定的多項式沒有共同的根,就說它們是互質的。与以上完全类似,可以确定几个多項式的最高公因式。

为要由上述方法作最高公因式,須要有給定多項式的一次因式分解式。但是求分解式(3)要求方程 $f(z)=0$ 的解,这是代数学的一个基本問題。

不过,可以像在算术中求整数的最大公約一样,有另一个求最高公因式的方法,不須要因式分解式,叫做輾轉相除法。这个方法的作法如下。設 $f_1(z)$ 的次数不低于 $f_2(z)$ 的次数。用第二个多項式除第一个,再用第一次除得的余式除第二个多項式 $f_2(z)$,再用第二次除得的余式除第一次的余式,直到除得的余式等于零为止。最后的不等于零的余式是所給的两个多項式的最高公因式。若这余式不含有 z,則所給的多項式是互質的。如此,我們得到最高公因式的求法,求时各多項式的变量依降冪排列。用 $D(z)$ 除 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$,得到互質的多項式。其中一个或两个可能不含有 z。

比較分解式(9)与(10),我們看出,多項式 $f(z)$ 与它的导数 $f'(z)$ 的最高公因式 $D(z)$ 是

$$D(z)=(z-z_1)^{k_1-1}(z-z_2)^{k_2-1}\cdots(z-z_m)^{k_m-1},$$

其中我們不要常因子,因为它不关緊要。

用 $D(z)$ 除 $f(z)$,得到:

$$\frac{f(z)}{D(z)}=a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m),$$

就是用多項式 $f(z)$ 与 $f'(z)$ 的最高公因式除 $f(z)$ 时，得到的多項式，只有單根，而且所有的根与 $f(z)$ 的不同根彼此相同。

这样作法叫做解除多項式 $f(z)$ 的重根。我們看出，为此无須解方程 $f(z)=0$。

若 $f(z)$ 与 $f'(z)$ 互質，則 $f(z)$ 所有的根都是單根；逆之亦然。

189. 实多項式　現在考慮实系数多項式：

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n,$$

幷設这多項式有 k 重复根 $z=a+bi(b\neq 0)$，就是

$$f(a+bi)=f'(a+bi)=\cdots=f^{(k-1)}(a+bi)=0,$$

$$f^{(k)}(a+bi)=A+Bi\neq 0。$$

在表达式 $f(a+bi)$ 与諸导数中，所有的量用共軛量替換。这时，由于系数 a_s 都是实数，它們保留原来的量，只是 $(a+bi)$ 換成 $(a-bi)$，就是多項式 $f(z)$保持原样，不过在其中代入 $z=a-bi$ 来替換 $z=a+bi$。由 [**173**] 知道，复数用共軛数替換后，結果也要換，就是，多項式的値也換成共軛的。如此得到：

$$f(a-bi)=f'(a-bi)=\cdots=f^{(k-1)}(a-bi)=0;$$

$$f^{(k)}(a-bi)=A-Bi\neq 0,$$

就是若实系数多項式有 k 重复根 $z=a+bi$，則它应当有 k 重共軛根 $z=a-bi$。

所以，实系数多項式 $f(z)$ 的复根，依成对的共軛根分配。設变量 z 只取实値，把它記作 x，依照公式(3)：

$$f(x)=a_0(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)。$$

若根中有虛的，則对应它們的因子也是虛的。把对应于一对共軛根的一对因子相乘，得到：

$$[x-(a+bi)][x-(a-bi)]=[(x-a)-bi][(x-a)+bi]=$$
$$=(x-a)^2+b^2=x^2+px+q,$$

其中

$$p=-2a,\ q=a^2+b^2 \quad (b\neq 0)。$$

如此，一对共軛虛根对应于一个二次的实因子，于是我們推知：实系数多項式分解为一次与二次的实因子。

这分解式有下面的形状：

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+$$
$$+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}, \qquad (11)$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 各为 $f(x)$ 的 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 重实根，而二次因子对应于 $l_1, l_2, \cdots, l_t$ 重成对的共軛虛根。

190. 方程的根与系数的关系 像以前一样，設 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根。

依照公式(3)有恒等式：

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)。$$

应用初等代数中二項式乘积的公式，可以写出下面形状的恒等式：

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_kz^{n-k}+\cdots+a_n=$$
$$=a_0[z^n-S_1z^{n-1}+S_2z^{n-2}+\cdots+(-1)^kS_kz^{n-k}+\cdots+(-1)^nS_n],$$

其中 S_k 記由数 $z_s(s=1, 2, \cdots, n)$ 作成的所有可能的乘积之和，每个乘积中有 k 个因子。比較 z 的同次冪的系数，得到：

$$S_1=-\frac{a_1}{a_0},\ S_2=\frac{a_2}{a_0},\ \cdots,\ S_k=(-1)^k\frac{a_k}{a_0},\ \cdots,\ S_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0},$$

或

$$\left.\begin{aligned} z_1+z_2+\cdots+z_n&=-\frac{a_1}{a_0};\\ z_1z_2+z_1z_3+\cdots+z_1z_n+z_2z_3+\cdots+z_{n-1}z_n&=\frac{a_2}{a_0};\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ z_1z_2\cdots z_n&=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}。\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

这些公式是二次方程根的性質推广到任何高次方程的情形。利用它們，当知道一个方程的根时，可能作出这个方程来。

191. 三次方程 我們不致力于实际計算代数方程的根的問題。把这个問題委托于近似計算。我們只講三次方程的情形，而这里所講的有些計算法是以后有用的。

先討論三次方程：

$$y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0。\qquad (13)$$

用新未知数 x 替代 y，讓

$$y=x+\alpha。$$

代入在方程的左边，得到方程：

$$x^3+(3\alpha+a_1)x^2+(3\alpha^2+2a_1\alpha+a_2)x+(\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3)=0。$$

若設 $\alpha=-\frac{a_1}{3}$，則 x^2 項沒有了：于是推知，代入

$$y=x-\frac{a_1}{3},$$

方程变换成：

$$f(x)=x^3+px+q=0 \qquad (14)$$

的样子，它不含 x^2 的項。

若 p 与 q 是实数，則方程(14)或者有三个实根，或者有一个实根与两个共軛虛根[189]。为要求那一种情形成立，我們作出这方程左边的一阶导数：

$$f'(x)=3x^2+p。$$

若 $p>0$，則 $f'(x)>0$；于是 $f(x)$ 总增加而只有一个实根，因为当由 $x=-\infty$ 变到 $x=+\infty$ 时，函数由(－)号变为(＋)号。再設 $p<0$。不难看出，函数 $f(x)$，当 $x=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ 时有極大値，当 $x=\sqrt{-\frac{p}{3}}$ 时有極小値，代入 x 的这两个値在函数 $f(x)$ 的表达式中，得到这函数的極大値与極小値的表达式：

$$q\mp\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}。$$

若这两个値同号，就是

$$\left(q-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\left(q+\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)=q^2+\frac{4p^3}{27}>0$$

或

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0, \qquad (15_1)$$

则这方程只有一个实根，在区間$\left(-\infty,\ -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$內，或在区間$\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}},+\infty\right)$內。

若$f(x)$的極大值有$(+)$号，而極小值有$(-)$号，就是

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0, \tag{15$_2$}$$

则$f(-\infty)$，$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$，$f\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$，$f(+\infty)$ 各有符号 $(-)$，$(+)$，$(-)$，$(+)$，于是方程(14)有三个实根。此外，注意当$p>0$时，一定满足条件(15_1)。讀者可以証明，在

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0 \tag{15$_3$}$$

的情形，方程(14)有重根 $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$与根$\frac{3q}{p}$，这里我們算作$p\neq0$，于是由(15_2)推知$p<0$。当$p=0$而$q\neq0$时，我們有不等式(15_1)，于是方程(14)成为$x^3+q=0$，就是 $x=\sqrt[3]{-q}$，由此推知方程(14)有一个实根[175]。当$p=q=0$时，方程(14)是$x^3=0$，有三重根$x=0$。

以上得到的結果列在下表中：

$x^3+px+q=0$	
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$	一个实根两个共轭虛根
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$	三个不同的实根
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$	三个实根，其中有重根

圖182上表示，对于$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$的不同情形，函数

$$y=x^3+px+q$$

的各种位置。在(15_3)的情形，二重根对应于曲綫与OX軸的切点。

現在我們求方程(14)的根用系数来表达的公式。这个公式不适合于实用的計算，在下一段中，我們应用三角函数，討論实用上計算根的合用的方法。

引用两个新未知数u与v来替代未知数x，讓

$$x=u+v。 \tag{16}$$

代入方程(14)中：

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0,$$

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0。\quad (17)$$

未知数 u 及 v 受下列条件的限制：

$$3uv+p=0,$$

于是方程(17)成为：

$$u^3+v^3=-q。$$

如此，問題化为解两个方程：

$$uv=-\frac{p}{3},\ u^3+v^3=-q。\quad (18)$$

把第一个方程两边乘三次方，就有：

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27},\quad u^3+v^3=-q,$$

于是推知，u^3 与 v^3 是二次方程

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$$

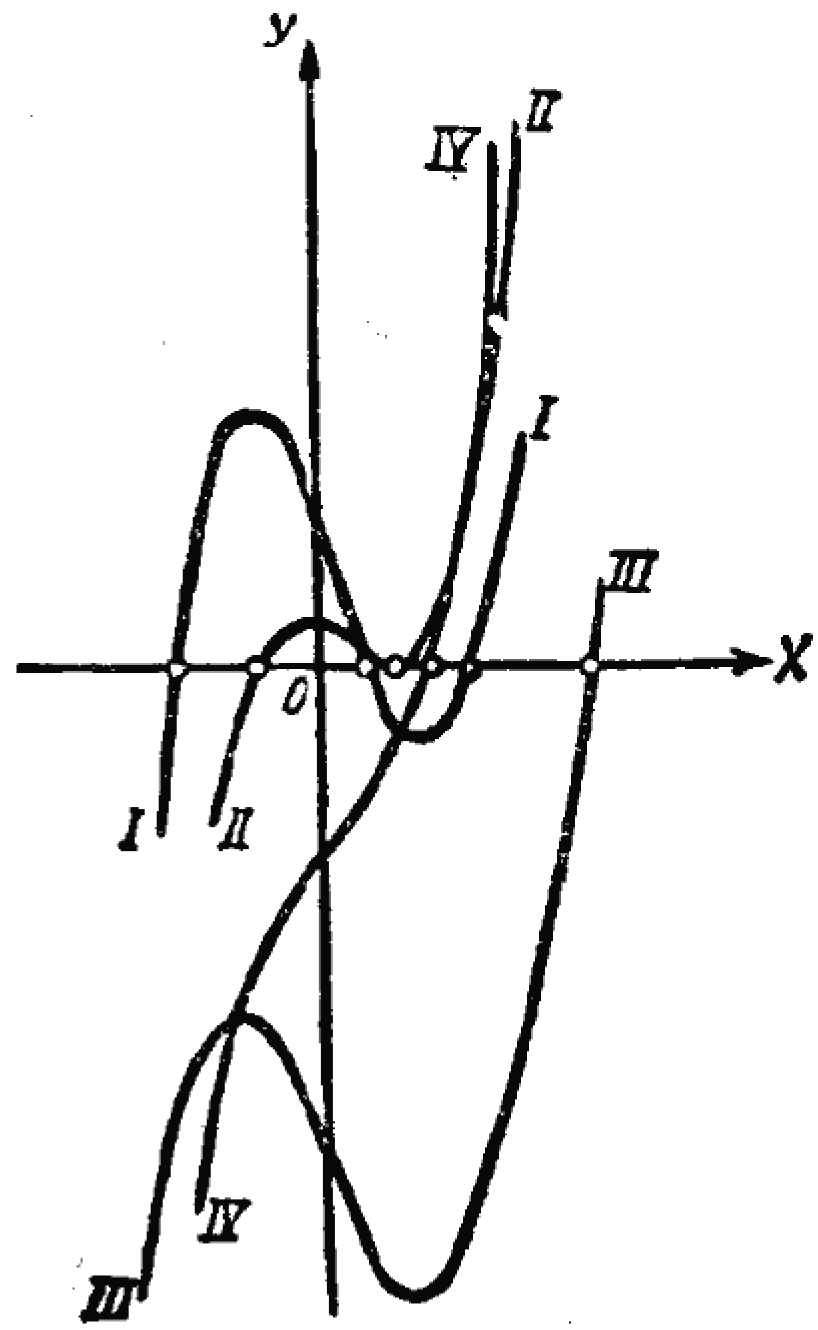


圖 182.

的根，就是

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}。\quad (19)$$

最后，依照公式(16)求得：

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}。\quad (20)$$

这个三次方程(14)的解的公式叫做卡当公式(十六世紀意大利数学家)。

为簡單起見，用 R_1 与 R_2 記公式(20)中立方根号下的表达式：

$$x=\sqrt[3]{R_1}+\sqrt[3]{R_2}。$$

每一个立方根有三个不同的值 [175]，所以这个公式給出九个 x 的不同的值，而只有三个是方程(14)的根，多出来的 x 的值，是由于把方程(18)中第一个乘方的关系。我們只要 u 与 v 滿足关系式(18)的值，就是我們应当只取乘积等于 $\left(-\frac{p}{3}\right)$ 的方根的值。

用 ε 記 1 的一个立方根：

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}i,$$

$$\varepsilon^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}i,$$

于是設$\sqrt[3]{R_1}$与$\sqrt[3]{R_2}$是滿足上述条件的任何一組值。它們乘以ε与ε^2就得到立方根的其余两个值[175]。

注意$\varepsilon^3=1$，得到方程(14)的根的表达式：

$$x_1=\sqrt[3]{R_1}+\sqrt[3]{R_2},\quad x_2=\varepsilon\sqrt[3]{R_1}+\varepsilon^2\sqrt[3]{R_2},$$
$$x_3=\varepsilon^2\sqrt[3]{R_1}+\varepsilon\sqrt[3]{R_2}, \tag{21}$$

这里算作p与q是任何复数。

192 三次方程的解的三角式 設方程(14)的系数p与q是实数，我們說过，卡当公式不适用于根的計算，我們再講一个較实用的公式。我們分四种情形考慮。

1° $$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0。$$

由这条件推知$p<0$。公式(20)中根号下的表达式R_1与R_2是虚的，不过我們知道这方程的三个根是实的[191]。

設：

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=-\frac{q}{2}\pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi),$$

由此[171]：

$$r=\sqrt{-\frac{p^3}{27}},\ \cos\varphi=-\frac{q}{2r}。 \tag{22}$$

依卡当公式，就有：

$$x=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)+$$
$$+\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)\quad(k=0,1,2)。$$

在两項中k取相同的值时，两項相乘得到正数：$\sqrt[3]{r^2}=-\frac{p}{3}$。

最后得到：

$$x=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}\quad(k=0,1,2), \tag{23}$$

其中r与φ依公式(22)确定，并且不难証明，如果我們取滿足(22)中第二个方程的不同的φ，就按公式(23)得到同样一套根。

2° $$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0\ 而\ p<0。$$

方程(14)有一个实根两个共軛虚根[191]。由上式推知$-\frac{p^3}{27}<\frac{q^2}{4}$。引用輔助角度$\omega$，讓

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\sin\omega。 \tag{24$_1$}$$

于是

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}},$$

因为根据(24_1)：

$$\sqrt{-\frac{p}{3}}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\sin\omega}。$$

再引用角度φ，讓

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},\tag{24_2}$$

得到实根的表达式：

$$x_1=-\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi)=-\frac{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\varphi}。\tag{25_1}$$

应用公式(21)，請讀者証明，虛根有表达式：

$$\frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\varphi}\pm i\sqrt{-p}\operatorname{ctg}2\varphi。\tag{25_2}$$

3° $\qquad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ 而 $p>0$。

像情形 2° 一样，方程(14)有一个实根两个共軛虛根。这时$\sqrt{\frac{p^3}{27}}$可能小于$\left|\frac{q}{2}\right|$，也可能大于$\left|\frac{q}{2}\right|$，于是替代公式(24_1)，我們引用角度ω，讓

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\operatorname{tg}\omega。\tag{26_1}$$

于是

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{\frac{q\sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}}=\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{\frac{q\cos^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}}=\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}}。$$

再引用角度φ，讓

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},\tag{26_2}$$

最后就有：

$$x_1=\sqrt{\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi)=-2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg}2\varphi。\qquad (27_1)$$

虚根是：

$$\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg}2\varphi\pm\frac{i\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}。\qquad (27_2)$$

4°
$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0。$$

方程(14)有重根，在这情形下，像 $p=0$ 的情形一样，方程的解不难求。

应用这些三角公式，利用三角对数表，可以計算三次方程的根，且有高度的准确性。

例 1.

$$x^3+9x^2+23x+14=0。$$

讓 $x=y-3$。方程变换成

$$y^3-4y-1=0,$$

这个方程有三个实根[191]。

公式(22)給出 $\cos\varphi$，由它求出 φ，再依公式(23)确定根：

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{27}}{16}$, $\log\cos\varphi=\bar{1}.51156$		
$\varphi=71°2'56''$		
$\frac{\varphi_1}{3}=23°40'59''$,	$\frac{\varphi_2}{3}=143°40'59''$,	$\frac{\varphi_3}{3}=263°40'59''$
$\log\frac{4}{\sqrt{3}}=0.36350$		
$\log y_1=0.32529$,	$\log(-y_2)=0.26970$,	$\log(-y_3)=\bar{1}.40501$
$y_1=2.1149$,	$y_2=-1.8608$,	$y_3=-0.2541$
$x_1=-0.8851$,	$x_2=-4.8608$,	$x_3=-3.2541$

2.
$$x^3-3x+5=0。$$

依公式(24_1)确定角度 ω，依公式(24_2)确定角度 φ，然后依公式(25_1)与(25_2)計算根：

$\log\sin\omega=\bar{1}.60206$,	$\omega=23°34'41''$,	$\frac{\omega}{2}=11°47'20''$,
$\log\operatorname{tg}\varphi=\bar{1}.77009$,	$\varphi=30°29'47''$,	$2\varphi=60°59'34''$
$\log\frac{1}{\sin 2\varphi}=0.05821$,	$\frac{1}{\sin 2\varphi}=1.1434$	
$\log\sqrt{-p}\operatorname{ctg}2\varphi=\bar{1}.98244$,	$\sqrt{-p}\operatorname{ctg}2\varphi=0.96037$	
$x_1=-2.2868$,	$x_2, x_3=1.1434\pm0.96037\,i$	

193. 反复法 时常，未知根 ξ 有一个不太准确的近似值，我們要改善这个根的近似值。反复法或相繼近似法都是这种矯正根的近似值的方法。以下显見这个方法，不只适用于代数方程，也适用于三角方程。

設，方程

$$f(x)=0 \tag{28}$$

写成下面的形状:

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{29}$$

其中 $f_1(x)$ 是这样一个函数，当任意給定一个实数 m 时，方程

$$f_1(x)=m$$

有一个容易計算到高度准确的实根。利用反复法計算方程 (29) 的根的作法如下：代入未知根的近似值 x_0 到方程(29)的右边，由方程:

$$f_1(x)=f_2(x_0)$$

确定未知根的第二近似值 x_1。

再把 x_1 代入(29)的右边，解方程 $f_1(x)=f_2(x_1)$ 确定第三近似值 x_2。如此作下去，确定出一序列的值:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots, \tag{30}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1)=f_2(x_0),\\ &f_1(x_2)=f_2(x_1),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &f_1(x_n)=f_2(x_{n-1}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

不难說出所得到的近似值的几何意义。未知根是曲綫

$$y=f_1(x) \tag{32_1}$$

与

$$y=f_2(x) \tag{32_2}$$

的交点的横坐标。

圖 183 与 184 上各表示两条曲綫，在圖 183 上，导数 $f'_1(x)$ 与 $f'_2(x)$ 在交点同号，而在圖 184 上，异号；在两个情形下，都有：

$$|f'_2(\xi)|<|f'_1(\xi)|。$$

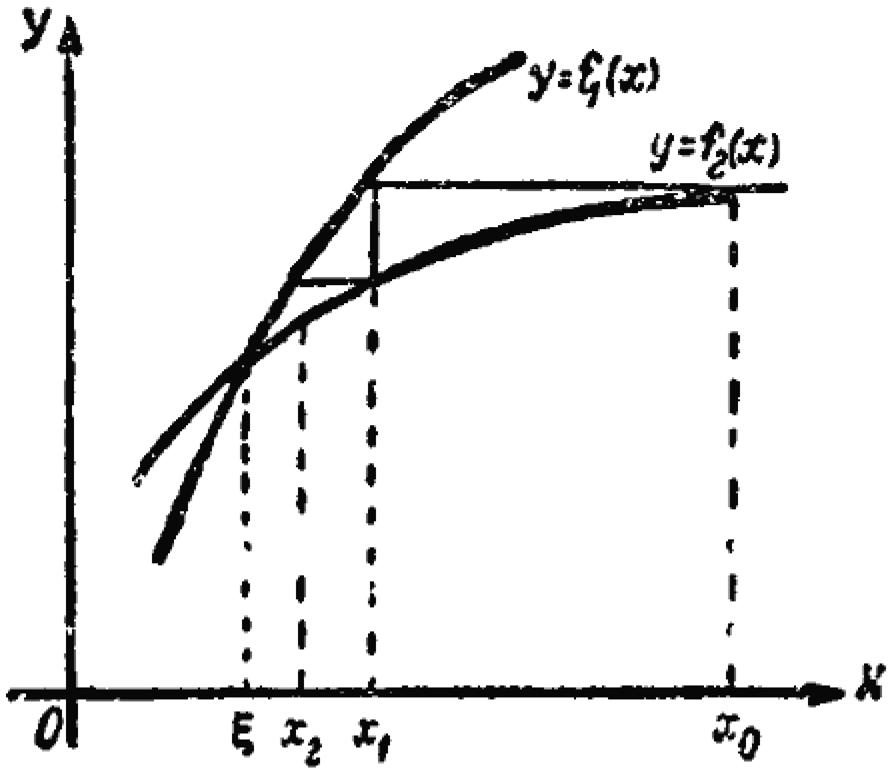


圖 183.

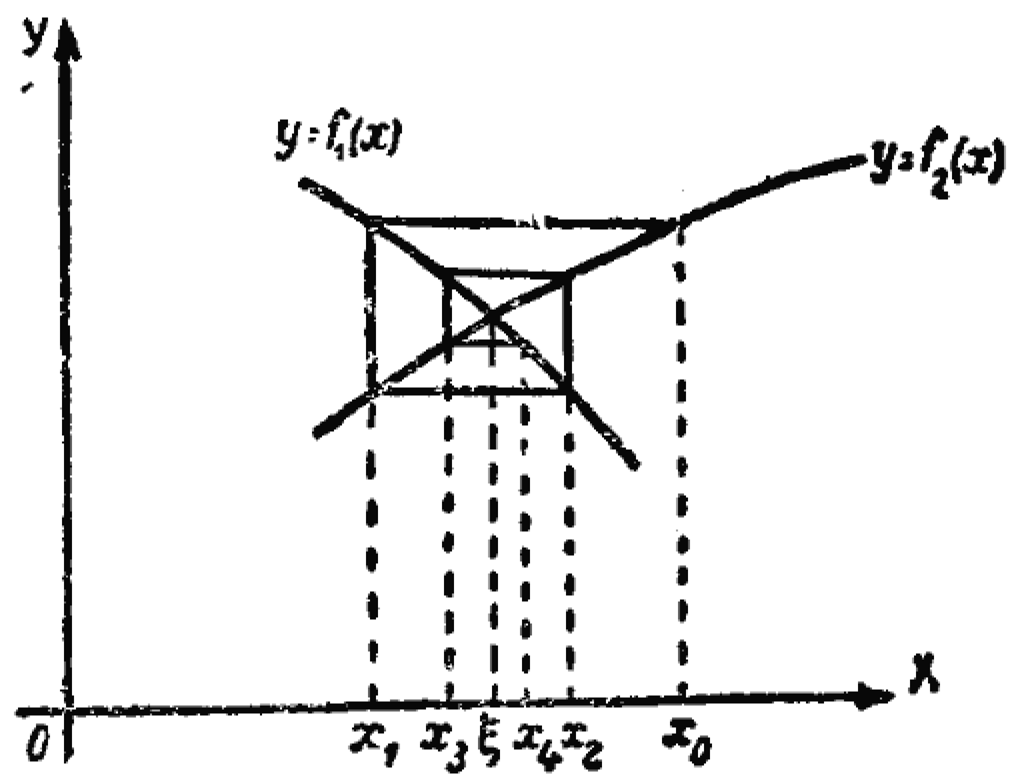


圖 184.

等式(31)对应于下面的作法：引直綫 $x=x_0$ 平行于 OY 軸，交曲綫(32_2)于一点 (x_0, y_0)；过这交点引直綫平行于 OX 軸，交曲綫(32_1)于一点 (x_1, y_0)；过 (x_1, y_0) 再引直綫平行于 OY 軸，交曲綫(32_2)于一点 (x_1, y_1)；过这交点再引直綫 $y=y_1$，交曲綫(32_1)于一点 (x_2, y_1)；如此作下去。这些交点的横坐标給出序列(30)。

若第一近似値与 ξ 足够近，由圖看出，这个序列趋向 ξ 为極限；并且，当 $f'_1(\xi)$ 与 $f'_2(\xi)$ 同号时，得到阶形折綫，趋向 ξ (圖 183)；若 $f'_1(\xi)$ 与 $f'_2(\xi)$ 异号，則这折綫有螺綫的形状趋向 ξ (圖 184)。我們不講序列(30)趋向 ξ 为極限的条件，也不給严格的証明。在很多情形下，可以直接由圖看出来。

上述求近似値法特别适用于一种情形，这时方程(29)有下面的形狀：

$$x=f_2(x)。$$

設 ξ 是这方程的根，我們已知它的一个近似値：

$$x_0=\xi+h。$$

近似値的序列就是：

$$x_1=f_2(x_0),\quad x_2=f_2(x_1),\quad \cdots,\quad x_n=f_2(x_{n-1}),\cdots。$$

可以証明，若函数 $f_2(x)$ 有导数 $f'_2(x)$，而且当 x 在 $(\xi-h)$ 与 $(\xi+h)$ 之間时，这

导数滿足条件

$$|f_2'(x)| \leqslant q < 1,$$

則当 $n \to \infty$ 时，确实有 $x_n \to \xi$。

例 1. 考虑方程

$$x^5 - x - 0.2 = 0。\qquad (33)$$

它的实根是曲綫

$$y = x^5, \qquad (34_1)$$

$$y = x + 0.2 \qquad (34_2)$$

交点的横坐标(圖 185)。由圖 185 看出，方程(33)有一个正根，两个負根。

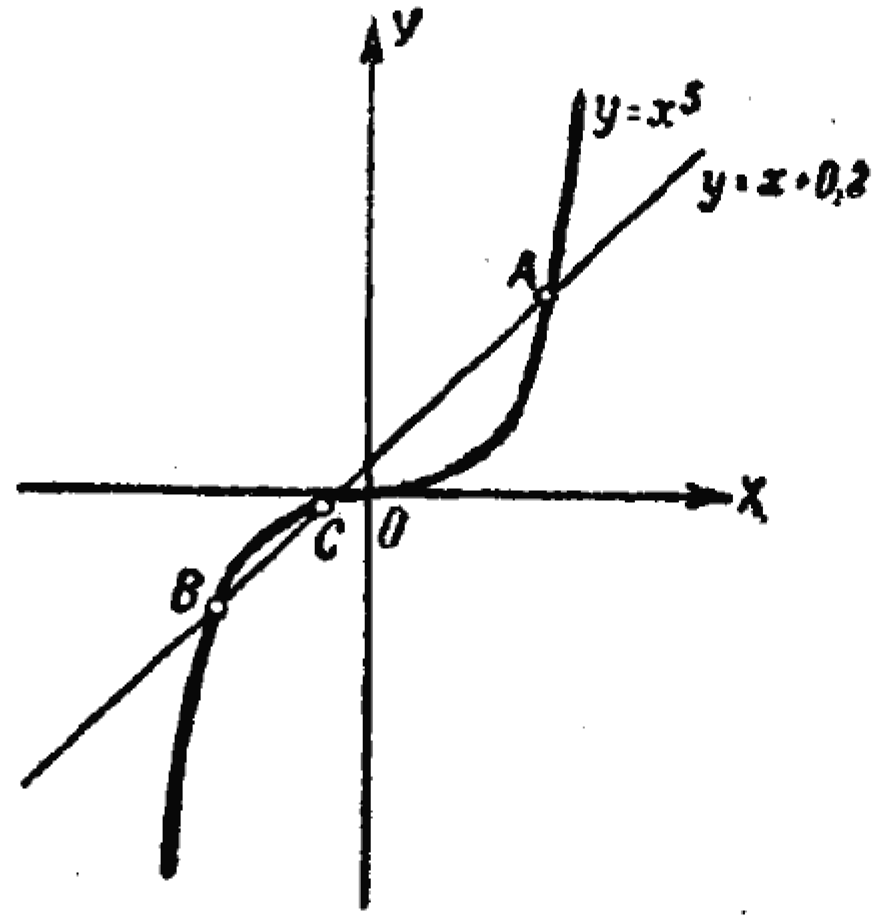


圖 185.

在交点 A 与 B，各对应于正根与絕对值較大的負根，直綫(34_2)的斜率的絕对值小于曲綫(34_1)的切綫的斜率的絕对值，就是，当用反复法求方程(33)的根时，須要写成：

$$x^5 = x + 0.2\,。$$

計算正根时，我們取 $x_0 = 1$ 作第一近似值，得到下表：

$\sqrt[5]{x_n+0.2}$	$x_n+0.2$
	1.2
$x_1 = 1.037$	1.237
$x_2 = 1.0434$	1.2434
$x_3 = 1.0445$	1.2445
$x_4 = 1.04472$	

于是得到未知根准确到四位数的近似值。

計算絕对值較大的負根时，取 $x_0 = -1$ 作第一近似值。

$\sqrt[5]{x_n+0.2}$	$x_n+0.2$
	-0.8
$x_1 = -0.956$	-0.756
$x_2 = -0.9456$	-0.7456
$x_3 = -0.9430$	-0.7430
$x_4 = -0.9423$	-0.7423
$x_5 = -0.94214$	-0.74214
$x_6 = -0.94210$	

在这情形下，差誤不大于 2×10^{-5}。

点 C 对应于絕对值較小的負根，在这点，曲綫(34_1)的切綫的斜率小于 1，所以应用反复法时，方程(33)須要写成：

$$x=x^5-0.2。$$

取 $x_0=0$ 作第一近似值，得到：

$x_n^5-0.2$	x_n^5
	-0
$x_1=-0.2$	-0.00032
$x_2=-0.20032$	

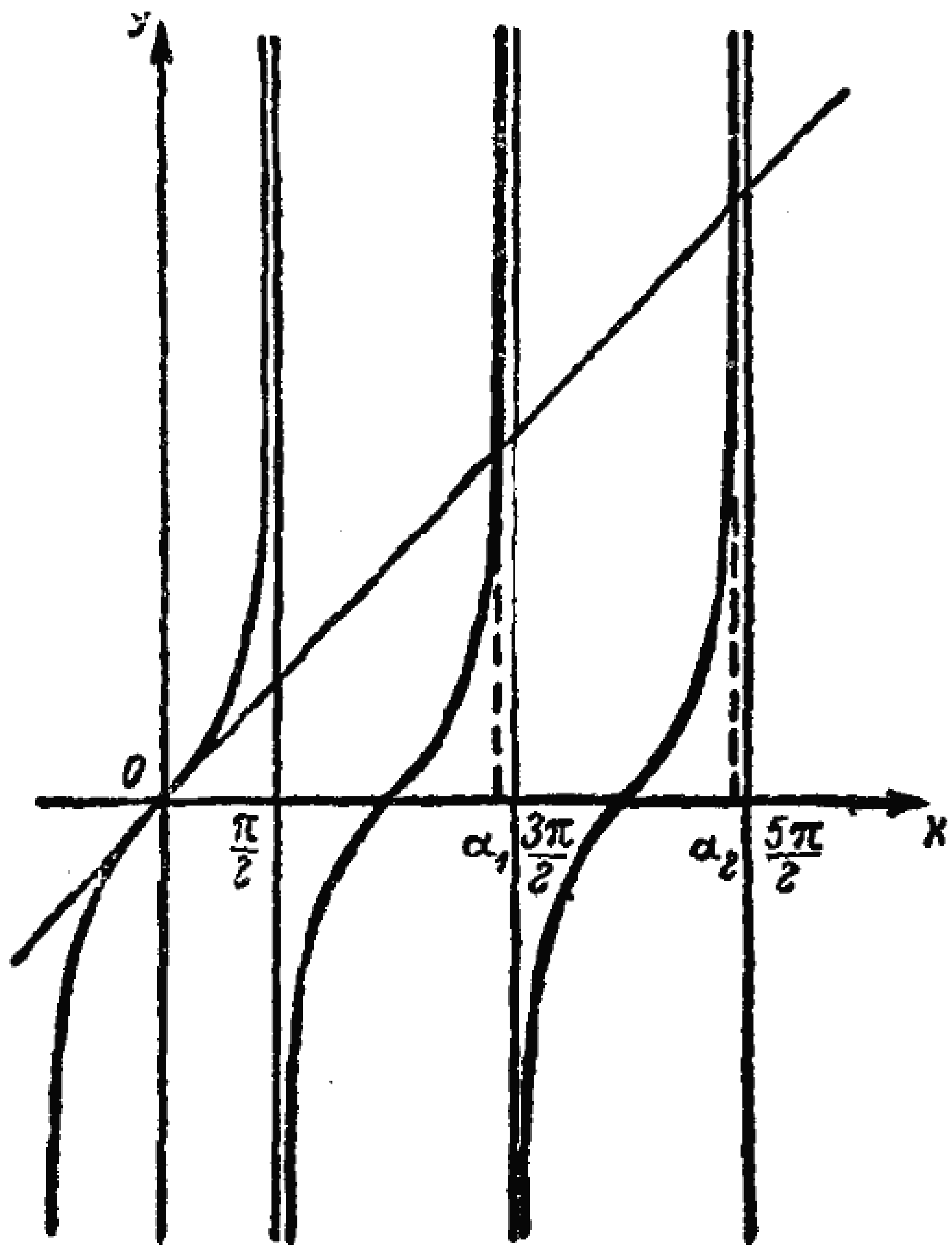


圖 186.

近似值 x_2 准确到五位小数。在这三种情形下，都如圖 183 所示，近似值依阶形折綫趋向根。由圖 185 可以承認，在这三种情形下，当 n 增加时，近似值 x_n 單調改变趋向未知根。

例 2.

$$x=\operatorname{tg}x。\qquad(35)$$

这个方程的根是曲綫

$$y=x \quad 与 \quad y=\operatorname{tg}x$$

交点的横坐标，由圖 186 看出，在每一个区間

$$\left[(2n-1)\frac{\pi}{2},\ (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots)$$

上，这方程有一个根。

对于正根，有近似等式：

$$\alpha_n\approx(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

其中 α_n 記方程(35)的第 n 个正根。

計算逼近$\frac{3\pi}{2}$的根 α_1。应用反复法，把方程(35)写成：

$$x=\operatorname{arc}\operatorname{tg}x,$$

并取 $x_0=\frac{3\pi}{2}$ 作第一近似値。

当計算相繼的近似値时，須要取反正切的值。应用对数表并用弧度單位，得到：

$$x_0=4.7124;\ x_1=4.5033;\ x_2=4.4938;\ x_3=4.4935。$$

194. 牛頓法 圖183与184所示，求根的近似値的反复步驟在于作平行于坐标軸的直綫。現在我們講另一种反复步驟，应用斜向坐标軸的直綫。牛頓法是这样的方法之一。

設 x_0' 与 x_0 是方程

$$f(x)=0 \tag{36}$$

的一个根 ξ 的近似値，并設在区間 $[x_0', x_0]$ 上这方程只有一个根。圖187与188上表示曲綫

$$y=f(x)$$

的圖形。

点 A 的横坐标是根 ξ，点 N 与 P 的横坐标各为这个根的近似値 x_0' 与 x_0。在点 P 引这曲綫的切綫，由这切綫与 OX 軸的交点 Q_1 作曲綫的縱坐标 $\overline{Q_1Q}$；在点 Q 再引曲綫的切綫 QR_1，由 R_1 作曲綫的縱坐标 $\overline{R_1R}$；如此作下去，由圖看出，点 $P_1, Q_1, R_1, \cdots\cdots$ 趋向点 A，所以它們的横坐标 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ 是根 ξ 的相繼的近似値。求由 x_{n-1} 表达 x_n 的公式。

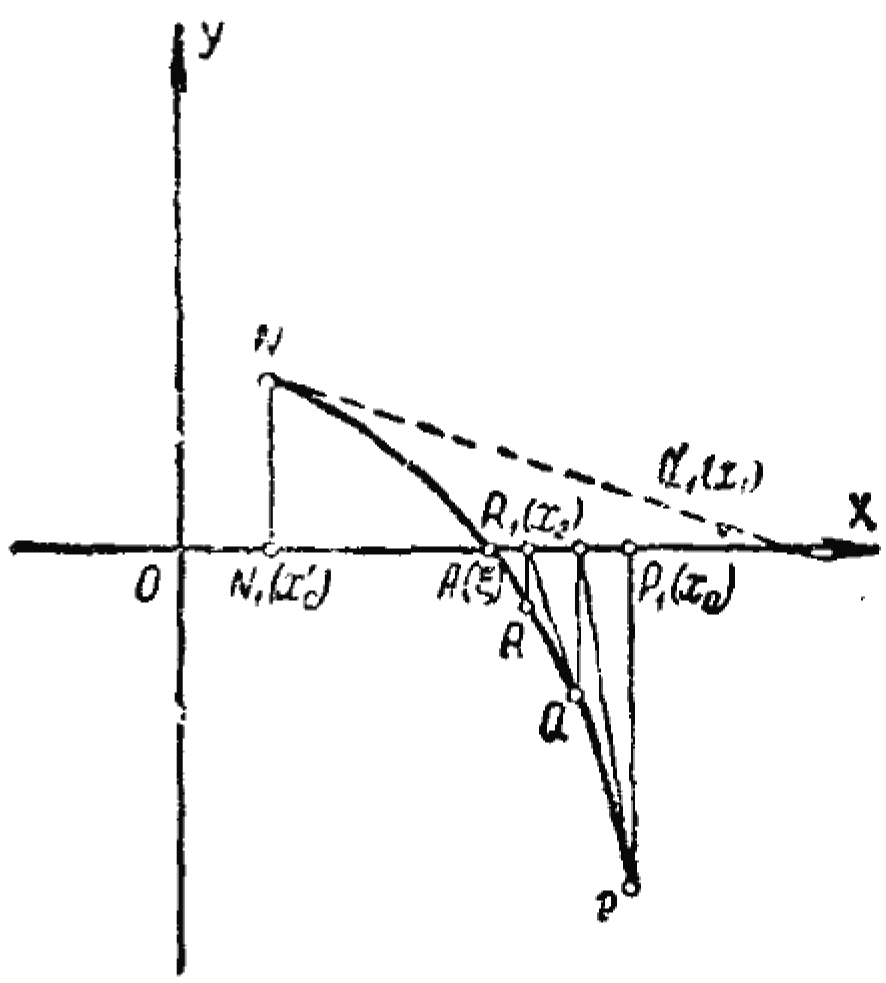


圖 187.

切綫 PQ_1 的方程是：

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(X-x_0)。$$

代入 $Y=0$，求点 Q_1 的横坐标：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{37}$$

于是，一般来講：

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)。 \tag{38}$$

我們由圖看出，当 $f(x)$ 在区間 $[x_0', x_0]$ 上單調而且凹向下（或凹向上）时，也就

是当 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 在这区間上不变号时 [**57, 71**]，x_n 确实是漸近于根 ξ。我們不作严格的証明。

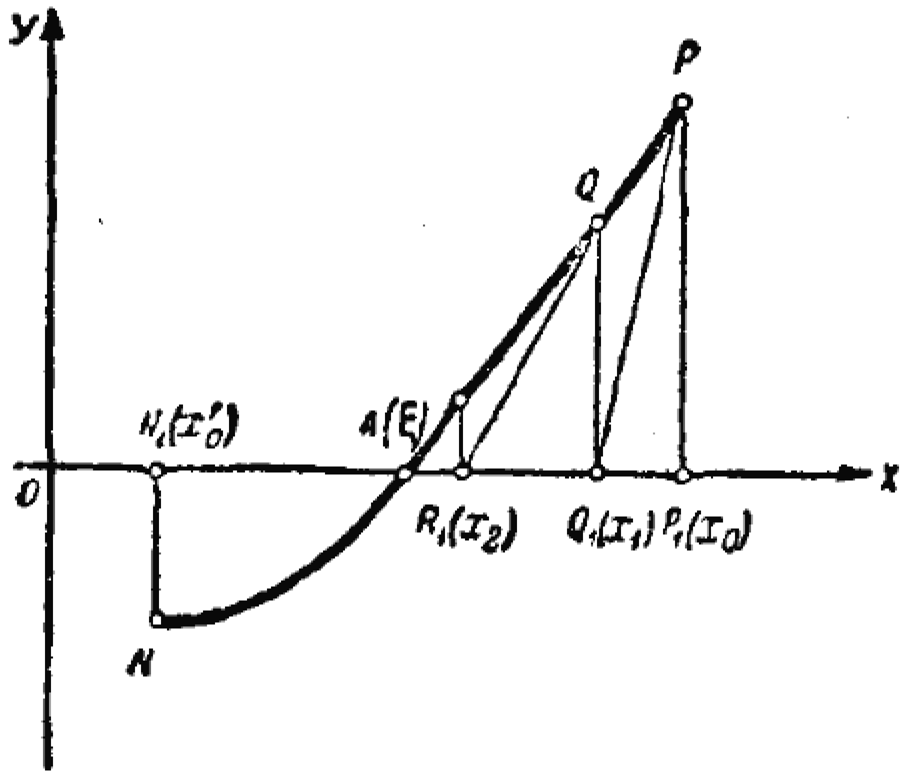


圖 188.

注意，若应用牛頓法，不从端点 x_0 开始，而从 x_0' 开始，由用虛綫画的切綫看出，就不漸近于根。在圖 188 的情形，曲綫凹向上，就是 $f''(x)>0$，我們看出，牛頓法須要由 $f(x)>0$ 的一端作起。由圖 187 看出，当 $f''(x)<0$ 时，牛頓法須要由縱坐标 $f(x)<0$ 的一端作起。如此，我們得到下面的法則：若在区間$[x_0', x_0]$上 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 不等于零，而且縱坐标 $f(x_0')$ 与 $f(x_0)$ 异号，則应用牛頓法，由 $f(x)$ 与 $f''(x)$ 同号的一端作起，就得到方程在区間$[x_0', x_0]$內的唯一的根的相繼的近似值。

195. 簡單插补法 再講一种根的近似計算法。过弧的两端 N 与 P 引直綫。这直綫与 OX 軸交点 B 的横坐标給出根的近似值(圖 189)。像上面一样，設 x_0' 与 x_0 是区間两端的横坐标。直綫 NP 的方程就是：

$$\frac{Y-f(x_0)}{f(x_0')-f(x_0)}=\frac{X-x_0}{x_0'-x_0}。$$

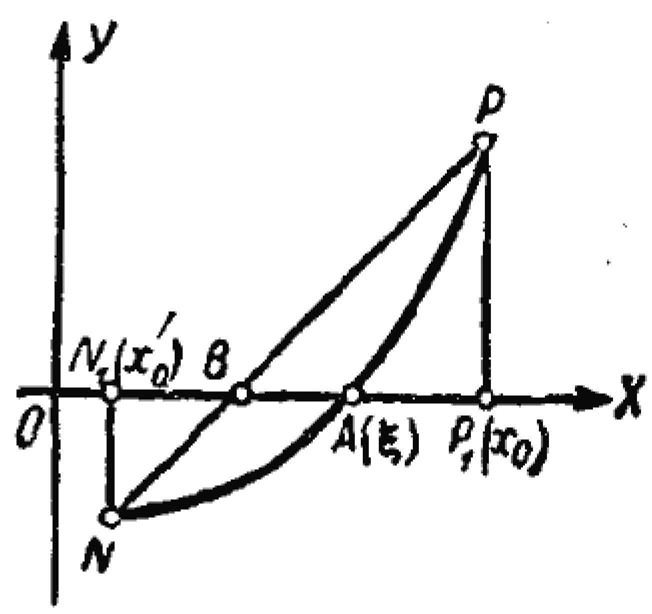


圖 189.

讓 $Y=0$，求出点 B 的横坐标的表达式：

$$\frac{x_0'f(x_0)-x_0f(x_0')}{f(x_0)-f(x_0')} \text{ 或 } x_0'-\frac{(x_0-x_0')f(x_0')}{f(x_0)-f(x_0')},$$

或

$$x_0-\frac{(x_0-x_0')f(x_0)}{f(x_0)-f(x_0')}。\tag{39}$$

把一段曲綫用过这曲綫两端的直綫替代，相当于在討論的区間上用一次多項式替代函数 $f(x)$，而这多項式在区間两端的值与 $f(x)$ 的值相同，或者說相当于假設 $f(x)$ 的改变与 x 的改变成正比。这个方法叫做簡單插补法，例如，在应用对数表时常用这方法。用这个方法計算根也有时叫做虛位法。

若同时应用簡單插入法与牛頓法，可以由两个值 x_0' 与 x_0 求近似根。

例如，設在一端 x_0，$f(x)$ 与 $f''(x)$ 同号，則牛頓法須要由这一端作起。

应用两个方法，得到两个新的近似值(圖 190)：

$$x_1'=\frac{x_0'f(x_0)-x_0f(x_0')}{f(x_0)-f(x_0')},$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}。$$

对于近似值 x_1' 与 x_1 可以再应用同样的公式得到新值：

$$x_2'=\frac{x_1'f(x_1)-x_1f(x_1')}{f(x_1)-f(x_1')},$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}。$$

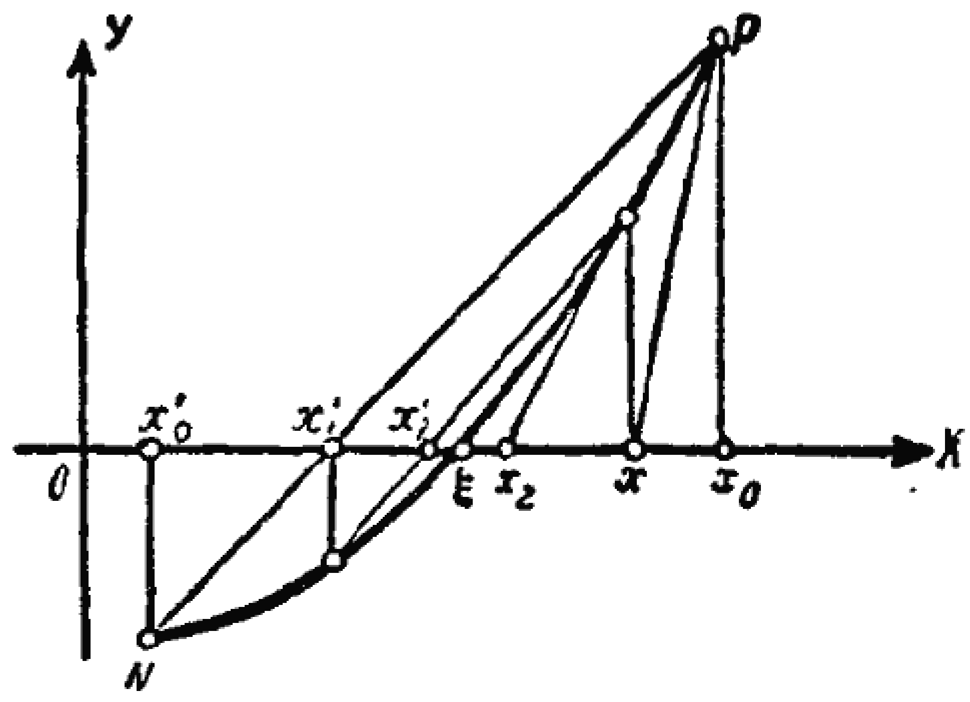


圖 190.

如此，得到两串值：

$$x_0',\ x_1',\ x_2',\ \cdots,x_n',\ \cdots \quad 与 \quad x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,$$

自左右两方漸近于根 ξ。

若 x_n' 与 x_n 的前几位小数相同，則根 ξ 的这几位小数应当是这几个数。

例　方程

$$f(x)=x^5-x-0.2=0,$$

我們在[**193**]中的例 1 考虑过，它在区間 $1<x<1.1$ 上有一个正根，而在这区間上，

$$f'(x)=5x^4-1,\quad f''(x)=20x^3$$

不变号。如此我們可以設：

$$x_0'=1,\quad x_0=1.1。$$

計算函数 $f(x)$ 的値：

$$f(1)=-0.2,\quad f(1.1)=0.31051,$$

由此看出，在右端 $(x=1.1)$，$f(x)$ 与 $f''(x)$ 同号，于是牛頓法須要由右端作起。計算在右端 $f'(x)$ 的値：

$$f'(1.1)=6.3205。$$

依照公式(37)与(39)，就有：

$$x_1'=1+\frac{0.1\times0.2}{0.51051}=1.039,$$

$$x_1=1.1-\frac{0.31051}{6.3205}=1.051。$$

为要再作近似計算，求出：

$$f(1.039)=-0.0282,\quad f(1.051)=0.0313,\quad f'(1.051)=5.1005,$$

由此

$$x_2'=1.039+\frac{0.012\times0.0282}{0.0595}=1.04469,$$

$$x_2 = 1.051 - \frac{0.0313}{5.1005} = 1.04487,$$

得到根的値 $1.04469 < \xi < 1.04487$

差誤不大于 2×10^{-4}[**193**]。

§ 19. 函数的积分法

196. 有理分式的部分分式 以前我們講过些計算不定积分的方法。在这节中我們較有系統的把这个問題补講完全。第一个問題是有理分式的积分，就是两个多項式商的积分。在解决这个問題之前，我們先講把一个有理分式写成較簡單的分式之和的公式。这个作法叫做分解有理分式为部分分式。

設有有理分式：

$$\frac{F(x)}{f(x)}。$$

若这是个假分式，就是分子的次数不低于分母的次数，則先用除法，得到一个整多項式 $Q(x)$ 与一个眞分式：

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}, \tag{1}$$

其中 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 的分子的次数低于分母的次数。此外，我們算作这个分式不可約，就是，算作分子与分母互質[**188**]。

設 $x=a$ 是分母的 k 重根：

$$f(x) = (x-a)^k f_1(x) \text{ 而 } f_1(a) \neq 0。$$

我們証明，这个分式可以写成下面形状的和：

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{2}$$

其中 A 是一个常数而且右边的第二項是一个眞分式。

作等式：

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k f_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{\varphi(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)},$$

确定常数 A 使得右边分式的分子被 $(x-a)$ 除得尽[**184**]：

$$\varphi(a)-Af_1(a)=0,$$

由此，

$$A=\frac{\varphi(a)}{f_1(a)}\quad(f_1(a)\neq 0)。$$

对于这样选定的 A，上述分式可以消掉 $(x-a)$，于是求出恒等式（2）。如此推知，分出 $\frac{A}{(x-a)^k}$ 形状的簡單分式后，可使分母中出現的 $(x-a)$ 的方指数至少降低一次。

設分母有因子分解式：

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_m)^{k_m}。$$

我們不写常因子，因为它可以归并到分子中去。繼續应用上述分出簡單分式的法則，得到这有理式的部分分式：

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=&\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\\&+\frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{A_{k_2-1}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\&+\frac{A_{k_m}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m}}+\frac{A_{k_m-1}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(m)}}{x-a_m}。\end{aligned}\qquad(3)$$

再看这恒等式右边的系数的确定方法。通分去掉分母，得到两个多項式的恒等式，讓它們的对应系数相等，得到确定未知系数的一次方程組。这种方法叫做待定系数法，在[**185**]中我們講过。

还可以用另一种方法，就是在上述的多項式恒等式中代入 x 的不同特殊值。这个代入法，对于上述恒等式的任何阶导数，也可以应用。

可以証明，分解式（3）是唯一的，就是，它的系数有完全确定的值，不依賴于分解的方法。这里我們不証。以后我們在例題中应用上述方法确定分解式的未知系数。

在 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 是实多項式的情形，恒等式（3）的右边可能含有虛項，对应于分母的虛根。下面介紹有理分式的另一种分解式，我們只

講分母只有單根的情形，因为这种情形是很重要的。

分母的一对共軛复根 $x=a\pm bi$ 对应于簡單分式和：

$$\frac{A+Bi}{x-a-bi}+\frac{A-Bi}{x-a+bi}。$$

通分母相加，得到下面形状的簡單分式：

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (p=-2a,\ q=a^2+b^2)。$$

如此，在考慮的情形下，实有理分式分解为实部分分式：

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_r}{x-a_r}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2}+\cdots+\frac{M_sx+N_s}{x^2+p_sx+q_s}, \qquad (4)$$

其中第一列分式对应于分母的实根，第二列对应于成对的共軛复根。

197. 有理分式的积分法 根据公式(1)，有理分式的积分可以化为多項式的积分与眞有理分式的积分。多項式的积分仍然得到多項式，現在我們考慮眞分式的积分。

若分式的分母只有單根，则根据公式(4)，整个可以化为两种形状的积分：

1° $$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\log(x-a)+C$$

与

2° $$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx。$$

回忆[**92**]中所述，得到下面的結果：

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\lambda\log(x^2+px+q)+\mu\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C。$$

如此，在考慮的情形下，积分的結果是对数函数与反正切函数。

再考慮眞有理分式的分母有重根的情形。作出分解式(3)。可能其中有虛数出現，在以下的計算中，虛数只有中間作用，在最后結果中就沒有了。

当求分母高于一次的简單分式的积分时，我們仍然得到有理分式：

$$\int \frac{A_{k_i-s}^{(i)}}{(x-a_i)^{k_i-s}}dx=\frac{A_{k_i-s}^{(i)}}{(1-k_i+s)(x-a_i)^{k_i-s-1}}+C \quad (k_i-s>1)。$$

积分后得到的諸分式之和是整个积分的代数部分，通分母得到眞分式：

$$\frac{\omega(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\cdots(x-a_m)^{k_m-1}}。$$

分子 $\omega(x)$ 是一个多項式，它的次数比分母的次数至少低一次，而这个分母，就是被积分式的分母 $f(x)$ 与它的一阶导数 $f'(x)$ 的最高公因式 $D(x)$ [**188**]。

剩下的沒有积分的分式之和：

$$\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_1^{(m)}}{x-a_m},$$

通分母，可以写成眞分式：

$$\frac{\omega_1(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)},$$

其中 $\omega_1(x)$ 是一个多項式，它的次数比分母的次数至少低一次，而这个分母是 $f(x)$ 被 $D(x)$ 除得的商 $D_1(x)$。如此我們得到下面这个額米特—奥斯特洛格拉斯基公式：

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=\frac{\omega(x)}{D(x)}+\int\frac{\omega_1(x)}{D_1(x)}dx。\tag{5}$$

縱然不知道 $f(x)$ 的根，多項式 $D(x)$ 与 $D_1(x)$ 也可以确定[**188**]。現在我們要确定多項式 $\omega(x)$ 与 $\omega_1(x)$ 的系数，可以算作它們的次数比对应的分母低一次。由等式(5)求导数，去掉积分号。再通分，得到一个恒等式，由这两个多項式的恒等式，应用待定系数法或代入法可以确定 $\omega(x)$ 与 $\omega_1(x)$ 的系数。

如此，縱然不知道分母的根，由額米特—奥斯特洛格拉斯基公式可以得到眞有理分式的积分的代数部分。等式(5)右边积分号下的分母只有單根，分解为簡單分式和，可以計算这个积分；并且我們知道，它

可以由对数与反正切表达。

例 依照額米特—奥斯特洛格拉斯基公式

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^3+1}+\int\frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1}dx。$$

对 x 求导数

$$\frac{1}{(x^3+1)^2}=\frac{(2\alpha x+\beta)(x^3+1)-3x^2(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}{(x^3+1)^2}+\frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1},$$

通分，就有：

$$1=(2\alpha x+\beta)(x^3+1)-3x^2(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+(\delta x^2+\varepsilon x+\eta)(x^3+1)。$$

比較 x^5 的系数，得到 $\delta=0$。再比較 x^2 的系数，得到 $\gamma=0$。在这恒等式中代入 $\gamma=\delta=0$，再比較其他方幂的系数，就有：

$$\varepsilon-\alpha=0,\quad \eta-2\beta=0,\quad 2\alpha+\varepsilon=0,\quad \beta+\eta=1,$$

由此得到：
$$\alpha=\gamma=\delta=\varepsilon=0,\quad \beta=\frac{1}{3},\quad \eta=\frac{2}{3},$$

于是推知，
$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3+1}。$$

計算最后的积分，我們先分解部分分式：

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}。$$

通分母：
$$1=A(x^2-x+1)+(Mx+N)(x+1)。$$

讓 $x=-1$，得到 $A=\frac{1}{3}$，再比較 x^3 的系数与常数項，得到：

$$M=-\frac{1}{3};\quad N=\frac{2}{3},$$

于是推知
$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}。$$

最后得到：

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C,$$

由此

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{9}\log(x+1)-\frac{1}{9}\log(x^2-x+1)+$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C。$$

198. 含有根式表达式的积分 考虑另一种型的积分．它可以化为有理分式的积分。

1. 积分

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu},\ \cdots\right]dx, \tag{6}$$

其中 R 表示所含变量的有理函数，就是这些变量的多项式的商，而 λ，μ，$\cdots$ 是有理数。設这些分数的公分母是 m。引用新变量 t:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^{m}。$$

这时，显然，x，$\frac{dx}{dt}$与

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda},\quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu},\ \cdots$$

都是 t 的有理函数，于是积分(6)化为有理分式的积分。

2. 二項式微分 二項式微分的积分:

$$\int x^{m}(a+bx^{n})^{p}\,dx, \tag{7}$$

其中 m，n 与 p 是有理数，有时可以化为积分(6)。

設 $x=t^{\frac{1}{n}}$:

$$\int x^{m}(a+bx^{n})^{p}\,dx=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^{p}\,dt。$$

若 p 或$\frac{m+1}{n}$是整数，则得到积分(6)的形状的积分。

由等式

$$\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^{p}\,dt=\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{p}dt$$

推知，当 $\frac{m+1}{n}+p$ 是整数时，积分(7)化为(6)的形状。

契巴謝夫有一个定理，按这定理，二項式微分的积分可以由初等函数表达的，不外所述三种情形。

199. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ **型的积分** 积分

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \tag{8}$$

其中 R 表示所含变量的有理函数，利用尤拉替换，可以化为有理分式的积分。

在 $a>0$ 的情形，可以应用尤拉第一替换：

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x。$$

将这等式两边乘方，解 x，得到：

$$x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}。$$

由此看出，x，$\frac{dx}{dt}$与$\sqrt{ax^2+bx+c}$是 t 的有理函数，于是积分(8)化为有理分式的积分。

在 $c>0$ 的情形，可以应用尤拉第二替换：

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}。$$

以下請讀者繼續作出来。

在 $a<0$ 的情形，三項式 (ax^2+bx+c) 应当有实根 x_1 与 x_2，因为，否則，对于所有 x 的实值，它有(−)号，而 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 是虚的量。

在这三項式有实根的情形，利用尤拉第三替换：

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_2),$$

积分(8)可以化为有理分式的积分。这也請讀者自己驗証。

用尤拉替换，时常要作复杂的計算，所以我們再講积分(8)的另一种計算法。

把这根式記作：

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}。$$

y 的任何正偶次幂是 x 的多項式，所以被积函数不难写成下面的形状：

$$R(x,\ y)=\frac{\omega_1(x)+\omega_2(x)y}{\omega_3(x)+\omega_4(x)y},$$

其中 $\omega_s(x)$ 都是 x 的多項式。把分母有理化，再写成两項和，这表达式可以写成下面的形状：

$$R(x,\ y)=\frac{\omega_5(x)}{\omega_6(x)}+\frac{\omega_7(x)}{\omega_8(x)y}。$$

第一項是有理分式，我們已經講过它的积分。分出分式 $\frac{\omega_7(x)}{\omega_8(x)}$ 的整部，再把剩下的眞分式分解为部分分式，就得到下面形状的积分：

$$\int\frac{\varphi(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \tag{9}$$

与

$$\int\frac{dx}{(x-a^n)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{10}$$

其中 $\varphi(x)$ 是 x 的多項式。

現在我們設多項式 $\omega_s(x)$ 只有实根。

在考慮积分(9)与(10)之前，我們先提出积分(9)的两个特殊情形：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right)+C\quad(a>0), \tag{11}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+bx+c}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{m^2-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{b}{2}}{m}+C。 \tag{12}$$

利用尤拉第一替換，不难得到公式(11)。积分(12)我們以前[**92**]講过。

为要計算积分(9)，应用公式：

$$\int\frac{\varphi(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\psi(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad(13)$$

其中 $\psi(x)$ 是一个比 $\varphi(x)$ 低一次的多项式，λ 是一个常数。公式(13)我們不証明。由关系式 (13) 求导数，通分母，得到两个多项式的恒等式，由此可以确定多项式 $\psi(x)$ 的系数与常数 λ。

利用替换

$$x-a=\frac{1}{t}$$

积分(10)可以化为积分(9)。

例

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}dx=$$

$$=\int\frac{x}{x-1}dx-\int\frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}dx=$$

$$=x+\log(x-1)-\int\frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}dx。$$

不过
$$\frac{x^2-x+1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1},$$

所以

$$\int\frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}dx+\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}。$$

依照公式(13)：

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}dx=a\sqrt{x^2-x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}。$$

由这关系式求导数，再通分母，得到恒等式

$$2x=a(2x-1)+2\lambda,$$

由此
$$a=1,\quad \lambda=\frac{1}{2},$$

于是根据公式(11)：

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}dx=\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\log\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)+C。$$

代入
$$x-1=\frac{1}{t},$$

得到：

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=$$

$$=-\log\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right)+C=$$

$$=-\log\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+1}\right)+C=$$

$$=-\log(x+1+2\sqrt{x^2-x+1})+\log(x-1)+C,$$

最后得到：

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=x-\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\log\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)+$$

$$+\log(x+1+2\sqrt{x^2-x+1})+C。$$

积分(8)是亚貝尔积分的特殊情形。所謂亚貝尔积分是下面形状的积分：

$$\int R(x,\ y)\,dx \tag{14}$$

其中 R 表示所含变量的有理函数，y 是 x 的代数函数，就是由方程

$$f(x,\ y)=0 \tag{15}$$

确定的 x 的函数，其中 $f(x,\ y)$ 是 x 与 y 的多項式。若

$$y=\sqrt{P(x)},$$

其中 $P(x)$ 是 x 的三次或四次多項式，則这亚貝尔积分叫做橢圓积分。在卷三中我們再講这种积分。这种积分以及更普遍的亚貝尔积分，一般來講，不可以由初等函数表达。若多項式 $P(x)$ 的次数高于四次，則积分(14)叫做超橢圓积分。

若表达 y 是 x 的代数函数的关系式(15)具有这样的性質，x 与 y 可能表达成一个輔助参变量 t 的有理函数，則显然亚貝尔积分化为有理分式的积分。在所述情形下，对应于关系式(15)的代数曲綫叫做單行曲綫。例如，尤拉替換証实曲綫

$$y^2=ax^2+bx+c$$

的單行性。

200. $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ 型的积分

积分

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx, \tag{16}$$

其中 R 表示所含变量的有理函数，若引用新变量

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

可以化为有理分式的积分。

实际上,依照已知三角公式,得到:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

并且

$$x=2\operatorname{arc\,tg} t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

由此直接推出以上的肯定。

現在講算起来可能比較簡單的几个特殊情形。

1. 設当用$(-\sin x)$与$(-\cos x)$分别替换$(\sin x)$与$(\cos x)$时,$R(\sin x,\cos x)$不变,就是設$R(\sin x,\cos x)$有周期π。

因为

$$\sin x=\cos x\operatorname{tg} x,$$

所以$R(\sin x,\cos x)$是$\cos x$与$\operatorname{tg} x$的有理函数,当用$(-\cos x)$替换$(\cos x)$时,它不变,就是只含有$\cos x$的偶次幂:

$$R(\sin x,\cos x)=R_1(\cos^2 x,\operatorname{tg} x)。$$

在这情形下,設

$$t=\operatorname{tg} x,$$

則积分(16)化为有理分式的积分。

实际上,这时

$$dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}。$$

所以,若$R(\sin x,\cos x)$当用$(-\sin x)$与$(-\cos x)$分别替换$\sin x$与$\cos x$时不变,則利用替换$t=\operatorname{tg} x$,积分(16)可以化为有理分式的积分。

2. 設$R(\sin x,\cos x)$当用$(-\sin x)$替代$\sin x$时,只改变符号。則函数

$$\frac{R(\sin x,\cos x)}{\sin x}$$

当作上述替代时不变,就是,只含有$\sin x$的偶次幂,于是

$$R(\sin x,\cos x)=R_1(\sin^2 x,\cos x)\sin x。$$

代入 $t=\cos x$，得到：

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=-\int R_1(1-t^2,\ t)\,dt,$$

就是，若 $R(\sin x,\ \cos x)$ 当用 $(-\sin x)$ 替代 $\sin x$ 时只变符号，则利用替換 $t=\cos x$，积分(16)化为有理分式的积分。

3. 同样不难証明，若 $R(\sin x,\ \cos x)$ 当用 $(-\cos x)$ 替代 $\cos x$ 时只变符号，则利用替换 $t=\sin x$，积分(16)化为有理分式的积分。

201. $\int e^{ax}[P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx]\,dx$ **型的积分**　积分

$$\int e^{ax}\varphi(x)\,dx, \tag{17}$$

其中 $\varphi(x)$ 是 x 的 n 次多項式，用分部积分法，化为

$$\int e^{ax}\varphi(x)\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\varphi(x)-\frac{1}{a}\int e^{ax}\varphi'(x)\,dx。$$

如此，最后积分中的多項式 $\varphi'(x)$ 比 $\varphi(x)$ 低一次。繼續作分部积分，并注意

$$\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$$

得到：

$$\int e^{ax}\varphi(x)\,dx=e^{ax}\psi(x)+C, \tag{18}$$

其中 $\psi(x)$ 也是 n 次多項式，就是，指数函数 e^{ax} 与一个 n 次多項式的乘积的积分还是一个这样的乘积。

由关系式(18)求导数，得到的恒等式两边消去 e^{ax}，依待定系数法，可以确定多項式 $\psi(x)$ 的系数。

再考虑較普遍的积分：

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx]\,dx, \tag{19}$$

其中 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 是 x 的多項式。設这两个多項式的次数的較高的是 n。引用复量作輔助，可以化积分(19)为积分(17)，依尤拉公式

$$\cos bx=\frac{e^{bxi}+e^{-bxi}}{2}, \quad \sin bx=\frac{e^{bxi}-e^{-bxi}}{2i},$$

利用这两个表达式替代 $\cos bx$ 与 $\sin bx$，得到：

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx]dx=$$

$$=\int e^{(a+bi)x}\varphi(x)dx+\int e^{(a-bi)x}\varphi_1(x)dx,$$

其中 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 都是不高于 n 次的多项式。应用公式(18)：

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx]dx=$$

$$=e^{(a+bi)x}\psi(x)+e^{(a-bi)x}\psi_1(x)+C,$$

其中 $\psi(x)$ 与 $\psi_1(x)$ 是不高于 n 次的多项式。代入

$$e^{\pm bxi}=\cos bx\pm i\sin bx,$$

最后就有：

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx]dx=$$

$$=e^{ax}[R(x)\cos bx+S(x)\sin bx]+C, \qquad (20)$$

其中 $R(x)$ 与 $S(x)$ 是不高于 n 次的多项式。如此，我們看出，积分(19)有与它的被积函数同样的表达式，并且，在这积分的表达式中的多项式的次数，要取被积函数中的多项式的較高的次数。

由关系式(20)求导数，再由得到的恒等式消去 e^{ax}，比較两边 $x^s\cos bx$ 与 $x^s\sin bx$ $(s=0, 1, 2, \cdots, n)$ 形状的同类項，就得到确定多項式 $R(x)$ 与 $S(x)$ 的系数的一次方程組。注意，若积分号下沒有 $\cos bx$ 或 $\sin bx$，公式(20)的右边仍然要写出这两个三角函数，再用上述的法則确定多項式 $R(x)$ 与 $S(x)$。

积分

$$\int e^{ax}\varphi(x)\sin(a_1x+b_1)\sin(a_2x+b_2)\cdots\cos(c_1x+d_1)\cos(c_2x+d_2)\cdots dx$$

直接可以化为积分(19)。

实际上，应用已知的三角公式，正弦与余弦的和与差可以表达成乘积，反之，任何上述两个三角函数的乘积可以化为正弦或余弦的和或差。应用几次这个变换，积分号下每项的三角因式可以化减到一个，如此就得到(19)形状的积分。

例 依照公式(20)

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) + C。$$

求导数，再消去 e^{ax}:

$$\sin bx = (aA + bB)\cos bx + (-bA + aB)\sin bx,$$

由此

$$aA + bB = 0,\quad -bA + aB = 1,$$

就是

$$A = -\frac{b}{a^2+b^2},\quad B = \frac{a}{a^2+b^2},$$

最后結果:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\cos bx + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bx\right) + C。\tag{21}$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等数学教程　第一卷
作者＝Ｂ．Ｉ．斯米尔诺夫著　孙念增译
页数＝４７２
ＳＳ号＝１０６５４７０８
出版日期＝１９５２年１０月第１版